18498

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik.

In zwanglosen Heften.

GENERAL LIBRARY
University of
MICHIGAN

Funfzigster Band.

In vier Heften.

Mit fünf lithographirten Tafeln

und

Inhaltsverzeichnissen der Bände 1—50 dieses Journals,

welche

mit thätiger Beförderung hoher Königlich-Preufsischer Behörden

in den Jahren 1826—1855 herausgegeben wurden

von

Dr. August Leopold Crelle,

Königlich-Preufsischem Geheimen Oberbaurath a. D., Ritter des rothen Adler-Ordens dritter Classe mit der Schleife, Mitgliede der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Correspondenten der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg und der Königlichen Akademieen der Wissenschaften zu Neapel und Brüssel, auswärtigem Mitgliede der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Stockholm und der American philosophical society for promoting useful knowledge zu Philadelphia, Ehrenmitgliede der Hamburger Gesellschaft zur Verbreitung der mathematischen Wissenschaften.

Berlin, 1855.

Bei Georg Reimer.

GENERAL LIBRARY

Inhaltsverzeichnifs
des funfzigsten Bandes, nach den Gegenständen.

I. Reine Mathematik.

1. Analysis.

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
1.	Über die Reduction dreifacher Integrale auf Quadraturen. Von Dr *A. Winckler,* Professor der Geodäsie an der K. K. technischen Lehranstalt zu Brünn.	I.	1
3.	Über eine merkwürdige Formel in der Theorie der elliptischen Transcendenten, und eine Ableitung des Fundamentaltheorems. Von Dr. *Richelot,* prof. ord. an der Universität zu Königsberg in Preufsen.	I.	41
6.	De compositione numerorum primorum formae $4\lambda+1$ ex duobus quadratis. Scrips. *Henr. Jo. Smith,* Oxoniensis.	I.	91
10.	Eine Eigenschaft der Zahlen.	II.	187
13.	Über eine besondere Art, aus complexen Einheiten gebildeter Ausdrücke. Von Herrn Dr. *F. F. Kummer,* Professor an der Universität zu Breslau.	III.	212
15.	Sur deux formules relatives à la théorie de la décomposition des fractions rationnelles. Par Mr. *Brioschi,* professeur à l'université de Pavie. . . .	III.	239
17.	Nouvelle règle pour reconnaître en plusieurs cas l'absence de racines réelles d'une équation algébrique dans un intervalle donné. Par *Juste Bellavitis,* professeur de géométrie descriptive à l'université de Padoue.	III.	263
19.	Bemerkungen zu einer Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Von Herrn Dr. phil. *Dedekind* zu Göttingen.	IV.	268
21.	Sept différents mémoires d'analyse. Par Mr. *A. Cayley* à Londres.		
	No. 1. Réponse à une question proposée par M. *Steiner.* (Aufgabe 4. t. 31. p. 90.)	IV.	277
	No. 2. Sur un théorème de M. *Schläfli.*	IV.	278
	No. 3. Remarques sur la notation des fonctions algébriques.	IV.	282
	No. 4. Note sur les covariants d'une fonction quadratique, cubique, ou biquadratique à deux indéterminées.	IV.	285
	No. 5. Sur la transformation d'une fonction quadratique en elle même par des substitutions linéaires.	IV.	288
	No. 6. Recherches ultérieures sur les déterminants gauches. (Suite du mémoire t. 32. p. 119 et t. 38. p. 93.)	IV.	299
	No. 7. Recherches sur les Matrices dont les termes sont des fonctions linéaires d'une seule indéterminée.	IV.	313

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
22.	Additions à l'article No. 15 page 239 de ce tome. Par Mr. *Brioschi*, professeur à l'université de Pavie.	IV.	318
24.	Directer Beweis der Gleichheit zweier bestimmter Integrale. Von Herrn Prof. *Heine* zu Bonn.	IV.	323
	2. Geometrie.		
2.	Bemerkungen über einige Formeln der Geodäsie. Von Hrn. Dr. *A. Winckler*, Professor der Geodäsie an der K. K. technischen Lehr-Anstalt zu Brünn. .	I.	32
5.	Note, die Anwendung eines trigonometrischen Satzes betreffend. Von Herrn Dr. *M. Ohm*, Prof. der Math. an der Universität zu Berlin.	I.	79
11.	Bemerkungen über Directrix- und Fufspunctenlinien. Von dem Herrn Dr. *Raabe*, Prof. der Math. an der Universität zu Zürich	III.	189
12.	Discussion über krumme Flächen in Beziehung auf Directrix- und Fufspunctenflächen. Von Demselben.	III.	194
14.	Sur quelques questions de la géométrie de position. Par Mr. *F. Brioschi*, professeur à l'université de Pavie.	III.	233
18.	Eine Eigenschaft des Dreiecks. Von dem Herrn Prof. Dr. *Lehmus* zu Berlin.	III.	266
20.	Ein Satz aus der Theorie der dreiaxigen Coordinatensysteme. Von Herrn Dr. phil. *Dedekind* zu Göttingen.	III.	272
	3. Mechanik.		
4.	Über die Bewegung des Raumpendels, mit Rücksicht auf die Rotation der Erde. Von Herrn *W. Dumas*, Schulamts-Candidaten, früher Mitglied des mathematisch-physikalischen Seminars zu Königsberg in Preufsen. . . .	I.	52
9.	Schlufs dieser Abhandlung.	II.	126
7.	Quelques considérations sur l'équilibre du polygone funiculaire, et sur la chaînette. Par Mr. *Steichen*, professeur à l'école militaire de Bruxelles. .	II.	93
8.	Reduction der Bewegung eines schweren, um einen festen Punct rotirenden Revolutionskörpers auf die elliptischen Transcendenten. Von Herrn Dr. *C. Lottner*, Lehrer der Mathematik und Physik an der höheren Bürgerschule zu Lippstadt.	II.	111
16.	Über die Schwingungen eines frei hangenden biegsamen Fadens. Von Herrn Dr *Minding*, Professor an der Universität zu Dorpat.	III.	243
23.	Note sur le centre de gravité des figures sphériques. Par Mr. *M. Jullien* S. J. à Paris.	IV.	322
	Verzeichnisse des Inhalts und Umfangs der Bände 1 bis 50 dieses Journals. .	IV.	325
	Druckfehler im 2ten Heft 49ten Bandes.	III.	276

1.

Über die Reduction dreifacher Integrale auf Quadraturen.

(Von Dr. *A. Winckler,* Professor der Geodäsie an der K. K. technischen Lehr-Anstalt zu Brünn.)

Das hier Folgende enthält die Entwickelung von Reductionsformeln für ***dreifache Integrale,*** bei welchen die Function unter den Integralzeichen nur durch ihr ***Argument*** näher bestimmt ist, und wobei die untern Grenzen sämmtlich Null, die obern ***willkürliche*** Functionen sind. Es wird dabei nur vorausgesetzt, die obern Grenzen seien von der Beschaffenheit, dafs alle später vorkommenden Gleichungen, welche sich auf die Bestimmung der Grenzen beziehen, innerhalb der in Frage kommenden Intervalle, jedesmal nur eine einzige reelle Wurzel haben und die Betrachtung es nur mit einförmigen, ohne Wechsel entweder wachsenden oder abnehmenden Functionen, oder mit stets auf- oder absteigenden Curvenzweigen zu thun habe.

Es sind dies dieselben Voraussetzungen, welche den Resultaten zu Grunde liegen, die ich im 45ten Bande dieses Journals entwickelt habe. Im Allgemeinen läfst sich bekanntlich jedes dreifache Integral so zerlegen, dafs seine einzelnen Bestandtheile in der That jenen Voraussetzungen entsprechen.

Obgleich nun die folgenden Ergebnisse auch aus den analogen Formeln für ***doppelte*** Integrale gefunden werden können, so führt doch der directe Weg schneller zum Ziele; wobei noch ein Mittel zur Prüfung übrig bleibt. Unter dem gegebenen ***dreifachen Integrale*** stellen wir uns, wie üblich, den Ausdruck einer ***Masse*** vor, welche, in einem durch die Integrations-Grenzen bestimmten Raume enthalten und nur nach gewissen Schichten, deren Lage und Gestalt das Argument der Function angiebt, von ***unveränderlicher Dichtigkeit*** ist.

1.

Bezeichnet t dieses ***Argument,*** d. h. die Verbindung, in welcher die Variabeln x, y, z in der Function unter den Integralzeichen ausschliefslich auftreten, so wird sich der Zusammenhang aller, einem ***constanten*** t entsprechenden Werthe von x, y, z durch eine ***krumme Fläche*** vorstellig machen

lassen, für welche $f(t)$, also die Dichtigkeit der Masse, ***unveränderlich*** bleibt. Läfst man nun t um dt sich ändern, so wird dem Werthe $t+dt$ eine zweite krumme Fläche derselben Art entsprechen, welche mit der erstern eine räumliche Schicht einschliefst, von welcher ein Element als schiefwinkliges Parallelepiped betrachtet wird, dessen auf einander senkrechte Dimensionen dx, dy, $\left(\frac{dz}{dt}\right)dt$ sind, dessen Inhalt also

$$= \left(\frac{dz}{dt}\right)dt\,dx\,dy$$

ist. Der Inhalt dS der bis zu den äufseren Begrenzungen des ganzen Raums sich erstreckenden Schicht wird man durch Integration nach x und y zwischen den gehörigen Grenzen, also aus der Gleichung

$$dS = dt\int dx\int\left(\frac{dz}{dt}\right)dy$$

finden. Integrirt man endlich $f(t)\,dS$ nach t, wodurch man die Summe der in den auf einanderfolgenden Schichten enthaltenen Massen erhält, so ergiebt sich für den Ausdruck der Masse eines Theils des Ganzen:

$$= \int f(t)\,dt\int dx\int\left(\frac{dz}{dt}\right)dy.$$

Die Werthe von x und y, zwischen welchen $f(t)\,dS$ zu integriren ist, um den einer gegebenen Schicht entsprechenden Werth zu finden, müssen aus dem Umfange der Projection jener Schicht (oder vielmehr der krummen Fläche, in welcher sie liegt,) auf die Ebene der xy, abgeleitet werden. Das Nähere hierüber wird sich am besten bei der Behandlung einzelner Fälle zeigen lassen. Wir werden dabei immer beobachten, dafs zuerst ***nach*** y, dann ***nach*** x und schliefslich ***nach*** t integrirt wird.

Offenbar ist es aber im Allgemeinen hinsichtlich des Resultats gleichgültig, ob man die in einer Schicht enthaltene Masse aus deren Projection auf die Ebene der xz, oder yz, oder auf irgend eine andere Fläche, oder, wie oben angenommen, aus der Projection auf xy bestimmt.

Aus dieser Bemerkung ergiebt sich jedoch für doppelte Integrale eine Transformations-Gleichung, welche wohl zu beachten ist, und welche wir daher vor Allem hier anführen wollen.

Man stelle sich nämlich vor, es handle sich um die Bestimmung der Masse einer unendlich dünnen Schicht (Fig. 1.), zwischen zwei aufeinander-

folgenden Flächen enthalten, deren Gleichung:

$$z = \pi(x, y, t)$$

ist, und welche von den Seitenflächen eines Parallelepipeds (ξ, η, ζ) begrenzt wird. Aus der eben angeführten Gleichung leite man

$$x = \psi(y, z, t), \quad y = \varphi(x, z, t)$$

ab, und stelle sich unter $F(x, y, \pi(x, y, t))$ die ***Dichtigkeit der Masse*** im Puncte x, y, z der dem Parameter t entsprechenden Schicht vor, so wird man, der obigen Bemerkung gemäfs, zu den folgenden Gleichungen gelangen:

$$(A.) \quad \int_{\eta}^{\varphi(\xi,\zeta,t)} dy \int_{\xi}^{\psi(y,\zeta,t)} F(x, y, \pi)\left(\frac{d\pi}{dt}\right) dx$$

$$= \int_{\xi}^{\pi(\xi,\eta,t)} dz \int_{\eta}^{\varphi(\xi,z,t)} F(\psi, y, z)\left(\frac{d\psi}{dt}\right) dy$$

$$= \int_{\xi}^{\psi(\eta,\zeta,t)} dx \int_{\xi}^{\pi(x,\eta,t)} F(x, \varphi, z)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right) dz.$$

Im Nachstehenden findet diese Gleichung, wo es sich um die Herstellung *symmetrischer* Formen handelt, mehrfache Anwendung.

Im Verlaufe unserer Betrachtungen ist öfters von der Auflösung gewisser Gleichungen die Rede.

Um Wiederholungen zu vermeiden, sollen durchgehends folgende Bezeichnungen gebraucht werden. Es sei

$$t = F(x, y, z)$$

das gegebene Argument. Vorausgesetzt wird, man habe

$y = \varphi(x, t)$	aus	der	Gleichung	$F[x, y, \theta(x, y)] - t = 0,$
$x = \omega(t)$	-	-	-	$F[x, 0, \theta(x, 0)] - t = 0,$
$x = \lambda(t)$	-	-	-	$F[x, \chi(x), 0] - t = 0,$
$x = \psi(t)$	-	-	-	$F[x, \chi(x), \theta(x, \chi(x))] - t = 0$

abgeleitet, wobei $\chi(x)$ und $\theta(x, y)$ die Grenzfunctionen des vorgelegten dreifachen Integrals, resp. nach y und z bezeichnen. Die geometrische Bedeutung dieser Gleichungen läfst sich ohne weitere Erklärung erkennen.

2.

Es sei nun:

$$\int_0^{\xi} dx \int_0^{\chi(x)} dy \int_0^{\theta(x,y)} f(ax + by + cz)\, dz$$

gegeben. Alsdann ist

$$t = F(x, y, z) = ax + by + cz; \quad \left(\frac{dz}{dt}\right) = \frac{1}{c}$$

und man hat

$$\begin{array}{lll}
y = \varphi(x, t) & \text{aus der Gleichung} & ax + by + c\theta(x, y) - t = 0, \\
x = \omega(t) & \text{- - -} & ax + c\theta(x, 0) - t = 0, \\
x = \lambda(t) & \text{- - -} & ax + b\chi(x) - t = 0, \\
x = \psi(t) & \text{- - -} & ax + b\chi(x) + c\theta(x, \chi(x)) - t = 0
\end{array}$$

zu berechnen.

Für die auf einander folgenden Werthe von t (Fig. 2.) entsteht eine Reihe *paralleler Ebenen,* zwischen welchen die Dichtigkeit jedesmal *constant* ist. Um die Bestandtheile zu bezeichnen, aus welchen sich der Raum am einfachsten zusammensetzen läfst, wollen wir von jenen Ebenen diejenigen hervorheben, welche durch die sechs Puncte

$$\begin{array}{ccc}
\{\xi, \chi(\xi), 0\}, & \{0, 0, 0\}, & \{0, \chi(0), 0\}, \\
\{\xi, 0, \chi(\xi, 0)\}, & \{\xi, \chi(\xi), \theta(\xi, \chi(\xi))\}, & \{0, \chi(0), \theta(0, \chi(0))\}
\end{array}$$

gehen, und durch welche der Raum in *sieben,* einzeln zu berechnende Theile zerlegt wird. Drei derselben sind von der Fläche $z = \theta(x, y)$, die übrigen von *Ebenen* und einer *cylindrischen* Fläche begrenzt.

Zur Abkürzung werde, wie in allen späteren Fällen:

$$\chi(\xi) = \eta, \qquad \chi(0) = \eta',$$

$$\theta(\xi, \chi(\xi)) = \zeta, \quad \theta(0, 0) = \zeta^0, \quad \theta(0, \chi(0)) = \zeta', \quad \theta(\xi, 0) = \zeta''$$

gesetzt. Dann mufs man, um die einzelnen Theile des dreifachen Integrals zu finden, die Integration wie folgt sich erstrecken lassen:

$$\begin{array}{lllllllll}
(1.) & \text{Nach } y, \text{ von } 0 & \text{bis } \frac{t-ax}{b}; & \text{Nach } x, \text{ von } \frac{t}{a} & \text{bis } \xi; & \text{Nach } t, \text{ von } & a\xi & \text{bis } a\xi+b\eta; \\
(2.) & \left\{\begin{array}{l} \text{- - } 0 \text{ - } \frac{t-ax}{b}; \\ \text{- - } 0 \text{ - } \chi(x); \end{array}\right. & & \left.\begin{array}{l} \text{- - } \frac{t}{a} \text{ - } \lambda(t) \\ \text{- - } \lambda(t) \text{ - } \xi \end{array}\right\}; & & \text{- - } & a\xi+b\eta & \text{- } 0; \\
(3.) & \left\{\begin{array}{l} \text{- - } 0 \text{ - } \frac{t-ax}{b}; \\ \text{- - } 0 \text{ - } \chi(x); \end{array}\right. & & \left.\begin{array}{l} \text{- - } 0 \text{ - } \lambda(t) \\ \text{- - } \lambda(t) \text{ - } \xi \end{array}\right\}; & & \text{- - } & 0 & \text{- } b\eta'; \\
(4.) & \text{- - } 0 \text{ - } \chi(x); & & \text{- - } 0 \text{ - } \xi; & & \text{- - } & b\eta' & \text{- } a\xi+c\zeta''; \\
(5.) & \left\{\begin{array}{l} \text{- - } 0 \text{ - } \chi(x); \\ \text{- - } \varphi(x,t) \text{ - } \chi(x); \end{array}\right. & & \left.\begin{array}{l} \text{- - } 0 \text{ - } \omega(t) \\ \text{- - } \omega(t) \text{ - } \xi \end{array}\right\}; & & \text{- - } & a\xi+c\zeta'' & \text{- } a\xi+b\eta+c\zeta; \\
(6.) & \left\{\begin{array}{l} \text{- - } 0 \text{ - } \chi(x); \\ \text{- - } \varphi(x,t) \text{ - } \chi(x); \end{array}\right. & & \left.\begin{array}{l} \text{- - } 0 \text{ - } \omega(t) \\ \text{- - } \omega(t) \text{ - } \psi(t) \end{array}\right\}; & & \text{- - } & a\xi+b\eta+c\zeta & \text{- } b\eta'+c\zeta'; \\
(7.) & \text{- - } 0 \text{ - } \varphi(x,t); & & \text{- - } 0 \text{ - } \omega(t); & & \text{- - } & b\eta'+c\zeta' & \text{- } c\zeta^0;
\end{array}$$

Dieses System von Werthen läfst sich auch leicht in ein kürzeres verwandeln, wenn man es so einrichtet, dafs bei jedem einzelnen Integral die untere Grenze in Bezug auf t = Null wird. Während jedoch das angegebene System nur wirkliche Bestandtheile des dreifachen Integrals enthält, kommen bei dem transformirten Integral fremde Raumtheile in Rechnung, welche sich zwar wieder aufheben, bei welchen aber möglicherweise die Eingangs gemachte Voraussetzung nicht Statt finden könnte. Das transformirte System ist:

Nach γ, von	0	bis	$\frac{t-ax}{b}$;	Nach x, von	ξ	bis	$\frac{t}{a}$;	Nach t, von 0 bis	$a\xi$;		
- -	$\chi(x)$	-	$\frac{t-ax}{b}$;	- -	0	-	$\lambda(t)$;	- -	0	-	$b\eta'$;
- -	0	-	$\varphi(x,t)$;	- -	0	-	$\omega(t)$;	- -	0	-	$c\zeta^0$;
- -	$\frac{t-ax}{b}$	-	$\chi(x)$;	- -	ξ	-	$\lambda(t)$;	- -	0	-	$a\xi+b\eta$;
- -	0	-	$\varphi(x,t)$;	- -	$\omega(t)$	-	ξ;	- -	0	-	$a\xi+c\zeta''$;
- -	$\varphi(x,t)$	-	$\chi(x)$;	- -	0	-	$\psi(t)$;	- -	0	-	$b\eta'+c\zeta'$;
- -	$\varphi(x,t)$	-	$\chi(x)$;	- -	$\psi(t)$	-	ξ;	- -	0	-	$a\xi+b\eta+c\zeta$.

Ähnliche Transformationen lassen sich auch bei den folgenden Grenzsystemen machen; wir werden dieselben nicht besonders anführen.

Die Summe der hierdurch gegebenen Integrale stellt das vorgelegte dreifache Integral dar. Man kann also der Kürze wegen von der Aufstellung der Formel abstehen. Nur zwei besondere Fälle sind ausführlicher zu bemerken.

1°. Es sei $a=0$, $b=0$, $c=1$, also $t=z$. Dann sind die homogenen Schichten-Ebenen parallel mit xy, und es ist

$y=\varphi(x,t)$	durch die	Gleichung	$\theta(x,y)=t$,
$x=\omega(t)$	-	-	-	$\theta(x,0)=t$,
$x=\psi(t)$	-	-	-	$\theta(x,\chi(x))=t$

gegeben. Ermittelt man die Werthe der in der allgemeinen Formel vorkommenden unbestimmten Ausdrücke, so ergiebt sich nach einigen weiteren Verwandlungen die bemerkenswerthe Gleichung

$$\int_0^{\xi} dx \int_0^{\chi(x)} dy \int_0^{\theta(x,y)} f(z)\,dz$$

$$= \int_0^{\theta(0,0)} f(t)\,dt \int_0^{\omega(t)} \varphi(x,t)\,dx + \int_0^{\theta(\xi,0)} f(t)\,dt \int_{\omega(t)}^{\xi} \varphi(x,t)\,dx$$

$$+ \int_0^{\theta(0,\chi(0))} f(t)\,dt \int_0^{\psi(t)} (\chi(x)-\varphi(x,t))\,dx + \int_0^{\theta(\xi,\chi(\xi))} f(t)\,dt \int_{\psi(t)}^{\xi} (\chi(x)-\varphi(x,t))\,dx,$$

welche jedoch schon in den auf andere Art abgeleiteten Resultaten (im 45. Bd. dieses Journals) als specieller Fall enthalten ist.

2°. Setzt man $\chi(x) = \eta$, $\theta(x, y) = \zeta$ ***constant***, so ist

$$\varphi(x,t) = \frac{1}{b}(t - ax - c\zeta); \quad \omega(t) = \frac{t - c\zeta}{a},$$

$$\lambda(t) = \frac{t - b\eta}{a}; \qquad \psi(t) = \frac{1}{a}(t - b\eta - c\zeta),$$

und es findet sich nach einigen leichten Umformungen folgende symmetrische Gleichung:

$$2abc\int_0^{\xi} dx \int_0^{\eta} dy \int_0^{\zeta} f(ax+by+cz)\,dz$$

$$= \int_0^{a\xi} (t - a\xi)^2 f(t)\,dt + \int_0^{b\eta} (t - b\eta)^2 f(t)\,dt + \int_0^{c\zeta} (t - c\zeta)^2 f(t)\,dt$$

$$- \Big\{ \int_0^{a\xi+b\eta} (a\xi + b\eta - t)^2 f(t)\,dt + \int_0^{a\xi+c\zeta} (a\xi + c\zeta - t)^2 f(t)\,dt$$

$$+ \int_0^{b\eta+c\zeta} (b\eta + c\zeta - t)^2 f(t)\,dt \Big\} + \int_0^{a\xi+b\eta+c\zeta} (a\xi + b\eta + c\zeta - t)^2 f(t)\,dt.$$

Für das $n$fache Integral einer Function mit linearem Argument würde man $2^n - 1$ Theil-Integrale erhalten.

3.

Es sei nunmehr t der Quotient zweier linearen Functionen der drei Veränderlichen und zwar

$$t = \frac{ax + by + cz + m}{\alpha x + \beta y + \gamma z + \mu}.$$

Die Schichten von constanter Dichtigkeit sind hier gleichfalls ***Ebenen*** (Fig. 2.); ihre gemeinsame Gleichung ist

$$(\alpha t - a)x + (\beta t - b)y + (\gamma t - c)z + \mu t - m = 0$$

und sie haben eine gemeinschaftliche Durchschnittslinie, deren Gleichungen sich ergeben, wenn man t unbestimmt werden läfst. Diese Gleichungen sind also

$$ax + by + cz + m = 0,$$
$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \mu = 0;$$

woraus sich die Coordinaten der Durchschnittspuncte dieser Geraden und der Coordinaten-Ebenen finden lassen. Um rücksichtlich der Lage dieser Geraden auf einen ganz bestimmten Fall sich beziehen zu können, mögen sämmtliche

Coëfficienten als ***positiv*** betrachtet und es mag aufserdem angenommen werden, dafs

$$\frac{a}{\alpha} > \frac{b}{\beta} > \frac{c}{\gamma} > \frac{m}{\mu}$$

sei. Dann liegt die Durchschnittslinie aller Ebenen unterhalb des positiven Theils der xy Ebene und trifft dieselbe in dem Theile $(+x, -y)$. Ferner entspricht die Ebene, welche durch den Anfangspunct der Coordinaten geht, vermöge der Annahmen über die Coëfficienten, dem kleinsten Werthe von t, welcher in Betracht kommt. Läfst man also von dieser Lage aus die Ebene durch den auf der Seite der positiven Coordinaten liegenden Raum sich bewegen, so nimmt t fortwährend zu.

Dies vorausgesetzt, haben die Grenzen, zwischen welchen die Integration für die einzelnen Theile des Volumens sich zu erstrecken hat, die in dem folgenden Schema angegebenen Werthe:

Nach y, von 0 bis $-\frac{(\alpha t-a)x+\mu t-m}{\beta t-b}$; Nach x, von ξ bis $-\frac{\mu t-m}{\alpha t-a}$;

Nach t, von $\frac{m}{\mu}$ bis $\frac{a\xi+m}{\alpha\xi+\mu}$;

Nach y, von $\chi(x)$ bis $-\frac{(\alpha t-a)x+\mu t-m}{\beta t-b}$; Nach x, von 0 bis $\lambda(t)$;

Nach t, von $\frac{m}{\mu}$ bis $\frac{b\eta'+m}{\beta\eta'+\mu}$;

Nach y, von 0 bis $\varphi(x,t)$; Nach x, von 0 bis $\omega(t)$

Nach t, von $\frac{m}{\mu}$ bis $\frac{c\zeta^0+m}{\gamma\zeta^0+\mu}$;

Nach y, von $-\frac{(\alpha t-a)x+\mu t-m}{\beta t-b}$ bis $\chi(x)$; Nach x, von ξ bis $\lambda(t)$;

Nach t, von $\frac{m}{\mu}$ bis $\frac{a\xi+b\eta+m}{\alpha\xi+\beta\eta+\mu}$;

Nach y, von $\varphi(x,t)$ bis 0; Nach x, von ξ bis $\omega(t)$;

Nach t, von $\frac{m}{\mu}$ bis $\frac{a\xi+c\zeta''+m}{\alpha\xi+\gamma\zeta''+\mu}$;

Nach y, von $\varphi(x,t)$ bis $\chi(x)$; Nach x, von 0 bis $\psi(t)$;

Nach t, von $\frac{m}{\mu}$ bis $\frac{b\eta'+c\zeta'+m}{\beta\eta'+\gamma\zeta'+\mu}$;

Nach y, von $\varphi(x,t)$ bis $\chi(x)$; Nach x, von $\psi(t)$ bis ξ;

Nach t, von $\frac{m}{\mu}$ bis $\frac{a\xi+b\eta+c\zeta+m}{\alpha\xi+\beta\eta+\gamma\zeta+\mu}$.

Noch ist zu bemerken, dafs

$$\left(\frac{dz}{dt}\right) = \frac{(\alpha c - a\gamma)x + (\beta c - b\gamma)y + \mu c - m\gamma}{(\gamma t - c)^2}$$

ist, und dafs dieser Ausdruck für alle in Betracht kommenden Werthe von t stets positiv bleibt. Hiermit ist das dreifache Integral als vollständig gefunden zu betrachten. Der grofsen Weitläuftigkeit wegen, welche die weitere Ausführung haben würde, möge es bei diesen Angaben bewenden. Es ist leicht zu sehen, dafs hierdurch, selbst wenn $\chi(x)$ und $\theta(x, y)$ nicht näher bestimmt sind, das gegebene dreifache Integral durch eine Summe einfacher und doppelter Integrale ausgedrückt wird.

4.

Nur der besondere Fall mag näher erörtert werden, wenn die ***obern*** Grenzen $\chi(x) = \eta$, $\theta(x, y) = \zeta$ ***constant*** sind. Alsdann ist

$$\varphi(x,t) = -\frac{(\alpha t - a)x + (\gamma t - c)\zeta + \mu t - m}{\beta t - b}, \quad \omega(t) = -\frac{(\gamma t - c)\zeta + \mu t - m}{\alpha t - a},$$

$$\lambda(t) = -\frac{(\beta t - b)\eta + \mu t - m}{\alpha t - a}, \qquad \psi(t) = -\frac{(\beta t - b)\eta + (\gamma t - c)\zeta + \mu t - m}{\alpha t - a}.$$

Setzt man der Kürze wegen:

$$\alpha m - a\mu = a_1, \quad \beta m - b\mu = b_1, \quad \gamma m - c\mu = c_1,$$
$$\beta c - b\gamma = \alpha_1, \quad \gamma a - c\alpha = \beta_1, \quad \alpha b - a\beta = \gamma_1,$$

und bemerkt, dafs die Summe der ***sieben*** einzelnen Integrale eine kürzere Form annimmt, wenn man dieselben in ***zwölf*** andere Integrale zerlegt, von welchen drei mit $\frac{m}{\mu}$ und die übrigen in symmetrischer Weise mit den zwischen dem ersten und letzten der im obigen Schema vorkommenden Grenzausdrücke ihren Anfang nehmen, so findet man:

$$1.2.3.\alpha_1\beta_1\gamma_1 \int_0^{\xi} dx \int_0^{\eta} dy \int_0^{\zeta} f\left(\frac{ax+by+cz+m}{\alpha x+\beta y+\gamma z+\mu}\right) dz$$

$$= \alpha_1 a_1^3 \int_{\frac{m}{\mu}}^{\frac{a\xi+m}{\alpha\xi+\mu}} \frac{f(t)\,dt}{(\alpha t-a)^2} + \beta_1 b_1^3 \int_{\frac{m}{\mu}}^{\frac{b\eta+m}{\beta\eta+\mu}} \frac{f(t)\,dt}{(\beta t-b)^2} + \gamma_1 c_1^3 \int_{\frac{m}{\mu}}^{\frac{c\zeta+m}{\gamma\zeta+\mu}} \frac{f(t)\,dt}{(\gamma t-c)^2}$$

$$+ \alpha_1(\beta_1\zeta - a_1)^3 \int_{\frac{c\zeta+m}{\gamma\zeta+\mu}}^{\frac{a\xi+c\zeta+m}{\alpha\xi+\gamma\zeta+\mu}} \frac{f(t)\,dt}{(\alpha t-a)^2} + \beta_1(\gamma_1\xi - b_1)^3 \int_{\frac{a\xi+m}{\alpha\xi+\mu}}^{\frac{a\xi+b\eta+m}{\alpha\xi+\beta\eta+\mu}} \frac{f(t)\,dt}{(\beta t-b)^2}$$

$$+ \gamma_1(\alpha_1\eta - c_1)^3 \int_{\frac{b\eta+m}{\beta\eta+\mu}}^{\frac{b\eta+c\zeta+m}{\beta\eta+\gamma\zeta+\mu}} \frac{f(t)\,dt}{(\gamma t-c)^2}$$

$$-\alpha_1(\gamma_1\eta+a_1)^3\int_{\frac{b\eta+m}{\beta\eta+\mu}}^{\frac{a\xi+b\eta+m}{a\xi+\beta\eta+\mu}}\frac{f(t)\,dt}{(\alpha t-a)^2}-\beta_1(\alpha_1\zeta+b_1)^3\int_{\frac{c\zeta+m}{\gamma\zeta+\mu}}^{\frac{b\eta+c\zeta+m}{\beta\eta+\gamma\zeta+\mu}}\frac{f(t)\,dt}{\beta(t-b)^2}$$

$$-\gamma_1(\beta_1\xi+c_1)^3\int_{\frac{a\xi+m}{a\xi+\mu}}^{\frac{a\xi+c\zeta+m}{a\xi+\gamma\zeta+\mu}}\frac{f(t)\,dt}{(\gamma t-c)^2}$$

$$+\alpha_1(\gamma_1\eta-\beta_1\zeta+a_1)^3\int_{\frac{b\eta+c\zeta+m}{\beta\eta+\gamma\zeta+\mu}}^{\frac{a\xi+b\eta+c\zeta+m}{a\xi+\beta\eta+\gamma\zeta+\mu}}\frac{f(t)\,dt}{(\alpha t-a)^2}+\beta_1(\alpha_1\zeta-\gamma_1\xi+b_1)^3\int_{\frac{a\xi+c\zeta+m}{a\xi+\gamma\zeta+\mu}}^{\frac{a\xi+b\eta+c\zeta+m}{a\xi+\beta\eta+\gamma\zeta+\mu}}\frac{f(t)\,dt}{(\beta t-b)^2}$$

$$+\gamma_1(\beta_1\xi-\alpha_1\eta+c_1)^3\int_{\frac{a\xi+b\eta+m}{a\xi+\beta\eta+\mu}}^{\frac{a\xi+b\eta+c\zeta+m}{a\xi+\beta\eta+\gamma\zeta+\mu}}\frac{f(t)\,dt}{(\gamma t-c)^2}.$$

In dieser, wie man sieht, ganz symmetrischen Formel sind viele specielle Resultate enthalten.

Schliefslich die Bemerkung, dafs sich aus den bisherigen, so wie auch aus den noch folgenden Resultaten, Reductionsformeln für 4, 5, ...-fache Integrale finden lassen, zu deren Ermittelung sich das *geometrische* Verfahren direct nicht mehr benutzen läfst. In dem eben betrachteten Falle z. B. braucht man nur eine weitere Veränderliche s einzuführen, indem man $ms+n$ statt m und $\mu s+\nu$ statt μ setzt, die Gröfse s sich ebenfalls in den Grenzen enthalten vorstellt, so dafs diese nun $\chi(x,s)$, $\theta(x,y,s)$ sind, endlich aber $\pi(s)$ statt ξ setzt. Integrirt man hierauf die für das dreifache Integral gefundene Gleichung weiter nach s, von 0 bis σ, so wird man eine Gleichung für das vierfache Integral

$$\int_0^{\sigma}ds\int_0^{\pi(s)}dx\int_0^{\chi(x,s)}dy\int_0^{\theta(x,y,s)}f\left(\frac{ax+by+cz+ms+n}{\alpha x+\beta y+\gamma z+\mu s+\nu}\right)\cdot dz$$

finden, die durch doppelte und dreifache, nach t, s und nach t, s, x genommene Integrale, ausgedrückt ist. Ähnlich wäre der Weg, um aus den Reductionsformeln für doppelte, diejenigen für dreifache Integrale abzuleiten.

5.

Es sei nun t eine ganze rationale Function zweiten Grades und zwar:

$$t = ax^2+by^2+cz^2+2hxy+2kxz+2lyz+2mx+2ny+2rz.$$

Zur Vereinfachung nehme man an, die drei letzten Glieder dieses Ausdruckes seien dadurch weggeschafft worden, dafs man $x+x_0$, $y+y_0$, $z+z_0$

statt x, y, z gesetzt und dann x_0, y_0, z_0 der Forderung gemäfs bestimmt habe. Dies kann bekanntlich nur in dem einzigen Falle nicht geschehen, wenn x_0, y_0, z_0 ***unendlich*** werden, also der Ausdruck

$$\Delta = al^2 + bk^2 + ch^2 - abc - 2hkl$$

verschwindet. Fände dieser Fall, welcher jedoch ausgeschlossen bleiben mag, Statt, so liefse sich das entsprechende Integral ähnlich wie in den folgenden Fällen behandeln.

Es sei also

$$t = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2hxy + 2kxz + 2lyz,$$

so sind die dieser Gleichung zugehörenden Flächen, je nach Beschaffenheit der Coëfficienten, entweder ***Ellipsoïde*** oder ***Hyperboloïde,*** deren Mittelpuncte mit dem Ursprunge der Coordinaten zusammenfallen.

Zunächst für den ersten Fall mögen die Coëfficienten insgesammt als *positiv* betrachtet werden. Nimmt man aufserdem an, es sei

$$ab > h^2, \quad ac > k^2, \quad bc > l^2,$$

so ist die krumme Fläche (Fig. 3.) das ***dreiaxige Ellipsoïd,*** welches zu den Coordinaten-Ebenen eine solche Lage hat, dafs der zur z, y, x-Axe conjugirte Durchmesser des Hauptschnitts resp. in der xy, zx, yz-Ebene zwischen den Halb-Axen $(+x, -y)$, $(+z, -x)$, $(+y, -z)$ hindurchgeht. Diese Angaben sind zur Bestimmung der Grenzen hinreichend. Das entsprechende dreifache Integral zerfällt auch hier in ***sieben*** einzelne Integrale, welche sich auf ganz ähnliche Weise wie in dem vorigen Falle finden lassen. Auch ist leicht zu bemerken, dafs die Theilung des Raums ganz ähnlich wie im vorigen Falle geschehen kann, weshalb nur noch das System der Grenzwerthe wie folgt anzugeben ist. Es ist zu integriren:

Nach y, von 0 bis $-\frac{hx-\sqrt{(bt+(h^2-ab)x^2)}}{b}$; Nach x, von 0 bis $\sqrt{\frac{t}{a}}$;

Nach t, von 0 bis $a\xi^2$;

Nach y, von 0 bis $-\frac{hx-\sqrt{(bt+(h^2-ab)x^2)}}{b}$; Nach x, von 0 bis ξ;

Nach t, von $a\xi^2$ bis $b\eta'^2$;

$$\left\{\begin{array}{llll} \text{Nach } y, \text{ von } 0 \text{ bis } \chi(x); & & \text{Nach } x, \text{ von } 0 \text{ bis } \lambda(t) \\ - \quad - \quad 0 \quad - \quad -\frac{hx-\sqrt{(bt+(h^2-ab)x^2)}}{b}; & & - \quad - \quad \lambda(t) \quad - \quad \xi \end{array}\right\};$$

Nach t, von $b\eta'^2$ bis $a\xi^2 + b\eta^2 + 2h\xi\eta$;

$$\left.\begin{array}{l}\text{Nach } y, \text{ von } 0 \text{ bis } \chi(x);\\ \text{Nach } t, \text{ von } a\xi^2+b\eta^2+2h\xi\eta \text{ bis } c\zeta^{0^2};\end{array}\right\} \quad \text{Nach } x, \text{ von } 0 \text{ bis } \xi;$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Nach } y, \text{ von } \varphi(x,t) \text{ bis } \chi(x);\\ \text{Nach } t, \text{ von } c\zeta^{0^2} \text{ bis } b\eta'^2+c\zeta'^2+2l\eta'\zeta';\end{array}\right\} \quad \begin{array}{l}\text{Nach } x, \text{ von } 0 \text{ bis } \omega(t)\\ \text{- - } \omega(t) \text{ - } \xi\end{array}\Big\};$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Nach } y, \text{ von } \varphi(x,t) \text{ bis } \chi(x);\\ \text{Nach } t, \text{ von } b\eta'^2+c\zeta'^2+2l\eta'\zeta' \text{ bis } a\xi^2+c\zeta''^2+2k\xi\zeta'';\end{array}\right\} \quad \begin{array}{l}\text{Nach } x, \text{ von } \psi(t) \text{ bis } \omega(t)\\ \text{- - } \omega(t) \text{ - } \xi\end{array}\Big\};$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Nach } y, \text{ von } \varphi(x,t) \text{ bis } \chi(x);\\ \text{Nach } t, \text{ von } a\xi^2+c\zeta''^2+2k\xi\zeta'' \text{ bis } \begin{cases}a\xi^2+b\eta^2+c\zeta^2\\ +2h\xi\eta+2k\xi\zeta+2l\eta\zeta.\end{cases}\end{array}\right\} \quad \text{Nach } x, \text{ von } \psi(t) \text{ bis } \xi;$$

Da ferner:

$$\left(\frac{dz}{dt}\right) = \frac{1}{2\sqrt{(ct-(ac-k^2)x^2-2(hc-kl)xy-(bc-l^2)y^2)}}$$

ist, so folgt

$$dS = \frac{dt}{2\sqrt{(bc-l^2)}}\int\left(\arcsin\frac{(hc-kl)x+(bc-l^2)y}{\sqrt{c}\sqrt{(\Delta x^2+(bc-l^2)t)}}+\text{Const.}\right)dx.$$

Statt der weitern Ausführung möge der specielle Fall betrachtet werden, in welchem die Grenzen des dreifachen Integrals constant und $h=k=l=0$ sind. Dann ist

$$\varphi(x,t)=\sqrt{\left(\frac{t-c\zeta^2-ax^2}{b}\right)}, \qquad \omega(t)=\sqrt{\left(\frac{t-c\zeta^2}{a}\right)},$$
$$\lambda(t)=\sqrt{\left(\frac{t-b\eta^2}{a}\right)}, \qquad \psi(t)=\sqrt{\left(\frac{t-b\eta^2-c\zeta^2}{a}\right)}.$$

Bemerkt man aufserdem, dafs für ein negatives α,

$$\int\arcsin\frac{\gamma}{\sqrt{(\alpha x^2+\beta)}}dx = x\arcsin\frac{\gamma}{\sqrt{(\alpha x^2+\beta)}}+\frac{\gamma}{\sqrt{-\alpha}}\arcsin\frac{x\sqrt{-\alpha}}{\sqrt{(\beta-\gamma^2)}}$$
$$-\sqrt{\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)}\arcsin\frac{\gamma\sqrt{(-\alpha)}-x}{\sqrt{((\beta-\gamma^2)(\alpha x^2+\beta))}}+\text{Const.}$$

ist, und formt die einzelnen sich ergebenden Integrale so um, dafs ein symmetrisches, in allen Theilen reelles Resultat entsteht, so wird sich folgende Gleichung finden:

$$2\sqrt{abc}\int_0^{\xi}dx\int_0^{\eta}dy\int_0^{\zeta}f(ax^2+by^2+cz^2)\,dz$$
$$=\tfrac{1}{2}\pi\left\{\int_{a\xi^2}^{a\xi^2+b\eta^2+c\zeta^2}f(t)(\xi\sqrt{a}-\sqrt{t})\,dt+\int_{b\eta^2}^{a\xi^2+b\eta^2+c\zeta^2}f(t)(\eta\sqrt{b}-\sqrt{t})\,dt\right.$$
$$\left.+\int_{c\zeta^2}^{a\xi^2+b\eta^2+c\zeta^2}f(t)(\zeta\sqrt{c}-\sqrt{t})\,dt+\int_0^{a\xi^2+b\eta^2+c\zeta^2}f(t)\sqrt{t}.dt\right\}$$

$$-\int_{a\xi^2+b\eta^2}^{a\xi^2+b\eta^2+c\zeta^2} f(t)\left\{\xi\sqrt{a}\arccos\frac{\eta\sqrt{b}}{\sqrt{(t-a\xi^2)}}-\sqrt{t}\arccos\frac{\xi\eta\sqrt{ab}}{\sqrt{((t-a\xi^2)(t-b\eta^2))}}\right.$$
$$\left.+\eta\sqrt{b}\arccos\frac{\xi\sqrt{a}}{\sqrt{(t-b\eta^2)}}\right\}dt$$
$$-\int_{a\xi^2+c\zeta^2}^{a\xi^2+b\eta^2+c\zeta^2} f(t)\left\{\zeta\sqrt{c}\arccos\frac{\xi\sqrt{a}}{\sqrt{(t-c\zeta^2)}}-\sqrt{t}\arccos\frac{\xi\zeta\sqrt{ac}}{\sqrt{((t-a\xi^2)(t-c\zeta^2))}}\right.$$
$$\left.+\xi\sqrt{a}\arccos\frac{\zeta\sqrt{c}}{\sqrt{(t-a\xi^2)}}\right\}dt$$
$$-\int_{b\eta^2+c\zeta^2}^{a\xi^2+b\eta^2+c\zeta^2} f(t)\left\{\eta\sqrt{b}\arccos\frac{\zeta\sqrt{c}}{\sqrt{(t-b\eta^2)}}-\sqrt{t}\arccos\frac{\eta\zeta\sqrt{bc}}{\sqrt{((t-b\eta^2)(t-c\zeta^2))}}\right.$$
$$\left.+\zeta\sqrt{c}\arccos\frac{\eta\sqrt{b}}{\sqrt{(t-c\zeta^2)}}\right\}dt.$$

Hieraus ergiebt sich, z. B. wenn $f(t)$ für $t=\infty$ verschwindet, die bekannte Gleichung

$$\int_0^\infty dx\int_0^\infty dy\int_0^\infty f(ax^2+by^2+cz^2)\,dz = \frac{\pi}{4\sqrt{(abc)}}\int_0^\infty f(t).\sqrt{t}.dt.$$

6.

Auch wenn die Coëfficienten a, b, c verschiedene Zeichen haben, bleibt das obige Verfahren anwendbar. Um hier alle Fälle zu umfassen, genügt es, anzunehmen, es sei *einer* dieser Coëfficienten, z. B. a, *negativ* und die beiden andern seien *positiv*. Auch werde h, k, l als *positiv* und l^2-bc als *negativ* angesehen. Dann ist in Folge dieser Annahmen

$$h^2>ab, \quad k^2>ac, \quad l^2<bc$$

und man erhält, während t alle positiven und negativen Werthe durchläuft, alle ein- und zweitheiligen *elliptischen Hyperboloïde*, welche sich an einen *elliptischen Kegel* asymptotisch anschliefsen. Noch ist zu bemerken, dafs, vermöge der obigen Annahmen, die den Axen der y und z conjugirten Durchmesser der resp. in der xy- und xz-Ebene vorkommenden Hyperbeln, so wie der zur z-Axe conjugirte Durchmesser der Ellipsen in der yz-Ebene, nicht in die Räume der positiven Halb-Axen fallen.

Im Allgemeinen zerfällt das dreifache Integral auch hier in *sieben* Bestandtheile. Um *imaginäre* Ausdrücke zu vermeiden, mufs man bei der Aufstellung der Grenzen unterscheiden, ob die Asymptoten der Hyperbeln in der xy- und xz-Ebene die Ordinaten $\chi(\xi)$ und $\theta(\xi,0)$ selbst, oder nur deren Verlängerungen schneiden. Aus dieser Unterscheidung entspringen *vier*

verschiedene Fälle, welche durch die folgenden Ungleichheiten characterisirt werden:

1.	$a\xi^2+b\chi(\xi)^2+2h\xi\chi(\xi)>0$	und	$a\xi^2+c\theta(\xi,0)^2+2k\xi\theta(\xi,0)>0$,
2.	-	<0	-	-	>0,
3.	-	>0	-	-	<0,
4.	-	<0	-	-	<0;

wo das Zeichen $>$ anzeigt, dafs die Asymptote die betreffende Ordinate selbst, das Zeichen $<$, dafs sie blofs deren Verlängerung schneidet.

Von diesen vier Fällen (Fig. 4.) möge z. B. der erste etwas näher betrachtet werden. Die entsprechenden Grenzwerthe sind:

Nach y, von 0 bis $-\frac{hx-\sqrt{(bt+(h^2-ab)x^2)}}{b}$; Nach x, von $\sqrt{\frac{t}{a}}$ bis ξ;

Nach t, von $a\xi^2$ bis 0;

Nach y, von 0 bis $-\frac{hx-\sqrt{(bt+(h^2-ab)x^2)}}{b}$; Nach x, von 0 bis ξ;

Nach t, von 0 bis $a\xi^2+b\eta^2+2k\xi\eta$;

Nach y, von	0	bis	$-\frac{hx-\sqrt{(bt+(h^2-ab)x^2)}}{b}$;	Nach x, von	0	bis	$\lambda(t)$
- -	0	-	$\chi(x)$	- -	$\lambda(t)$	-	ξ

Nach t, von $a\xi^2+b\eta^2+2h\xi\eta$ bis $b\eta'^2$;

Nach y, von 0 bis $\chi(x)$; Nach x, von 0 bis ξ;

Nach t, von $b\eta'^2$ bis $a\xi^2+c\zeta''^2+2k\xi\zeta''$;

Nach y, von	0	bis	$\chi(x)$;	Nach x, von	0	bis	$\omega(t)$
- -	$\varphi(x,t)$	-	$\chi(x)$;	- -	$\omega(t)$	-	ξ

Nach t, von $a\xi^2+c\zeta''^2+2k\xi\zeta''$ bis $a\xi^2+b\eta^2+c\zeta^2+2h\xi\eta+2k\xi\zeta+2l\eta\zeta$;

Nach y, von	0	bis	$\chi(x)$;	Nach x, von	0	bis	$\omega(t)$
- -	$\varphi(x,t)$	-	$\chi(x)$;	- -	$\omega(t)$	-	$\psi(t)$

Nach t, von $a\xi^2+b\eta^2+c\zeta^2+2h\xi\eta+2k\xi\zeta+2l\eta\zeta$ bis $c\zeta^{0^2}$;

Nach y, von $\varphi(x,t)$ bis $\chi(x)$; Nach x, von 0 bis $\psi(t)$;

Nach t, von $c\zeta^{0^2}$ bis $b\eta'^2+c\zeta'^2+2l\eta'\zeta'$.

Eine weitere Ausführung ist auch hier nicht nöthig. Als Beispiel möge jedoch der specielle Fall, in welchem die Grenzen des Integrals *constant* und h, k, l *Null* sind, vollständig erörtert werden.

Man hat

$$dS = \frac{dt}{2\sqrt{bc}}\int\left(\arcsin\frac{\eta\sqrt{b}}{\sqrt{(t-ax^2)}}+\text{Const.}\right)dx,$$

und da für ein positives α

$$\int \arcsin\frac{\gamma}{\sqrt{(\alpha x^2+\beta)}}dx = x\arcsin\frac{\gamma}{\sqrt{(\alpha x^2+\beta)}} + \frac{\gamma}{2\sqrt{\alpha}}\log\left(x\sqrt{\alpha}+\sqrt{(\alpha x^2+\beta-\gamma^2)}\right)^2$$
$$-\tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\log\left(\frac{\sqrt{\beta}.\sqrt{(\alpha x^2+\beta-\gamma^2)}+\gamma\sqrt{\alpha}.x}{\sqrt{\beta}.\sqrt{(\alpha x^2+\beta-\gamma^2)}-\gamma\sqrt{\alpha}.x}\right)^2 + \text{Const.}$$

ist, so wird man mittels der obigen Angaben und nach einigen nahe liegenden Umformungen schliefslich zu folgender Gleichung gelangen:

$$2\sqrt{(-abc)}\int_0^{\xi}dx\int_0^{\eta}dy\int_0^{\zeta}f(ax^2+by^2+cz^2)\,dz$$
$$= \tfrac{1}{2}\pi\left\{\int_0^{a\xi^2}f(t)\sqrt{(-t)}\,dt + \xi\sqrt{(-a)}\int_{a\xi^2}^{a\xi^2+b\eta^2+c\zeta^2}f(t)\,dt\right\}$$
$$-\int_{a\xi^2+b\eta^2}^{a\xi^2+b\eta^2+c\zeta^2}f(t)\left\{\xi\sqrt{-a}\arccos\frac{\eta\sqrt{b}}{\sqrt{(t-a\xi^2)}} - \tfrac{1}{4}\sqrt{t}\log\left(\frac{\sqrt{t}.\sqrt{(t-a\xi^2-b\eta^2)}-\xi\eta\sqrt{(-ab)}}{\sqrt{t}.\sqrt{(t-a\xi^2-b\eta^2)}+\xi\eta\sqrt{(-ab)}}\right)^2\right.$$
$$\left.+\tfrac{1}{4}(\eta\sqrt{b})\log\left(\frac{\sqrt{(t-a\xi^2-b\eta^2)}-\xi\sqrt{-a}}{\sqrt{(t-a\xi^2-b\eta^2)}+\xi\sqrt{-a}}\right)^2\right\}dt$$
$$-\int_{a\xi^2+c\zeta^2}^{a\xi^2+b\eta^2+c\zeta^2}f(t)\left\{\xi\sqrt{-a}\arccos\frac{\zeta\sqrt{c}}{\sqrt{(t-a\xi^2)}} - \tfrac{1}{4}\sqrt{t}\log\left(\frac{\sqrt{t}.\sqrt{(t-a\xi^2-c\zeta^2)}-\xi\zeta\sqrt{(-ac)}}{\sqrt{t}.\sqrt{(t-a\xi^2-c\zeta^2)}+\xi\zeta\sqrt{(-ac)}}\right)^2\right.$$
$$\left.+\tfrac{1}{4}(\zeta\sqrt{c})\log\left(\frac{\sqrt{(t-a\xi^2-c\zeta^2)}-\xi\sqrt{-a}}{\sqrt{(t-a\xi^2-c\zeta^2)}+\xi\sqrt{-a}}\right)^2\right\}dt$$
$$-\int_{b\eta^2+c\zeta^2}^{a\xi^2+b\eta^2+c\zeta^2}f(t)\left\{\tfrac{1}{4}(\eta\sqrt{b})\log\left(\frac{\sqrt{(b\eta^2+c\zeta^2-t)}+\zeta\sqrt{c}}{\sqrt{(b\eta^2+c\zeta^2-t)}-\zeta\sqrt{c}}\right)^2\right.$$
$$\left.-\tfrac{1}{4}\sqrt{t}\log\left(\frac{\sqrt{t}.\sqrt{(b\eta^2+c\zeta^2-t)}+\eta\zeta\sqrt{bc}}{\sqrt{t}.\sqrt{(b\eta^2+c\zeta^2-t)}-\eta\zeta\sqrt{bc}}\right)^2+\tfrac{1}{4}(\zeta\sqrt{c})\log\left(\frac{\sqrt{(b\eta^2+c\zeta^2-t)}+\eta\sqrt{b}}{\sqrt{(b\eta^2+c\zeta^2-t)}-\eta\sqrt{b}}\right)^2\right\}dt.$$

Die Bedingungen, unter welchen diese Formel gilt, sind, gemäfs dem Vorhergehenden, dafs a negativ $a\xi^2+b\eta^2>0$, $a\xi^2+c\zeta^2>0$ sei.

Zu bemerken ist, dafs sich diese Gleichung aus der in (§. 5.) für ein *positives* a gefundenen ableiten läfst, wenn man beachtet, dafs in jener frühern Gleichung alle Bogen, mit Ausnahme des einzigen $\frac{\eta\sqrt{b}}{\sqrt{(t-a\xi^2)}}$, ***imaginär*** werden, theils weil der Cosinus gröfser als 1, theils weil er selbst imaginär wird; dafs ferner, wo $t=b\eta^2$ als Zwischenwerth der Grenzen sich zeigt, der Cosinus unendlich grofs wird und dabei sein Zeichen ändert. Zerlegt man dann die zwei Integrale, bei welchen Dies der Fall ist, mit Rücksicht auf diese Bemerkungen, in zwei andere und verwandelt die imaginären ***Bogen*** in reelle ***Logarithmen,*** thut das Gleiche auch bei dem letzten Gliede der Formel (§. 5.) und dividirt schliefslich die ganze Gleichung mit $\sqrt{-1}$, so wird man die Formel für ein *negatives* a, übereinstimmend mit der obigen, finden.

7.

Wenn in dem Argumente t die Quadrate der Veränderlichen fehlen, also a, b, c Null sind, so werden die eben gefundenen Resultate unbrauchbar und es ist eine directe Bestimmung nöthig.

Es sei also

$$t = axy + bxz + cyz.$$

Die Fläche (Fig. 5.), welcher diese Gleichung angehört, ist, wenn man a, b, c als *positiv* betrachtet, so lange t positiv bleibt, das eintheilige elliptische ***Hyperboloïd,*** welches einer ***Kegelfläche*** asymptotisch sich nähert, deren Spitze im Anfangspuncte der Coordinaten liegt und von welcher die Coordinaten-Axen drei Erzeugungslinien bilden. Wird t *negativ,* so giebt die Gleichung das zweitheilige ***Hyperboloïd,*** welches, innerhalb jenes Kegels liegend, sich demselben ebenfalls asymptotisch anschliefst. Läfst man also t alle positiven und negativen Werthe durchlaufen, so entsteht ein System von Flächen, welche den ganzen unendlichen Raum ausfüllen; wovon jedoch nur Theile der zweitheiligen Hyperboloïde in den hier zu betrachtenden Raum der positiven Coordinaten fallen. Dieselben zerlegen diesen Raum in vier gesondert zu berechnende Theile, deren bezügliche Grenzen sich wie folgt erstrecken:

$$\left.\begin{array}{llllllll} \text{Nach } y, \text{ von } & 0 & \text{bis } \chi(x); & \text{Nach } x, \text{ von } & 0 & \text{bis } & \xi & \\ - \quad - & 0 & - \varphi(x,t); & - \quad - & \omega(t) & - & 0 & \\ - \quad - & \dfrac{t}{ax} & - \chi(x); & - \quad - & \xi & - & \lambda(t) & \end{array}\right\}; \text{ Nach } t, \text{ von } 0 \text{ bis } c\eta'\zeta';$$

$$\left.\begin{array}{llllllll} - \quad - & 0 & - \chi(x); & - \quad - & \psi(t) & - & \xi & \\ - \quad - & 0 & - \varphi(x,t); & - \quad - & \omega(t) & - & \psi(t) & \\ - \quad - & \dfrac{t}{ax} & - \chi(x); & - \quad - & \xi & - & \lambda(t) & \end{array}\right\}; \quad - \quad - \; c\eta'\zeta' - a\xi\eta;$$

$$\left.\begin{array}{llllllll} - \quad - & 0 & - \chi(x); & - \quad - & \psi(t) & - & \xi & \\ - \quad - & 0 & - \varphi(x,t); & - \quad - & \omega(t) & - & \psi(t) & \end{array}\right\}; \quad - \quad - \; a\xi\eta - b\xi\zeta'';$$

$$- \quad - \; \varphi(x,t) - \chi(x); \quad - \quad - \; \psi(t) - \xi; \quad - \quad - \; b\xi\zeta'' - a\xi\eta + b\xi\zeta + c\eta\zeta.$$

Ferner ist:

$$dS = \frac{dt}{c}\int (\log(bx + cy) + \text{Const.})\, dx.$$

Die weitere Ausführung möge z. B. auf den Fall bezogen werden, in welchem die Grenzen des dreifachen Integrals ***constant*** sind. Dann ist:

$$\varphi(x,t) = \frac{t - b\zeta x}{ax + c\zeta}, \qquad \omega(t) = \frac{t}{b\zeta},$$

$$\lambda(t) = \frac{t}{a\eta}, \qquad \psi(t) = \frac{t - c\eta\zeta}{a\eta + b\zeta};$$

ferner, wenn α und β ***positiv*** sind:

$$\int \log\,(\alpha x^2+\beta)\,dx \;=\; x\log(\alpha x^2+\beta)+2\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\operatorname{arc\,tg}\Big(x\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\Big)-2x+\text{Const.}$$

Mittels dieser Angaben erhält man, nach einigen Reductionen, die symmetrische Gleichung

$$\int_0^{\xi}dx\int_0^{\eta}dy\int_0^{\zeta}f(axy+bxz+cyz)\,dz$$

$$=\int_0^{a\xi\eta}f(t)\Big\{\frac{\xi}{c}\log\frac{ab\xi^2+ct}{a\xi(b\xi+c\eta)}+\frac{\eta}{b}\log\frac{ac\eta^2+bt}{a\eta(c\eta+b\xi)}+2\sqrt{\frac{t}{abc}}\operatorname{arc\,tg}\Big(\sqrt{\frac{bc}{at}}\cdot\frac{a\xi\eta-t}{b\xi+c\eta}\Big)\Big\}\,dt$$

$$+\int_0^{b\xi\zeta}f(t)\Big\{\frac{\zeta}{a}\log\frac{bc\zeta^2+at}{b\zeta(c\zeta+a\xi)}+\frac{\xi}{c}\log\frac{ab\xi^2+ct}{b\xi(a\xi+c\zeta)}+2\sqrt{\frac{t}{abc}}\operatorname{arc\,tg}\Big(\sqrt{\frac{ac}{bt}}\cdot\frac{b\xi\zeta-t}{c\zeta+a\xi}\Big)\Big\}\,dt$$

$$+\int_0^{c\eta\zeta}f(t)\Big\{\frac{\eta}{b}\log\frac{ac\eta^2+bt}{c\eta(a\eta+b\zeta)}+\frac{\zeta}{a}\log\frac{bc\zeta^2+at}{c\zeta(b\zeta+a\eta)}+2\sqrt{\frac{t}{abc}}\operatorname{arc\,tg}\Big(\sqrt{\frac{ab}{ct}}\cdot\frac{c\eta\zeta-t}{a\eta+b\zeta}\Big)\Big\}\,dt$$

$$+\int_0^{a\xi\eta+b\xi\zeta+c\eta\zeta}f(t)\Big\{\frac{\xi}{c}\log\frac{(a\xi+c\zeta)(b\xi+c\eta)}{ab\xi^2+ct}+\frac{\eta}{b}\log\frac{(c\eta+b\xi)(a\eta+b\zeta)}{ac\eta^2+bt}+\frac{\zeta}{a}\log\frac{(b\zeta+a\xi)(c\zeta+a\eta)}{bc\zeta^2+at}$$

$$-2\sqrt{\frac{t}{abc}}\Big(\operatorname{arc\,tg}\xi\sqrt{\frac{ab}{ct}}+\operatorname{arc\,tg}\eta\sqrt{\frac{ac}{bt}}+\operatorname{arc\,tg}\zeta\sqrt{\frac{bc}{at}}-\tfrac{1}{2}\pi\Big)\Big\}\,dt.$$

Sind die Grenzen ξ, η, ζ insgesammt unendlich, so heben sich die *logarithmischen* Ausdrücke gegenseitig auf und es bleiben nur die ***Bogengröfsen*** übrig, von welchen jede einzelne sich auf $\frac{1}{2}\pi$ reducirt. Man findet also, wenn $f(t)$ für $t=\infty$ verschwindet:

$$\int_0^{\infty}dx\int_0^{\infty}dy\int_0^{\infty}f(axy+bxz+cyz)\,dz \;=\; \frac{\pi}{\sqrt{abc}}\int_0^{\infty}f(t).\sqrt{t}.dt.$$

Vergleicht man diese Formel mit der am Schlusse von (§. 5.) angeführten, so zeigt sich noch, dafs unter den jetzigen Voraussetzungen

$$\int_0^{\infty}dx\int_0^{\infty}dy\int_0^{\infty}f(axy+bxz+cyz)\,dz=4\int_0^{\infty}dx\int_0^{\infty}dy\int_0^{\infty}f(ax^2+by^2+cz).dz$$

ist. Wie zu verfahren sei, wenn einer der Coëfficienten *a, b, c* ***negativ*** ist, bedarf keiner besondern Auseinandersetzung.

8.

Wenn das Argument t der Quotient zweier Functionen zweiten Grades von x, y, z ist, so entspricht der Gesammtheit aller Werthe von t ein System von Flächen zweiter Ordnung, welche sich, im Allgemeinen, in einer räumlichen Curve *vierter Ordnung* schneiden. Die Gleichungen dieser Curve er-

geben sich, wenn man Zähler und Nenner von t, jeden für sich, gleich Null setzt. Wie leicht zu erachten, ist diese Curve sehr oft ***imaginär*** oder liegt im ***Unendlichen,*** oder hat auch nur eine einzige reelle Projection. Die Untersuchung der solchen Argumenten entsprechenden Integrale ist sehr weitläuftig und die Resultate werden überaus complicirt. Als Beispiele wollen wir die folgenden besondern Fälle näher betrachten.

Es sei

$$t = \frac{ax^2+by^2+cz^2+m}{\alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2+\mu}$$

und darin seien alle Coëfficienten ***positiv*** und aufserdem sei

$$\frac{a}{\alpha} > \frac{b}{\beta} > \frac{c}{\gamma} > \frac{m}{\mu}.$$

Dann stellt die Gleichung:

$$(\alpha t - a)x^2 + (\beta t - b)y^2 + (\gamma t - c)z^2 + \mu t - m = 0,$$

wenn man t (Fig. 6.) von dem Werthe $\frac{m}{\mu}$ an wachsend annimmt, eine Reihe von Flächen dar, welche für $t = \frac{m}{\mu}$ mit dem ***Puncte*** anfängt, in das dreiaxige ***Ellipsoïd*** übergeht, für $t = \frac{c}{\gamma}$ einen zur z-Axe parallelen elliptischen ***Cylinder*** und dann das eintheilige ***Hyperboloïd*** giebt, welches sich für $t = \frac{b}{\beta}$ auf einen zur y-Axe parallelen hyperbolischen Cylinder reducirt. Von hier an geht die Fläche in das zweitheilige ***Hyperboloïd*** über, welches für $t = \frac{a}{\alpha}$ im Unendlichen mit der x-Axe zusammenfällt. Während also t alle Werthe von $\frac{m}{\mu}$ bis $\frac{a}{\alpha}$ durchläuft (und andere können nicht vorkommen), entstehen Flächen, welche den ganzen unendlichen Raum ausfüllen. Die Durchschnittslinie aller dieser Flächen ist, unter den zu Grunde gelegten Annahmen, *imaginär*.

In dem besondern Falle, wenn m und μ Null sind, gehen die Flächen, von welchen oben die Rede war, in ***Kegelflächen*** über, deren Spitze im Anfangspuncte liegt und deren Axe die x-Axe ist. Und zwar reduciren sich dieselben, unter den obigen Voraussetzungen, für $t = \frac{a}{\alpha}$ auf die x-Axe, sind für die folgenden, kleineren Werthe von t ***elliptische Kegel*** und für $t = \frac{b}{\beta}$ zwei sich in der y-Axe schneidende ***Ebenen.*** Für noch kleinere Werthe

von t entstehen ***hyperbolische Kegel,*** welche sich schliefslich für $t = \frac{c}{\gamma}$ auf die z-Axe reduciren.

Dies vorausgesetzt, sind die Grenzwerthe der sechs einzelnen Theile, in welche das entsprechende dreifache Integral zerfällt, wie folgt zu nehmen:

Nach y, von 0 bis $\varphi(x,t)$; Nach x, von 0 bis $\omega(t)$;

Nach t, von $\frac{c}{\gamma}$ bis $\frac{b\eta'^2+c\zeta'^2}{\beta\eta'^2+\gamma\zeta'^2}$;

$\left.\begin{array}{l}\text{Nach } y, \text{ von } 0 \text{ bis } \chi(x); \quad \text{Nach } x, \text{ von } 0 \text{ bis } \psi(t)\\ - \quad - \quad 0 \; - \; \varphi(x,t); \quad - \quad - \quad \psi(t) \; - \; \omega(t)\end{array}\right\}$;

Nach t, von $\frac{b\eta'^2+c\zeta'^2}{\beta\eta'^2+\gamma\zeta'^2}$ bis $\frac{a\xi^2+b\eta^2+c\zeta^2}{\alpha\xi^3+\beta\eta^2+\gamma\zeta^2}$;

$\left.\begin{array}{l}\text{Nach } y, \text{ von } 0 \text{ bis } \chi(x); \quad \text{Nach } x, \text{ von } 0 \text{ bis } \xi\\ - \quad - \quad 0 \; - \; \varphi(x,t); \quad - \quad - \quad \xi \; - \; \omega(t)\end{array}\right\}$

Nach t, von $\frac{a\xi^2+b\eta^2+c\zeta^2}{\alpha\xi^2+\beta\eta^2+\gamma\zeta^2}$ bis $\frac{a\xi^2+c\zeta''^2}{\alpha\xi^2+\gamma\zeta''^2}$;

Nach y, von 0 bis $\chi(x)$; Nach x, von 0 bis ξ;

Nach t, von $\frac{a\xi^2+c\zeta''^2}{\alpha\xi^2+\gamma\zeta''^2}$ bis $\frac{b}{\beta}$;

$\left.\begin{array}{l}\text{Nach } y, \text{ von } 0 \text{ bis } x\sqrt{-\frac{\alpha t-a}{\beta t-b}}; \quad \text{Nach } x, \text{ von } 0 \text{ bis } \lambda(t)\\ - \quad - \quad 0 \; - \; \chi(x); \quad - \quad - \quad \lambda(t) \; - \; \xi\end{array}\right\}$;

Nach t, von $\frac{b}{\beta}$ bis $\frac{a\xi^2+b\eta^2}{\alpha\zeta^2+\beta\eta^2}$;

Nach y, von 0 bis $x\sqrt{-\frac{\alpha t-a}{\beta t-b}}$; Nach x, von 0 bis ξ;

Nach t, von $\frac{a\xi^2+b\eta^2}{\alpha\xi^2+\beta\eta^2}$ bis $\frac{a}{\alpha}$.

Ferner ist:

$$\left(\frac{dz}{dt}\right) = \frac{(\alpha c-a\gamma)x^2+(\beta c-b\gamma)y^2}{2(\gamma t-c)^{\frac{3}{2}}.\sqrt{((a-\alpha t)x^2+(b-\beta t)y^2)}}.$$

Um daraus dS in reeller Form zu finden, mufs man bei der Integration nach y unterscheiden, ob $t <$ oder $> \frac{b}{\beta}$ ist. Im ersten Falle findet man *logarithmische,* im letztern ***Bogen***-Ausdrücke.

9.

Für die eben betrachtete Gleichung:

$$(\alpha t-a)x^2+(\beta t-b)y^2+(\gamma t-c)z^2+\mu t-m = 0$$

wollen wir die Voraussetzungen dahin abändern, dafs nun m und μ ***negativ***

und aufserdem

$$\frac{a}{\alpha} > \frac{m}{\mu} > \frac{b}{\beta} > \frac{c}{\gamma}$$

sein soll. Alsdann existirt in der That eine gemeinschaftliche Durchschnittslinie aller Flächen. Die Gleichungen derselben sind:

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + m = 0,$$
$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + \mu = 0.$$

Wenn man hieraus die Gleichungen zwischen je zwei der Veränderlichen ableitet, so findet sich, dafs die Projection jener räumlichen Curve, auf xy Theile eine ***Ellipse,*** auf xz Theile eine ***Hyperbel*** und auf zy, eine vollständige ***Ellipse*** ist. Diese drei Curven sind zugleich die Leitlinien von Cylinderflächen, deren Axen beziehungsweise die Axen der z, y, x sind.

Wegen des Verlaufes aller, den aufeinander folgenden Werthen von t entsprechenden Flächen genügt die Bemerkung, dafs man für $-\infty < t < \frac{c}{\gamma}$ und für $\frac{a}{\alpha} < t < +\infty$ ***dreiaxige Ellipsoïde;*** für $t = \frac{c}{\gamma}$ den bemerkten zur z-Axe parallelen ***Cylinder;*** für $\frac{c}{\gamma} < t < \frac{b}{\beta}$ eintheilige ***Hyperboloïden*** (deren imaginäre Halb-Axen in der z-Axe liegen) und für $t = \frac{b}{\beta}$ den schon erwähnten, zur y-Axe parallelen ***Cylinder*** erhält; dafs ferner für $\frac{b}{\beta} < t < \frac{m}{\mu}$ zweitheilige nach der x-Axe sich öffnende ***Hyperboloïden;*** für $t = \frac{m}{\mu}$ ein elliptischer ***Kegel*** (dessen Spitze im Anfangspunct liegt); für $\frac{m}{\mu} < t < \frac{a}{\alpha}$ wieder eintheilige ***Hyperboloïden*** (deren imaginäre Halb-Axen in der x-Axe liegen) entstehen; und endlich dafs für $t = \frac{a}{\alpha}$ der bereits genannte, zur x-Axe parallele ***Cylinder*** zum Vorschein kommt.

10.

Ist

$$t = \frac{axy + bxz + cyz}{\alpha xy + \beta xz + \gamma yz},$$

so sind die allen möglichen Werthen von t entsprechenden Flächen insgesammt ***Kegelflächen,*** welche sich in den durch die beiden Gleichungen:

$$axy + bxz + cyz = 0,$$
$$\alpha xy + \beta xz + \gamma yz = 0$$

gegebenen Linien schneiden.

Es ist leicht zu sehen und nicht näher auszuführen nöthig, dafs diese Gleichungen vier gerade Linien (Fig. 7.) darstellen, von welchen drei die Coordinaten-Axen selbst, während die Projections-Gleichungen der vierten

$$(a\beta - \alpha b)x + (a\gamma - \alpha c)y = 0; \quad (b\gamma - \beta c)z + (b\alpha - \beta a)x = 0;$$
$$(c\alpha - \gamma a)y + (c\beta - \gamma b)z = 0$$

sind. Ferner sieht man aus der Gleichung der Flächen:

$$(\alpha t - a)xy + (\beta t - b)xz + (\gamma t - c)yz = 0,$$

dafs sich dieselben für $t = \frac{a}{\alpha}, \frac{b}{\beta}, \frac{c}{\gamma}$ jedesmal auf *zwei Ebenen* reduciren, wovon eine durch jene vierte Gerade und beziehungsweise durch die z, y, x-Axe geht und die andern mit der xy, xz, yz-Ebene zusammenfällt. Die krummen Flächen reduciren sich also sechsmal auf *Ebenen* und stellen die Gesammtheit aller *Kegelflächen* zweiter Ordnung dar, welche durch vier, im Anfangspuncte sich schneidende gerade Linien gehen. Die ausführliche Aufstellung der Resultate findet jedoch hier nicht Raum.

Aufser den bisher für t angenommenen Ausdrücken lassen sich noch beliebig viele andere irrationale und transcendente bezeichnen, für welche sich die Reduction des Integrals allgemein darstellen läfst und auf welche das bisherige Verfahren anwendbar bleibt. Hier möge nur des Falles Erwähnung geschehen, in welchem

$$t = ae^{\alpha x} + be^{\beta y} + ce^{\gamma z}$$

ist. Die dieser Gleichung angehörige transcendente Fläche kehrt, wenn alle Coëfficienten positiv sind, ihre geschlossene Seite dem Raume der positiven Halb-Axe zu und geht für $t = a + b + c$ durch den Anfangspunct. Für kleinere Werthe von t liegt kein Punct der Fläche mehr in jenem Raume.

Die Aufstellung des Systems der Grenzwerthe und der Reductionsformel hat keine Schwierigkeit. Nimmt man z. B. an, die obern Grenzen des dreifachen Integrals seien insgesammt unendlich, so erhält man nur ein einziges Integral, welches wie folgt zu nehmen ist:

Nach y, von 0 bis $\frac{1}{\beta}\log\frac{t - ae^{\alpha x} - c}{b}$; Nach x, von 0 bis $\frac{1}{\alpha}\log\frac{t - b - c}{a}$;

Nach t, von $a + b + c$ bis ∞.

Da ferner

$$\left(\frac{dz}{dt}\right) = \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{1}{t - ae^{\alpha x} - be^{\beta y}}$$

ist, so geht das dreifache Integral in

$$\frac{1}{\beta\gamma}\int_{a+b+c}^{\infty} f(t)\,dt \int_{0}^{\frac{1}{\alpha}\log\frac{t-b-c}{a}} \frac{dx}{t-ae^{\alpha x}} \log\frac{(t-ae^{\alpha x}-b)(t-ae^{\alpha x}-c)}{bc}$$

über, oder man erhält nach einiger Transformation, und wenn man dann auch die Integrationsfolge ändert:

$$\int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} dy \int_0^{\infty} f(ae^{\alpha x}+be^{\beta y}+ce^{\gamma z})\,dz$$

$$= \frac{1}{\alpha\beta\gamma}\int_{a+b+c}^{\infty} f(t)\,dt \int_{a+b+c}^{t} \frac{dz}{(z-a)(t+a-z)} \log\frac{(z-a-b)(z-a-c)}{bc}$$

$$= \frac{1}{\alpha\beta\gamma}\int_0^{\infty} \frac{dz}{a+c+z} \log\frac{(a+z)(c+z)}{ac} \int_0^{\infty} f(a+b+c+t+z)\frac{dt}{b+t}.$$

Dafs die Integrale rechts, wie nach α, β, γ, so auch nach a, b, c symmetrische Functionen sein müssen, versteht sich, geht übrigens auch aus den Gleichungen (*A.* §. 1.) hervor, wenn man sie auf das durch die oben angegebenen Grenzen (nach y und x) bestimmte Doppel-Integral anwendet. Diese Symmetrie läfst sich übrigens auf ähnliche Weise darstellen, wie z. B. diejenige des einfachen Integrals

$$\int_{a+b}^{t} \frac{dz}{(z-a)(t+a-z)},$$

ohne dafs die Ausführung der Integration nöthig wäre.

11.

Aus den oben angeführten Reductionsformeln unseres dreifachen Integrals mögen noch die folgenden speciellen Resultate abgeleitet werden.

Es sei $a=b=c$, $\alpha=\beta=\gamma$ und $f(t)=e^{-t}$, so ergiebt sich, mit Rücksicht auf die bekannten Formeln,

$$\mathrm{li}(e^{-ck}) = \int_0^{e^{-ck}} \frac{dx}{\log x} = -\int_1^{\infty} e^{-ckx}\frac{dx}{x} = -e^{-ck}\int_0^{\infty} e^{-ck}\frac{dx}{x+c},$$

die sehr bemerkenswerthe Gleichung

$$\int_0^{\infty} e^{-z}\log\frac{(z+a)(z+b)}{ab}\cdot\frac{dz}{z+a+b} = e^{a+b}.\mathrm{li}(e^{-a})\,\mathrm{li}(e^{-b}),$$

welche sich jedoch auch durch ein anderes Verfahren erlangen läfst. Setzt man hierin ak, bk, kz statt a, b, z und reducirt, so erhält man weiter:

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-kz}dz}{z+a+b}\log(z+a)(z+b) = e^{(a+b)k}\{\mathrm{li}(e^{-ak}\,\mathrm{li}(e^{-bk}) - \log ab\,.\,\mathrm{li}(e^{-(a+b)k})\}.$$

Durch theilweises Integriren und mit Berücksichtigung der Gleichung

$$\int_0^\infty e^{-kx}\log(x+c)\,dx = \frac{1}{k}(\log c - e^{ck}\,\mathrm{li}(e^{-ck}))$$

ergiebt sich hieraus noch folgendes Resultat:

$$\int_0^\infty e^{-kz}\Big(\frac{1}{z+a}+\frac{1}{z+b}\Big)\log(z+a+b)\,dz$$

$$=(1+\log a\log b)\log(a+b) - e^{-(a+b)k}\{\mathrm{li}(e^{-ak})\,\mathrm{li}(e^{-bk}) + (1-\log ab)\,\mathrm{li}(e^{-(a+b)k})\}.$$

U. s. f.

12.

Fügt man dem $f(t)$ noch eine vollständig gegebene Function von x, y, z als Factor bei, so erleiden die Grenzen, welche, wie man weifs, aus der Beschaffenheit des Arguments t ihre Bestimmung erhalten, keinerlei Änderung, während jedoch die betreffenden Reductionsformeln eine beträchtliche Verallgemeinerung erfahren. Da das Verfahren dasselbe bleibt, wie bisher, so möge nur der Fall berührt werden, welcher sich auf die lineare Form des Arguments (§. 2.) bezieht und wo der Einfachheit wegen angenommen werden mag, die Grenzen des dreifachen Integrals seien insgesammt ***constant***. Die entsprechende Gleichung kann entweder durch Umgestaltung der in (§. 2.) gegebenen Grenzen, oder, was noch bequemer ist, mit Rücksicht auf die in (§. 1.) angeführte Transformations-Gleichung (*A*.), unmittelbar aus der (Fig. 8.) abgelesen werden, wo der Raum so abgetheilt ist, dafs das Resultat sogleich in seiner symmetrischen Form sich zeigt.

Bei den vorliegenden Betrachtungen besteht überhaupt ein wesentlicher Nutzen der geometrischen Repräsentation darin, dafs sich sogleich aus der Figur abnehmen läfst, welches die einfachste und eleganteste Darstellung des entsprechenden Integrals sei. Insbesondere entspricht einer ***symmetrischen*** Figur immer auch ein ***symmetrischer*** analytischer Ausdruck. Setzt man zur Abkürzung:

$$F\Big(x, y, \frac{t-ax-by}{c}\Big) = \mathrm{F}(x, y); \quad F\Big(x, \frac{t-ax-cz}{b}, z\Big) = \mathrm{F}(x, z);$$

$$F\Big(\frac{t-by-cz}{a}, y, z\Big) = \mathrm{F}(y, z),$$

so ergiebt sich

$$\int_0^\xi dx \int_0^\eta dy \int_0^\zeta f(ax+by+cz).F(x, y, z)\,dz$$

$$= \frac{1}{c}\int_0^{a\xi} f(t)\,dt \int_0^{\frac{t-a\xi}{b}} dy \int_{\xi}^{\frac{t-by}{a}} F(x,y)\,dx + \frac{1}{a}\int_0^{b\eta} f(t)\,dt \int_0^{\frac{t-b\eta}{c}} dz \int_{\eta}^{\frac{t-cz}{b}} F(y,z)\,dy$$

$$+ \frac{1}{b}\int_0^{c\zeta} f(t)\,dt \int_0^{\frac{t-c\zeta}{a}} dx \int_{\zeta}^{\frac{t-ax}{c}} F(x,z)\,dz$$

$$- \frac{1}{c}\int_0^{a\xi+b\eta} f(t)\,dt \int_{\eta}^{\frac{t-a\xi}{b}} dy \int_{\xi}^{\frac{t-by}{a}} F(x,y)\,dx$$

$$- \frac{1}{a}\int_0^{b\eta+c\zeta} f(t)\,dt \int_{\zeta}^{\frac{t-b\eta}{c}} dz \int_{\eta}^{\frac{t-cz}{b}} F(y,z)\,dy$$

$$- \frac{1}{b}\int_0^{a\xi+c\zeta} f(t)\,dt \int_{\xi}^{\frac{t-c\zeta}{a}} dx \int_{\zeta}^{\frac{t-ax}{c}} F(x,z)\,dz$$

$$+ \frac{1}{c}\int_0^{a\xi+b\eta+c\zeta} f(t)\,dt \int_{\eta}^{\frac{t-a\xi-c\zeta}{b}} dy \int_{\zeta}^{\frac{t-by-c\zeta}{a}} F(x,y)\,dx.$$

Das letzte Glied hat hier keine symmetrische Form, aber es wäre leicht, demselben mittels der Gleichung (*A.* des §. 1.) eine solche Form zu geben; wobei es jedoch durch *drei* dem Werthe nach gleiche Integrale ausgedrückt werden würde.

13.

Als Beispiel für diese Formel wollen wir

$$F(x,y,z) = e^{\alpha x+\beta y+\gamma z}$$

setzen. Führt man die Integrationen aus und setzt zur Abkürzung:

$$\beta c - b\gamma = a_1, \quad \gamma a - c\alpha = b_1, \quad \alpha b - a\beta = c_1,$$

so wird sich folgende Formel finden:

$$\int_0^{\xi} dx \int_0^{\eta} dy \int_0^{\zeta} f(ax+by+cz)\,.\,e^{\alpha x+\beta y+\gamma z}\,dz =$$

$$- \frac{1}{a_1 b_1 c_1}\left\{aa_1\int_0^{a\xi} f(t)\,e^{\frac{\alpha}{a}t}\,dt + bb_1\int_0^{b\eta} f(t)\,e^{\frac{\beta}{b}t}\,dt + cc_1\int_0^{c\zeta} f(t)\,e^{\frac{\gamma}{c}t}\,dt\right\}$$

$$+ \frac{a}{b_1 c_1}\left\{\int_{b\eta}^{a\xi+b\eta} f(t)\,e^{\frac{\alpha t-c_1\eta}{a}}\,dt - \int_{b\eta+c\zeta}^{a\xi+b\eta+c\zeta} f(t)\,e^{\frac{\alpha t-c_1\eta+b_1\zeta}{a}}\,dt + \int_{c\zeta}^{a\xi+c\zeta} f(t)\,e^{\frac{\alpha t+b_1\zeta}{a}}\,dt\right\}$$

$$+ \frac{b}{c_1 a_1}\left\{\int_{c\zeta}^{b\eta+c\zeta} f(t)\,e^{\frac{\beta t-a_1\zeta}{b}}\,dt - \int_{a\xi+c\zeta}^{a\xi+b\eta+c\zeta} f(t)\,e^{\frac{\beta t-a_1\zeta+c_1\xi}{b}}\,dt + \int_{a\xi}^{a\xi+b\eta} f(t)\,e^{\frac{\beta t+c_1\xi}{b}}\,dt\right\}$$

$$+ \frac{c}{a_1 b_1}\left\{\int_{a\xi}^{a\xi+c\zeta} f(t)\,e^{\frac{\gamma t-b_1\xi}{c}}\,dt - \int_{a\xi+b\eta}^{a\xi+b\eta+c\zeta} f(t)\,e^{\frac{\gamma t-b_1\xi+a_1\eta}{c}}\,dt + \int_{b\eta}^{b\eta+c\zeta} f(t)\,e^{\frac{\gamma t+a_1\eta}{c}}\,dt\right\}.$$

Es sei hierin $\xi = \eta = \zeta = \infty$, so folgt:

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty dy \int_0^\infty f(ax+by+cz)\, e^{\alpha x+\beta y+\gamma z}\, dz$$

$$= \frac{a}{(\alpha b-a\beta)(\alpha c-a\gamma)} \int_0^\infty f(t)\, e^{\frac{a}{\alpha}t}\, dt + \frac{b}{(\beta a-b\alpha)(\beta c-b\gamma)} \int_0^\infty f(t)\, e^{\frac{\beta}{b}t}\, dt$$

$$+ \frac{c}{(\gamma a-c\alpha)(\gamma b-c\beta)} \int_0^\infty f(t)\, e^{\frac{\gamma}{c}t}\, dt.$$

Ändert man die Zeichen von α, β, γ und sieht dann die Coëfficienten als *positiv* an; setzt ferner

$$f(t) = \frac{1}{t+m}$$

und bemerkt, dafs sich dann die drei Bestandtheile der Formel durch *Integral-Logarithmen* ausdrücken lassen, so ergiebt sich:

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty dy \int_0^\infty \frac{e^{-(\alpha x+\beta y+\gamma z)}}{ax+by+cz+m}\, dz$$

$$= -\left\{ \frac{a e^{\frac{a}{a}m} \operatorname{li}\left(e^{-\frac{\alpha}{a}m}\right)}{(\alpha b-a\beta)(\alpha c-a\gamma)} + \frac{b e^{\frac{\beta}{b}m} \operatorname{li}\left(e^{-\frac{\beta}{b}m}\right)}{(\beta a-b\alpha)(\beta c-b\gamma)} + \frac{c e^{\frac{\gamma}{c}m} \operatorname{li}\left(e^{-\frac{\gamma}{c}m}\right)}{(\gamma a-c\alpha)(\gamma b-c\beta)} \right\}.$$

Für ein zweites Beispiel sei:

$$f(t) = t^n.$$

Erwägt man, dafs, wenn wieder α, β, γ *negativ* angenommen werden, die drei Integrale der allgemeinen Formel sich auf

$$\int_0^\infty t^n e^{-t}\, dt = \Gamma(n+1)$$

reduciren lassen, so wird sich alsbald die folgende Formel finden:

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty dy \int_0^\infty (ax+by+cz)^n\, e^{-(\alpha x+\beta y+\gamma z)}\, dz$$

$$\Gamma_{(n+1)} \left\{ \frac{\alpha}{(\alpha b-a\beta)(\alpha c-a\gamma)} \left(\frac{a}{\alpha}\right)^{n+2} + \frac{\beta}{(\beta a-b\alpha)(\beta c-b\gamma)} \left(\frac{b}{\beta}\right)^{n+2} + \frac{\gamma}{(\gamma a-c\alpha)(\gamma b-c\beta)} \left(\frac{c}{\gamma}\right)^{n+2} \right\}.$$

Endlich setze man noch:

$$f(t) = \log(t+m)$$

und nehme wieder an, es seien α, β, γ *negativ*. Dann findet sich die

Gleichung:

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty dy \int_0^\infty e^{-(\alpha x+\beta y+\gamma z)} \log(ax+by+cz+m)\,dz = \frac{\log m}{\alpha\beta\gamma}$$

$$-\left\{\frac{\alpha e^{\frac{\alpha}{a}m}\,\mathrm{li}\left(e^{-\frac{\alpha}{a}m}\right)}{(\alpha b-a\beta)(\alpha c-a\gamma)}\left(\frac{a}{\alpha}\right)^2+\frac{\beta e^{\frac{\beta}{b}m}\,\mathrm{li}\left(e^{-\frac{\beta}{b}m}\right)}{(\beta a-b\alpha)(\beta c-b\gamma)}\left(\frac{b}{\beta}\right)^2+\frac{\gamma e^{\frac{\gamma}{c}m}\,\mathrm{li}\left(e^{-\frac{\gamma}{c}m}\right)}{(\gamma b-c\beta)(\gamma a-c\alpha)}\left(\frac{c}{\gamma}\right)^2\right\}.$$

U. s. w.

14.

In der allgemeinen Formel (§. 12.) werde ferner

$$F(x,y,z) = \frac{1}{(\alpha x+\beta y+\gamma z+\mu)^n}$$

gesetzt. Dann ist, wenn a_1, b_1, c_1 dieselbe Bedeutung wie oben behalten:

$$(n-1)(n-2)\int_0^\xi dx \int_0^\eta dy \int_0^\zeta \frac{f(ax+by+cz)}{(\alpha x+\beta y+\gamma z+\mu)^n}\,dz$$

$$= -\left\{\frac{a^{n-1}}{b_1c_1}\int_0^{a\xi}\frac{f(t)\,dt}{(\alpha t+a\mu)^{n-2}}+\frac{b^{n-1}}{c_1a_1}\int_0^{b\eta}\frac{f(t)\,dt}{(\beta t+b\mu)^{n-2}}+\frac{c^{n-1}}{a_1b_1}\int_0^{c\zeta}\frac{f(t)\,dt}{(\gamma t+c\mu)^{n-2}}\right\}$$

$$+\frac{a^{n-1}}{b_1c_1}\left\{\int_{b\eta}^{a\xi+b\eta}\frac{f(t)\,dt}{(\alpha t+a\mu-c_1\eta)^{n-2}}-\int_{b\eta+c\zeta}^{a\xi+b\eta+c\zeta}\frac{f(t)\,dt}{(\alpha t+a\mu-c_1\eta+b_1\zeta)^{n-2}}+\int_{c\zeta}^{a\xi+c\zeta}\frac{f(t)\,dt}{(\alpha t+a\mu+b_1\zeta)^{n-2}}\right\}$$

$$+\frac{b^{n-1}}{c_1a_1}\left\{\int_{c\zeta}^{b\eta+c\zeta}\frac{f(t)\,dt}{(\beta t+b\mu-a_1\zeta)^{n-2}}-\int_{a\xi+c\zeta}^{a\xi+b\eta+c\zeta}\frac{f(t)\,dt}{(\beta t+b\mu-a_1\zeta+c_1\xi)^{n-2}}+\int_{a\xi}^{a\xi+b\eta}\frac{f(t)\,dt}{(\beta t+b\mu+c_1\xi)^{n-2}}\right\}$$

$$+\frac{c^{n-1}}{a_1b_1}\left\{\int_{a\xi}^{a\xi+c\zeta}\frac{f(t)\,dt}{(\gamma t+c\mu-b_1\xi)^{n-2}}-\int_{a\xi+b\eta}^{a\xi+b\eta+c\zeta}\frac{f(t)\,dt}{(\gamma t+c\mu-b_1\xi+a_1\eta)^{n-2}}+\int_{b\eta}^{b\eta+c\zeta}\frac{f(t)\,dt}{(\gamma t+c\mu+a_1\eta)^{n-2}}\right\}.$$

Ist hier $\xi=\eta=\zeta=\infty$, so erhält man:

$$(n-1)(n-2)\int_0^\infty dx \int_0^\infty dy \int_0^\infty \frac{f(ax+by+cz)}{(\alpha x+\beta y+\gamma z+\mu)^n}\,dz$$

$$= \frac{a^{n-1}}{(\alpha b-a\beta)(\alpha c-a\gamma)}\int_0^\infty\frac{f(t)\,dt}{(\alpha t+a\mu)^{n-2}}+\frac{b^{n-1}}{(\beta a-b\alpha)(\beta c-b\gamma)}\int_0^\infty\frac{f(t)\,dt}{(\beta t+b\mu)^{n-2}}$$

$$+\frac{c^{n-1}}{(\gamma a-c\alpha)(\gamma b-c\beta)}\int_0^\infty\frac{f(t)\,dt}{(\gamma t+c\mu)^{n-2}}.$$

Für die Werthe 1 und 2 von n werden diese Formeln unbrauchbar und die Reduction mufs auf directe Weise geschehen.

Setzt man in der letztern Gleichung

$$f(t) = t^m$$

und beachtet, dafs

$$\int_0^\infty \frac{t^m\,dt}{(pt+q)^{n-2}} = \frac{1}{p^{m+1}q^{n-m-3}}\cdot\frac{\Gamma(m+1)\Gamma(n-m-3)}{\Gamma(n-2)}$$

ist, so zeigt sich vor Allem, dafs das dreifache Integral einen endlichen Werth hat, wenn

$$n>2 \quad \text{und} \quad m<n-3$$

ist, und man findet unter dieser Voraussetzung folgendes Resultat:

$$\int_0^\infty dx\int_0^\infty dy\int_0^\infty \frac{(ax+by+cz)^m}{(\alpha x+\beta y+\gamma z+\mu)^n}\,dz$$

$$= \frac{1}{\mu^{n-m-3}}\,\frac{\Gamma(m+1)\Gamma(n-m-3)}{(n-1)(n-2)\Gamma(n-2)}\left\{\frac{\alpha}{(\alpha b-a\beta)(\alpha c-a\gamma)}\cdot\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{m+2}\right.$$
$$\left.+\frac{\beta}{(\beta a-b\alpha)(\beta c-b\gamma)}\cdot\left(\frac{b}{\beta}\right)^{m+2}+\frac{\gamma}{(\gamma a-c\alpha)(\gamma b-c\beta)}\cdot\left(\frac{c}{\gamma}\right)^{m+2}\right\}.$$

Das analoge Resultat für das doppelte Integral ist:

$$\int_0^\infty dx\int_0^\infty \frac{(ax+by)^m}{(\alpha x+\beta y+\mu)^n}\,dy$$

$$= \frac{1}{\mu^{n-m-2}}\,\frac{\Gamma(m+1)\Gamma(n-m-2)}{(n-1)\Gamma(n-1)}\left\{\frac{1}{a\beta-\alpha b}\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{m+1}+\frac{1}{b\alpha-\beta a}\left(\frac{b}{\beta}\right)^{m+1}\right\}.$$

Endlich werde noch angenommen, es sei:

$$f(t) = e^{-t}.$$

Unsere Formel liefert dann wieder drei einfache Integrale für das entsprechende dreifache Integral. Da aber nach einer allgemeinen Formel von *Cauchy*

$$\int_0^\infty dx\int_0^\infty dy\int_0^\infty \frac{e^{-(ax+by+cz)}}{(\alpha x+\beta y+\gamma z+\mu)^n}\,dz = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^\infty \frac{t^{n-1}e^{-\mu t}\,dt}{(\alpha t+a)(\beta t+b)(\gamma t+c)}$$

ist, so ergiebt sich, durch Vergleichung beider Resultate und nach einigen Umformungen der resultirenden Gleichung, folgende bemerkenswerthe Relation:

$$\int_0^\infty \frac{z^n e^{-kz}\,dz}{(\alpha z+a)(\beta z+b)(\gamma z+c)} = \frac{\Gamma(n+1)}{n(n-1)k^{n-2}}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{a^n}{(\alpha b-a\beta)(\alpha c-a\gamma)}\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-kz}\,dz}{(\alpha z+a)^{n-1}}\\ +\dfrac{b^n}{(\beta a-b\alpha)(\beta c-b\gamma)}\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-kz}\,dz}{(\beta z+b)^{n-1}}\\ +\dfrac{c^n}{(\gamma a-c\alpha)(\gamma b-c\beta)}\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-kz}\,dz}{(\gamma z+c)^{n-1}}\end{array}\right\},$$

mittels welcher sich das Integral links, wenn n eine positive ganze Zahl ist,

insofern finden läfst, als

$$\int_0^\infty \frac{e^{-kz}dz}{(\alpha z+a)^{n-1}} \text{ etc.}$$

durch partielle Integration auf Integral-Logarithmen zurückgeführt werden können.

15.

Eben so leicht wie in den bisherigen Fällen werden sich auch die Reductionsformeln herstellen lassen, wenn für $F(x, y, z)$ einer der Ausdrücke

$$\cos(lx+\lambda)\cos(my+\mu)\cos(nz+\nu), \quad \log(lx+\lambda)\log(my+\mu)\log(nz+\nu),$$
$$\cos(\alpha x+\beta y+\gamma z+\mu), \quad \ldots\ldots$$

gesetzt wird. Es finden sich dadurch jedesmal neue Resultate.

Sind die Grenzen des dreifachen Integrals unendlich, so lassen sich, den früheren Erörterungen zufolge, leicht allgemeine Gleichungen aufstellen, welche die meisten der bisherigen Ergebnisse als specielle Fälle enthalten.

So erhält man z. B., mit Berücksichtigung der Gleichung (*A.* §. 1.), sogleich:

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty dy \int_0^\infty f(ax+by+cz)F(x, y, z)\,dz$$

$$= \frac{1}{c}\int_0^\infty f(t)\,dt \int_0^{\frac{t}{b}} dy \int_0^{\frac{t-by}{a}} \mathrm{F}(x, y)\,dx = \frac{1}{a}\int_0^\infty f(t)\,dt \int_0^{\frac{t}{c}} dz \int_0^{\frac{t-cz}{b}} \mathrm{F}(y, z)\,dy$$

$$= \frac{1}{b}\int_0^\infty f(t)\,dt \int_0^{\frac{t}{a}} dx \int_0^{\frac{t-ax}{c}} \mathrm{F}(x, z)\,dz.$$

Ferner ist, wenn man

$$F\left(x, y, \frac{1}{c}\sqrt{(t-ax^2-by^2)}\right) = \mathrm{F}(x, y) \text{ etc.}$$

setzt:

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty dy \int_0^\infty f(ax^2+by^2+cz^2)F(x, y, z)\,dz$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{c}}\int_0^\infty f(t)\,dt \int_0^{\sqrt{\frac{t}{b}}} dy \int_0^{\sqrt{\frac{t-by^2}{a}}} \frac{\mathrm{F}(x, y)\,dx}{\sqrt{(t-ax^2-by^2)}} = \text{etc.}$$

Es wäre leicht, den hierbei zu Grunde liegenden Satz allgemein zu formuliren. Nur müssen, wie sich versteht, die Functionen f und F oder, im Allgemeinen wenigstens, ihr Product ins Unendliche abnehmen, wenn die

Veränderlichen ohne Ende wachsen. Ähnliche Formeln erhält man auch für doppelte Integrale.

16.

So viel mir bekannt, hat man sich mit der Reduction dreifacher Integrale, bei welchen die Function von *zwei* getrennten Argumenten abhangt, bis jetzt nicht beschäftigt. Die Reduction ist in sehr vielen Fällen ebenfalls durch ein geometrisches Verfahren ausführbar und die Resultate übertreffen alle bisherigen an Allgemeinheit. Um den Gang in Kürze zu bezeichnen, seien t und τ die zwei gegebenen Ausdrücke in x, y, z, von welchen die Function abhangt. Da sich für jeden Werth von t und τ unendlich viele Werthe von x, y, z angeben lassen, so lassen sich t und τ als die Parameter zweier krummen Oberflächen betrachten, deren Durchschnitt im Allgemeinen eine Curve von doppelter Krümmung ist. Ändern sich nun jene Gröfsen um dt und $d\tau$, so entstehen zwei weitere Flächen, welche mit den beiden früheren ein Element des Raums von unendlich kleinem Querschnitte einschliefsen, welches man, um seine Gestalt zu bezeichnen, etwa ein ***gewundenes Prisma*** nennen könnte. Schneidet man dasselbe durch eine mit xy parallele Ebene, so ist der Schnitt ein kleines ***Parallelogramm,*** welches sich in seiner natürlichen Gestalt auf xy projicirt und welches, mit dz multiplicirt, das Volumen der unendlich kleinen Schicht jenes Prisma's giebt. Der Inhalt des Parallelogramms läfst sich allgemein ausdrücken, so dafs sich für das genannte Volumen

$$\pm\left\{\left(\frac{dx}{d\tau}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right)-\left(\frac{dx}{dt}\right)\left(\frac{dy}{d\tau}\right)\right\}d\tau\,dt\,dz$$

findet. Um hieraus das prismatische Element abzuleiten, ist zuerst nach z zu integriren, und zwar zwischen Grenzen, welche sich aus der Lage der Puncte ermitteln lassen, in welcher das Element die, durch die Grenzen des Integrals bestimmten Theile der Oberfläche des ganzen Raums trifft. Man integrire hierauf nach t, wobei τ constant bleibt, und dann schliefslich nach τ, jedesmal innerhalb der Grenzen, zwischen welchen der zu berechnende Bestandtheil von den nämlichen Linien oder Flächen eingeschlossen bleibt, so wird man die einzelnen Integrale erhalten, aus deren Summe das dreifache Integral besteht. Die Zahl dieser Theile, welche sich im Allgemeinen nicht weiter vereinigen lassen, beträgt im Allgemeinen wieder ***sieben***.

Um diese Bemerkungen auf einen bestimmten, möglichst einfachen

Fall anzuwenden, setzen wir zwei *lineare* Ausdrücke t und τ und nehmen die Grenzen des Integrals als *constant* an.

Die sich schneidenden Flächen

$$t = ax + by + cz, \quad \tau = \alpha x + \beta y + \gamma z$$

sind also ***Ebenen***, und der zwischen je vier auf einander folgenden Ebenen dieser Art enthaltene Raumtheil ist ein *gerades* ***Prisma.***

Wenn man nun, um sich hinsichtlich der Lage jener Ebenen auf einen ganz bestimmten Fall beziehen zu können, annimmt, es seien alle Coëfficienten *positiv* und es sei aufserdem:

$$\frac{a}{\alpha} > \frac{b}{\beta} > \frac{c}{\gamma},$$

so hat eine unendlich dünne Schicht des Prisma's:

$$\frac{f(t,\tau)}{a\beta - \alpha b}\, d\tau\, dt\, dz,$$

also das Prisma selbst:

$$\frac{f(t,\tau)}{a\beta - \alpha b}(z + \text{Const.})\, d\tau\, dt$$

zum Ausdrucke.

Das dreifache Integral kann in dem vorliegenden Falle nicht durch weniger als *sieben* Doppel-Integrale ausgedrückt werden, deren geometrische Darstellung man findet, wenn man, wie in (§. 2.) parallele Ebenen (τ) durch die daselbst angegebenen Eckpuncte des parallelepipedischen Raumes (ξ, η, ζ) legt.

17.

Die obigen Annahmen rücksichtlich der Coëfficienten haben zur Folge, dafs die Ebenen der beiden Systeme (t und τ) die *positiven* Halb-Axen der x, y, z schneiden und dafs eben so die Projection ihrer Durchschnittslinien auf xy die beiden entsprechenden positiven Halb-Axen schneidet.

Die Bestimmung der Grenzen ist oben im Allgemeinen bezeichnet worden; sie ist etwas beschwerlich, ohne jedoch schwierig zu sein. Eine detailirte Ausführung derselben würde zu umständlich sein, während sich die Grenzen-Ausdrücke, bei Benutzung einer richtigen Figur fast ohne Weiteres hinschreiben lassen.

Indem wir also das Weitere übergehen und uns auf das Endresultat beschränken, möge nur noch die Bemerkung ihre Stelle finden, dafs sich das System von Werthen, wie es sich, unter Beibehaltung einer und derselben

Aufeinanderfolge der Veränderlichen aus der Figur ergiebt, leicht in ein anderes transformiren läfst, wobei der Reihe nach jedesmal eine andere Veränderliche eliminirt ist, und wodurch die Theile des Integrals eine symmetrische Form bekommen. Der letztere Umstand ist um so mehr zu beachten, da die Symmetrie der Formeln, hier, wie in den früheren Fällen, das sicherste Mittel zur Prüfung der Rechnung abgiebt.

Setzt man wieder zur Abkürzung:

$$\beta c - b\gamma = a_1, \quad \gamma a - c\alpha = b_1, \quad \alpha b - a\beta = c_1,$$

so findet man schliefslich folgende Gleichung:

$$\int_0^{\xi} dx \int_0^{\eta} dy \int_0^{\zeta} f(ax+by+cz, \alpha x+\beta y+\gamma z)\, dz$$

$$= \int_0^{\alpha\xi} d\tau \int_0^{\frac{a}{\alpha}\tau} \frac{\alpha t - a\tau}{b_1 c_1} f(t,\tau)\, dt + \int_0^{b\eta} d\tau \int_0^{\frac{b}{\beta}\tau} \frac{\beta t - b\tau}{a_1 c_1} f(t,\tau)\, dt$$

$$+ \int_0^{\gamma\zeta} d\tau \int_0^{\frac{c}{\gamma}\tau} \frac{\gamma t - c\tau}{a_1 b_1} f(t,\tau)\, dt$$

$$- \int_{\alpha\xi}^{\alpha\xi+b\eta} d\tau \int_0^{\frac{b\tau-c_1\xi}{\beta}} \frac{\beta t - b\tau + c_1\xi}{a_1 c_1} f(t,\tau)\, dt - \int_{\beta\eta}^{\alpha\xi+\beta\eta} d\tau \int_0^{\frac{a\tau+c_1\eta}{\alpha}} \frac{\alpha t - a\tau - c_1\eta}{b_1 c_1} f(t,\tau)\, dt$$

$$- \int_{\beta\eta}^{\beta\eta+\gamma\zeta} d\tau \int_0^{\frac{c\tau-a_1\eta}{\gamma}} \frac{\gamma t - c\tau + a_1\eta}{a_1 b_1} f(t,\tau)\, dt - \int_{\gamma\zeta}^{\beta\eta+\gamma\zeta} d\tau \int_0^{\frac{b\tau+a_1\zeta}{\beta}} \frac{\beta t - b\tau - a_1\zeta}{a_1 c_1} f(t,\tau)\, dt$$

$$- \int_{\gamma\zeta}^{\alpha\xi+\gamma\zeta} d\tau \int_0^{\frac{a\tau-b_1\zeta}{\alpha}} \frac{\alpha t - a\tau + b_1\zeta}{b_1 c_1} f(t,\tau)\, dt - \int_{\alpha\xi}^{\alpha\xi+\gamma\zeta} d\tau \int_0^{\frac{c\tau+b_1\xi}{\gamma}} \frac{\gamma t - c\tau - b_1\xi}{a_1 b_1} f(t,\tau)\, dt$$

$$+ \int_{\alpha\xi+\beta\eta}^{\alpha\xi+\beta\eta+\gamma\zeta} d\tau \int_0^{\frac{c\tau+b_1\xi-a_1\eta}{\gamma}} \frac{\gamma t - c\tau - b_1\xi + a_1\eta}{a_1 b_1} f(t,\tau)\, dt$$

$$+ \int_{\beta\eta+\gamma\zeta}^{\alpha\xi+\beta\eta+\gamma\zeta} d\tau \int_0^{\frac{a\tau+c_1\eta-b_1\zeta}{\alpha}} \frac{\alpha t - a\tau - c_1\eta + b_1\zeta}{b_1 c_1} f(t,\tau)\, dt$$

$$+ \int_{\alpha\xi+\gamma\zeta}^{\alpha\xi+\beta\eta+\gamma\zeta} d\tau \int_0^{\frac{b\tau+a_1\zeta-c_1\xi}{\beta}} \frac{\beta t - b\tau - a_1\zeta + c_1\xi}{a_1 c_1} f(t,\tau)\, dt.$$

Wenn $f(t,\tau)$ so schnell abnimmt, dafs für $\xi = \eta = \zeta = \infty$ die Integrale, bei welchen diese Gröfsen in den untern und obern Grenzen zugleich vorkommen, der Null sich nähern, so reducirt sich das dreifache Integral

auf die drei ersten Doppel-Integrale und man erhält:

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty dy \int_0^\infty f(ax+by+cz,\, \alpha x+\beta y+\gamma z)\, dz$$

$$= \int_0^\infty d\tau \int_0^{\frac{a}{\alpha}\tau} \frac{(a\tau-\alpha t)\, f(t,\tau)}{(\alpha b-a\beta)(\alpha c-a\gamma)}\, dt + \int_0^\infty d\tau \int_0^{\frac{b}{\beta}\tau} \frac{(b\tau-\beta t)\, f(t,\tau)}{(\beta a-b\alpha)(\beta c-b\gamma)}\, dt$$

$$+ \int_0^\infty d\tau \int_0^{\frac{c}{\gamma}\tau} \frac{(c\tau-\gamma t)\, f(t,\tau)}{(\gamma a-c\alpha)(\gamma b-c\beta)}\, dt.$$

Formeln dieser Art lassen sich auch noch für viele andere Formen von t und τ finden. Sofern es sich aber um eine explicite Darstellung der Reductionsformeln handelt, werden die Resultate so weitläuftig, dafs sie sich hier zur Mittheilung kaum mehr eignen.

Zum Schlusse noch die Bemerkung, dafs frühere Andeutungen, so wie die Resultate selbst, sehr leicht auf die Bildung der entsprechenden 4, 5, ... n-fachen Integrale führen.

Brünn, 3 August 1853.

2.

Bemerkungen über einige Formeln der Geodäsie.

(Von Herrn Dr. *A. Winckler,* k. k. Professor in Brünn.)

Die folgenden Artikel beschäftigen sich:

Erstlich mit der Ermittelung des Betrages, um welchen, bei Annahme der gewöhnlichen Hypothesen, die scheinbare Zenithdistanz eines terresterischen Objects in Folge der atmosphärischen Strahlenbrechung von der wahren Zenithdistanz abweicht;

Zweitens mit der Berechnung der Höhen solcher Objecte aus einem Näherungs-Ausdrucke, in welchem auf die Refraction und auf den ***vollständigen*** Einflufs der Erdkrümmung Rücksicht genommen ist. Endlich:

Drittens mit der kürzern Herleitung einer bekannten Formel für die Inhalte kleiner sphärischer Dreiecke.

1.

Um den Betrag zu ermitteln, um welchen wegen der Refraction die beobachtete Zenithdistanz corrigirt werden mufs, werde ich von der Gleichung der Refractionscurve Gebrauch machen, welcher dasjenige Gesetz der brechenden Kraft in den auf einander folgenden Schichten der Atmosphäre zu Grunde liegt, welches zu der bekannten, bei terresterischen Höhenbestimmungen ausschliefslich in Anwendung kommenden Formel führt.

Der Übersicht wegen möge zunächst die dieser Hypothese entsprechende Gleichung der genannten Curve, jedoch auf etwas einfacherm Wege als sonst abgeleitet werden.

Es seien zu dem Ende in (Taf. 2. Fig. 1.) A und A_1 zwei innerhalb der Atmosphäre liegende Puncte der Lichtcurve.

R und R_1 die Halbmesser der entsprechenden Luftschichten.

$H = R_1 - R$ die Höhendifferenz der beiden Puncte.

u der Winkel am Erdcentrum, welchen R und R_1 einschliefsen.

z und z_1 die scheinbaren Zenithdistanzen der Puncte A_1 und A.

Δz und Δz_1 die wegen der Refraction daran nöthigen Correctionen.

$\varrho = \Delta z + \Delta z_1 = 180^0 + u - (z + z_1)$ die Gesammtwirkung der Refraction.

r der Radiusvector, v der Polarwinkel irgend eines Punctes der Curve.

i der Einfallswinkel des Lichts und λ der Brechungs-Exponent in diesem Puncte.
k die Refractionsconstante.

Das Grundgesetz der atmosphärischen Strahlenbrechung wird dann durch die Gleichung:

$$\frac{r}{\lambda}\sin i = A$$

ausgedrückt, wo A eine gewisse Constante bezeichnet.

Die Beziehung zwischen λ und r werde, wie bemerkt, durch die Gleichung

$$\lambda = Br^k$$

festgesetzt, wo B eine weitere Constante bezeichnet.

Differentiirt man nun die Gleichung:

$$\sin i = AB.r^{k-1}$$

logarithmisch, so erhält man:

$$\operatorname{cotg} i.di = (k-1)\frac{dr}{r}.$$

Verbindet man diese Gleichung mit der für jede Curve bestehenden Relation

$$\frac{dr}{r} = \operatorname{cotg} i.dv,$$

indem man r eliminirt, so ergiebt sich:

$$di = (k-1)dv,$$

und durch Integration:

$$i = (k-1)v + \text{Const.}$$

Um die Constante wegzuschaffen, setze man $v=0$, wofür $i=z$ ist, so hat man:

$$i = (k-1)v + z.$$

Wendet man diese Gleichung auch noch auf den Punct A_1 an, für welchen $v=u$ und $i=180-z$ ist, so erhält man:

$$180 - z_1 = (k-1)u + z$$

oder, da

$$180 + u - (z + z_1) = \varrho$$

ist, so wird nun die Refraction durch die Gleichung:

$$\varrho = \Delta z + \Delta z_1 = ku$$

gefunden.

Um endlich den auf Δz und Δz_1 kommenden Antheil von ku zu bestimmen, benutzen wir, wie bereits erwähnt, die Gleichung der Curve. Die-

selbe ergiebt sich sogleich aus der oben angeführten Relation

$$\frac{dr}{r} = \operatorname{cotg} i \,.\, dv,$$

wenn man darin den für i gefundenen Werth einführt; nämlich wie folgt:

$$\log r = \int \operatorname{cotg}(z + (k-1)v) \,.\, dv + \text{Const.}$$

Und wenn man die Integration ausführt, und die constante dadurch eliminirt, dafs man die Gleichung auf den Punct A anwendet, für welchen $v = 0$ und $r = R$ ist, so erhält man:

$$r = R \left\{ \frac{\sin(z + (k-1)v)}{\sin z} \right\}^{\frac{1}{k-1}};$$

welches nun die Gleichung der ***Refractionscurve*** ist.

Wendet man dieselbe auch auf den Punct A_1 an, für welchen $v = u$ und $r = R_1$ ist, so ergiebt sich:

$$\left(\frac{R_1}{R}\right)^{1-k} \,.\, \sin(z - (1-k)u) = \sin z.$$

Zur Abkürzung sei

$$\frac{R_1}{R} = 1 + \frac{H}{R} = a \quad \text{und} \quad 1 - k = n,$$

so findet sich:

$$\operatorname{tang} z = -\frac{a^n \sin nu}{1 - a^n \cos nu}.$$

Erwägt man weiter, dafs sich aus dem Dreiecke ACA_1 die Gleichung

$$\frac{R_1}{R} \cdot \sin(z + \Delta z - u) = \sin(z + \Delta z)$$

finden läfst und dafs hieraus:

$$\operatorname{tang}(z + \Delta z) = -\frac{a \sin u}{1 - a \cos u}$$

folgt, so gelangt man zu dem folgenden bemerkenswerthen Ausdrucke:

$$\Delta z = \operatorname{arctang} \frac{a^n \sin nu}{1 - a^n \cos nu} - \operatorname{arctang} \frac{a \sin u}{1 - a \cos u}.$$

Ohne auf eine weitere Discussion desselben einzugehen, mag nur erwähnt werden, dafs, da

$$\frac{H}{R} = 1 - a = \alpha$$

immer der kleinste, darin vorkommende Zahlenwerth sein wird, die Ent-

wickelung der Correction Δz nach Potenzen von α für den vorliegenden Zweck hinreichend ist.

Setzt man daher zur Abkürzung

$$A_n = \text{arctang}\frac{a^n \sin nu}{1 - a^n \cos nu},$$

so ist:

$$\frac{dA_n}{d\alpha} = \frac{n(1+\alpha)^{n-1}\sin nu}{1 - 2(1+\alpha)^n \cos nu + (1+\alpha)^{2n}},$$

woraus

$$\left(\frac{dA_n}{d\alpha}\right)_0 = \tfrac{1}{2} n \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} nu,$$

also

$$\left(\frac{dA_1}{d\alpha}\right)_0 = \tfrac{1}{2} \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} u$$

folgt. Wollte man die Entwickelung noch um ein Glied weiter fortsetzen, so wäre für dasselbe

$$\left(\frac{d^2 A_n}{d\alpha^2}\right)_0 = \frac{n}{2\sqrt{2}} \cos(45^0 + nu) \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} nu.$$

Aus der *Mac-Laurin*'schen Formel folgt also:

$$\Delta z = \tfrac{1}{2}(1-n)u + \tfrac{1}{2}\alpha(n \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} nu - \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} u) + \cdots$$

Das dritte Glied rechter Hand ist, wegen des Factors α^2 und weil der andere Factor mit der ersten Potenz von u beginnen würde, nicht mehr zu beachten nöthig.

Entwickelt man nun auch noch das zweite Glied nach Potenzen von u, bleibt aber bei der ersten derselben stehen, setzt auch wieder die durch a und n bezeichneten Ausdrücke ein, so findet man:

$$\Delta z = \tfrac{1}{2} ku + 1\tfrac{1}{2}(k(2-k)) . \frac{H}{R} \cdot u$$

oder, da auch k^2 im zweiten Gliede keinen merklichen Einflufs haben kann:

$$\Delta z = \tfrac{1}{2} ku + \tfrac{1}{6} ku . \frac{H}{R},$$

also auch:

$$\Delta z_1 = \tfrac{1}{2} ku - \tfrac{1}{6} ku . \frac{H}{R}.$$

Hieraus ergiebt sich, dafs die gewöhnliche Annahme $\Delta z_1 = \Delta z$, welche wegen Übergehung des Unterschiedes beider Gröfsen gemacht werden mufste, eben so eine nahe Folge derjenigen Theorie ist, aus welcher die Formel $\Delta z = \frac{1}{2} ku$ ihre Begründung erhält, als sie bekanntlich für den normalen Zustand der Atmosphäre sich meistens auch practisch bewährt.

II.

Im X. Buche der Méc. céleste und in dem Traité de Géodésie von ***Puissant*** findet man Näherungs-Ausdrücke für die Berechnung der Höhe terresterischer Objecte. Der Ausdruck von ***Puissant*** ist um ein Glied genauer, als der von ***Laplace*** und wird auch auf anderm Wege gefunden. Mit der bisherigen Bezeichnung heifst derselbe:

$$H = a\operatorname{cotg} z + \frac{a^2}{2R\sin z^2} - \frac{a^2 k}{2R\sin z^2}$$

oder

$$H = a\operatorname{cotg} z + \frac{a^2}{2R} + \frac{a^2}{2R}\operatorname{cotg} z^2 - \frac{a^2 k}{2R}\operatorname{cosec} z^2,$$

wo jetzt a die Sehne $2R\sin\frac{1}{2}u$, oder, mit gleichem Grade der Genauigkeit, auch den zugehörigen Bogen Ru bezeichnet.

Den *richtigen* Näherungswerth von H findet man aber am bequemsten auf folgende Weise.

Es ist bekanntlich ganz strenge:

$$H = 2R\sin\tfrac{1}{2}u \cdot \frac{\cos(z - \frac{1}{2}(1-k)u)}{\sin(z - \frac{1}{2}(2-k)u)}.$$

Um diesen Ausdruck nach Potenzen von u zu entwickeln, setze man zur Abkürzung:

$$U = \frac{\cos(z - \frac{1}{2}(1-k)u)}{\sin(z - \frac{1}{2}(2-k)u)},$$

so ist:

$$\frac{dU}{du} = \frac{(1-k)\cos\frac{1}{2}u + \cos(z - \frac{1}{2}(1-k)u)\cos(z - \frac{1}{2}(2-k)u)}{2\sin(z - \frac{1}{2}(2-k)u)^2},$$

also:

$$\left(\frac{dU}{du}\right)_0 = \tfrac{1}{2} + \operatorname{cotg} z^2 - \tfrac{1}{2}k\operatorname{cosec} z^2.$$

Eben so erhält man:

$$\left(\frac{d^2U}{du^2}\right)_0 = \tfrac{1}{4}(-1 + 2(2-k)^2\operatorname{cosec} z^2)\operatorname{cotg} z.$$

Die hieraus sich ergebende Entwickelung multiplicire man noch mit der von $\sin\frac{1}{2}u$, so ergiebt sich, mit Berücksichtigung der Glieder dritter Ordnung, und nachdem man $\frac{a}{R}$ statt u gesetzt hat, die Gleichung

$$H = a\operatorname{cotg} z + \frac{a^2}{R}\{\tfrac{1}{2} + \operatorname{cotg} z^2 - \tfrac{1}{2}k\operatorname{cosec} z^2\} + \frac{a^3}{4R^2}\{-\tfrac{2}{3} + (2-k)^2\operatorname{cosec} z^2\}\operatorname{cotg} z.$$

Das letztere Glied ist hier meistens verschwindend klein, und den beiden

ersten läfst sich folgende Form geben:

$$H = a\,\mathrm{cotg}\,z + \frac{a^2}{2R} + \frac{a^2}{R}\,\mathrm{cotg}\,z^2 - \frac{a^2 k}{2R}\,\mathrm{cosec}\,z^2.$$

Hier drückt nun das erste Glied rechter Hand die aus dem rechtwinkligen Dreiecke mittels der scheinbaren Zenithdistanz berechnete Höhe und das zweite Glied die sogenannte Erhöhung des scheinbaren Horizonts aus. Das dritte Glied rührt von der convergirenden Richtung der Verticalen R und R_1 her; das vierte endlich ist die Correction wegen der Strahlenbrechung.

Aus Vergleichung dieser Formel mit der oben angeführten von ***Puissant***, zeigt sich, dafs die letztere ***nur die Hälfte*** des dritten Gliedes, und daher die Glieder erster Ordnung ***nicht vollständig*** enthält. Ich erwähne dieses Umstandes, weil die Formel in die Lehrbücher der Geodäsie übergegangen ist und dabei der Einflufs der Convergenz der Verticalen, wohl deswegen, weil nur die Hälfte seines Werthes in der Formel vorkam, als unter allen Umständen sehr klein, meistens ganz aufser Acht gelassen wurde. Dafs aber dieser Einflufs, insbesondere bei beträchtlichem Höhenwinkel, keinesweges immer vernachlässigt werden dürfe und leicht den sonst überall berücksichtigten Betrag der Refraction erreichen könne, erhellet wie folgt.

Das Glied $\frac{(a\,\mathrm{cotg}\,z)^2}{R}$ kommt, was auch a sein möge, sogar der Erhöhung des scheinbaren Horizonts gleich, wenn

$$\mathrm{tang}\,z = \sqrt{2} \quad \text{oder} \quad z = 54^0\,44'$$

ist, und es erreicht die Gröfse des Einflusses der Refraction, wenn

$$\cos z = \sqrt{\tfrac{1}{2}k} \quad \text{oder} \quad z = 75^0 12' \quad (\text{für } k = 0{,}1306)$$

ist. Es beträgt noch den fünften Theil derselben, wenn

$$z = 83^0\,27'$$

ist, u. s. w.

Wenn die aus dem rechtwinkligen Dreiecke berechnete und noch die Refraction berücksichtigende Höhe $a\,\mathrm{cotg}\,z$ bereits gegeben ist, so kann man die richtige Höhe mit ***allen*** Correctionen, ohne erst die Zenithdistanz berechnen zu müssen, unmittelbar aus der obigen Näherungsformel finden, wenn man ihr die Form

$$H = a\,\mathrm{cotg}\,z + \frac{1-k}{2R}\cdot a^2 + \frac{2-k}{2R}(a\,\mathrm{cotg}\,z)^2$$

giebt.

Dieser Ausdruck dürfte für Höhenberechnungen überhaupt bequemer sein als die strenge Formel, obgleich diese letztere die Höhe durch ein Product darstellt.

Setzt man nämlich:

$$\frac{1-k}{2R} = \lambda, \qquad \frac{2-k}{2R} = \mu,$$

so ist:

$$H = a\operatorname{cotg} z + \lambda a^2 + \mu (a\operatorname{cotg} z)^2,$$

wobei für die gewöhnlichen Mittelwerthe (und für Metermaafs):

$$k = 0{,}14, \qquad \log R = 6{,}8041294,$$

also

$$\log \lambda = -7{,}1706609, \qquad \log \mu = -6{,}8356465$$

ist.

Um zu sehen, welche Unterschiede diese Formel gegen die genauere in einem bestimmten Falle giebt, möge folgendes Beispiel betrachtet werden.

D'Aubuisson beobachtete die Höhe des ***Monte Gregorio*** in der Schweiz und fand:

$$a = 5880^m{,}4, \qquad z = 73^0\,47'\,35''.$$

Berechnet man nun H zuerst nach der ***strengen Formel,*** so ergiebt sich:

$$u = 3'\,10''{,}416,$$

also:

$$z - \tfrac{1}{2}(1-k)u = 73^0\,46'\,31''{,}121; \qquad z - \tfrac{1}{2}(2-k)u = 73^0\,44'\,55''{,}914$$

und

$$H = 1711^m{,}392.$$

Nach der ***Näherungsformel*** ist Folgendes die ganze Rechnung:

$\log a =$	3,7694069		
$\log \operatorname{cotg} z =$	9,4632412		
	3,2326481	... $a\operatorname{cotg} z =$	1708,630
$\log (a\operatorname{cotg} z)^2 =$	6,4652962		
$\log \mu = -$	6,8356465		
	0,6296497 − 1	... $\mu (a\operatorname{cotg} z)^2 =$	0,426
$\log a^2 =$	7,5388138		
$\log \lambda = -$	7,1706609		
	0,3681529	... $\lambda a^2 =$	2,334
		$H =$	1711^m,390

Der Unterschied beider Resultate ist also völlig unbedeutend.

Das von der Convergenz der Verticalen herrührende Glied ist hier $+0{,}458$ und der Einfluſs der Refraction $-0{,}412$. Man sieht also, daſs in dem vorliegenden Falle das erste Glied das zweite noch übertrifft und darum seine Berücksichtigung mindestens eben so gerechtfertigt zu sein scheint, als die des letztern Gliedes. Gleichwohl wird es häufig ganz weggelassen.

III.

Um für den Inhalt eines kleinen sphärischen Dreiecks einen Näherungs-Ausdruck zu finden, der bis auf Gröſsen *vierter* Ordnung einschlieſslich genau ist, geht man am einfachsten von der bekannten Formel von ***L'Huilier*** aus, welche

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{4}E = \sqrt{\left(\operatorname{tang}\frac{a+b+c}{4r}\operatorname{tang}\frac{a+b-c}{4r}\operatorname{tang}\frac{a-b+c}{4r}\operatorname{tang}\frac{-a+b+c}{4r}\right)}$$

ist und worin a, b, c die Seiten des auf der Kugel vom Radius r liegenden sphärischen Dreiecks bezeichnen, dessen sphärischer Excefs E ist. Setzt man nun

$$\frac{a+b+c}{4r} = \alpha, \qquad \frac{a-b+c}{4r} = \gamma,$$

$$\frac{a+b-c}{4r} = \beta, \qquad \frac{-a+b+c}{4r} = \delta$$

und entwickelt jede Tangente unter dem Wurzelzeichen nach der Formel

$$\operatorname{tang} x = x + \tfrac{1}{3}x^3$$

in eine Reihe, so erhält man:

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{4}E = \sqrt{(\alpha\beta\gamma\delta)}\cdot\sqrt{[(1+\tfrac{1}{3}\alpha^2)(1+\tfrac{1}{3}\beta^2)(1+\tfrac{1}{3}\gamma^2)(1+\tfrac{1}{3}\delta^2)]}.$$

Und da

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2 = \frac{a^2+b^2+c^2}{4r^2}$$

und

$$\sqrt{(\alpha\beta\gamma\delta)} = \frac{\Delta}{4r^2}$$

ist, wo Δ den Inhalt des aus den Seiten a, b, c construirten *ebenen* Dreiecks bezeichnet, so ergiebt sich:

$$4r^2\operatorname{tang}\tfrac{1}{4}E = \Delta\sqrt{\left(1+\frac{a^2+b^2+c^2}{12r^2}\right)}.$$

Setzt man endlich linker Hand E statt $4\,\mathrm{tang}\frac{1}{4}E$ und entwickelt die Quadratwurzel, so erhält man für den verlangten Ausdruck:

$$r^2 E = \Delta\left(1+\frac{a^2+b^2+c^2}{24r^2}\right).$$

Auf etwas umständlichere Weise findet man diese Gleichung, von Professor ***Buzengeiger*** entwickelt, im VI. Bande der Zeitschrift von ***Lindenau*** und ***Bohnenberger***.

Brünn, den 14. November 1853.

3.

Über eine merkwürdige Formel in der Theorie der elliptischen Transcendenten, und eine Ableitung des Fundamentaltheorems.

(Von Herrn Dr. *Richelot*, prof. ord. an der Universität zu Königsberg in Preufsen.)

An mehreren Stellen hat *Jacobi* einzelne elliptische Functionen in Partialbrüche zerlegt und auf die sehr grofse Wichtigkeit dieser Entwickelungen für die ganze Theorie jener Functionen die Aufmerksamkeit der Geometer hingelenkt. In der That kann man von der Definition der unendlichen Producte, wie sie im (§. 61.) der „Fundamenta" definirt sind, ausgehend, mittels der Zerlegung ihrer Verhältnisse und der Producte von ihren Verhältnissen in Partialbrüche, nicht nur die Fundamental-Eigenschaften der elliptischen Transcendenten und Functionen auf eine sehr leichte und evidente Weise finden, sondern dieselben auch bis in ihre tiefern Beziehungen verfolgen, und namentlich ihre Entwickelung in Reihen, welche nach den Sinussen und Cosinussen der Vielfachen fortschreiten, wie sie in den Anwendungen der Theorie auf mechanische Probleme gebraucht werden, daraus ableiten. Ich habe diesen Weg in einer meiner Vorlesungen verfolgt, deren Bekanntmachung vielleicht nicht ohne Nutzen sein dürfte. Wenn dieselbe aber überhaupt erfolgen sollte, so darf Dies doch nicht früher geschehen, als bis die nach dem Tode *Jacobi's* beschlossene Edition seiner gröfsesten Vorlesung über elliptische Transcendenten, worin seine Principien und Methoden in dieser Theorie enthalten sind, ausgeführt sein wird.

In dieser letztern hat der grofse Meister auch seine Principien in Bezug auf die Zerlegung solcher Brüche, deren Zähler und Nenner Producte der 99 Functionen sind, in Partialbrüche angegeben, ohne die zahlreichen Folgerungen, welche daraus fliefsen, weiter zu entwickeln. Nun habe ich seit längerer Zeit diese Untersuchungen weiter verfolgt, und unter andern eine Formel gefunden, deren überraschende Allgemeinheit und Einfachheit auf das Interesse der Mathematiker einen solchen Anspruch zu haben scheint, dafs ich sie nicht länger zurückhalten mag.

§. I.

Ich bezeichne durch φx diejenige Function von x, welche in der angeführten Stelle der Fundamente durch

$$(1-q)(1-q^3)\cdots\frac{H\cdot\frac{2kx}{\pi}}{\vartheta 0}$$

auszudrücken ist, d. h. ich setze:

$$\varphi x = 2q^{\frac{1}{4}}\sin x(1-2q^2\cos 2x+q^4)(1-2q^4\cos 2x+q^8)\ \ldots$$

Sind nun $x_1, x_2, \ldots x_n, y_1, y_2, \ldots y_n$ sonst beliebige n Gröfsen, nur von der Art, dafs die n letzten unter einander verschieden sind, und setzt man der Kürze wegen

$$\frac{\varphi(x-x_1).\varphi(x-x_2)\ \ldots\ \varphi(x-x_n)}{\varphi(x-y_1).\varphi(x-y_2)\ \ldots\ \varphi(x-y_n)} = \Pi x,$$

so dafs man auch die Formel:

$$\Pi 0 = \frac{\varphi x_1.\varphi x_2\ \ldots\ \varphi x_n}{\varphi y_1.\varphi y_2\ \ldots\ \varphi y_n}$$

hat, so findet man durch Zerlegung dieses Bruchs in Partialbrüche, und nachheriger geeigneter Summation der letztern, folgende Formel:

$$\Pi 0 = \frac{1}{\varphi(\Delta)}\sum_1^n{}^k\,\dot{\Pi}y_k\cdot\frac{\varphi(y_k-\Delta)}{\varphi y_k},$$

in welcher der Kürze wegen

$$\Delta = y_1+y_2\cdots+y_n-x_1-x_2\cdots-x_n$$

gesetzt ist, durch den Punct über dem Multiplicationszeichen Π angezeigt werden soll, dafs der Factor $\varphi(x-y_k)$ im Nenner des betreffenden Products auszulassen sei, und das Summenzeichen seine gewöhnliche Bedeutung hat, wonach

$$(1.)\qquad \sum_1^n{}^k fx_k = fx_1+fx_2+\cdots fx_n \text{ ist.}$$

Aus dieser wichtigen Gleichung (1.) lassen sich schon die zahlreichsten Folgerungen ziehen und die brauchbarsten Entwickelungen bei den Anwendungen der elliptischen Functionen machen, weil in ihr die sämmtlichen Reihen-Entwickelungen obengenannter Art concentrirt sind. Deshalb habe ich auch einen meiner ausgezeichnetesten Schüler, den Herrn Dr. ***Dumas,*** auf solche Entwickelungen aufmerksam gemacht, als er sich mit der Anwendung der *elliptischen* ***Transcendenten*** auf verschiedene ***mechanische Probleme,*** in der

Art wie *Jacobi* das Problem der Rotation eines Körpers um seinen Schwerpunct behandelt hat, beschäftigte. Es ist ihm gelungen, jene Gleichung auf selbständige Weise zu finden, und er hat sie in seiner schönen Abhandlung *über die Bewegung des Raumpendels mit Berücksichtigung des Einflusses der Umdrehung der Erde um ihre Axe,* welche in ganz Kurzem publicirt werden wird, zu den interessantesten Anwendungen benutzt.

In dem Falle, welcher oben ausgeschlossen wurde, dafs die Gröfsen

$$y_1, y_2, \ldots y_n$$

nicht alle unter sich verschieden sind, kann man nach der in solchen Fällen üblichen Methode verfahren, indem man diese Gröfsen zuerst nur um unendlich wenig von einander verschieden annimmt, und nachher zur Grenze der Gleichheit übergeht.

Wenn z. B. die Gröfsen

$$y_1, y_2, \ldots y_m,$$

unter einander gleich werden sollen, so kann man

$$(2.) \quad y_1 = y', \quad y_2 = y' + \varepsilon, \quad \ldots \quad y_m = y' + (m-1)\varepsilon$$

setzen und diese Werthe in demjenigen Theil der Summe auf der rechten Seite der Gleichung (1.) substituiren, welcher sich auf diese m ersten Werthe erstreckt, also in dem Ausdrucke

$$(3.) \quad \frac{1}{\varphi\Delta} \sum_1^m{}^k \dot{\Pi} y_k \frac{\varphi(y_k - \Delta)}{\varphi y_k},$$

und dann die Grenze dieses Ausdrucks

$$\frac{1}{\varphi\Delta} \sum_1^m{}^k \dot{\Pi}(y' + (k-1)\varepsilon) \frac{\varphi(y' + (k-1)\varepsilon - \Delta)}{\varphi(y' + (k-1)\varepsilon)}$$

für $\varepsilon = 0$ suchen. Setzt man diesen Grenzwerth an Stelle des Ausdrucks (3.) in der obigen Gleichung (1.), und in ihren übrigen Theilen:

$$y_1 = y_2 \ldots = y_m = y',$$

so erhält man wieder eine richtige Gleichung. In dieser letztern kann man mit einer zweiten Gruppe von Werthen

$$y_{m+1} = y_{m+2} \ldots = y_{m+m'} = y''$$

eben so verfahren, und auf solche Weise fortfahren, bis alle n Werthe

$$y_1, y_2, \ldots y_n$$

erschöpft sind.

Die Anwendung dieser Methode auf die Gleichung (1.) giebt, wenn man sie geschickt ausführt, folgendes äufserst einfache und elegante Theorem:

„Das Product $\Pi 0 = \frac{\varphi x_1 \cdot \varphi x_2 \cdots \varphi x_n}{\varphi y_1 \cdot \varphi y_2 \cdots \varphi y_n}$ ist mit dem Aggregat

$$\frac{\varphi' 0}{\varphi \Delta} \sum_1^{n'}{}^k \left[\Pi(y^{(k)} + h) \frac{\varphi(y^{(k)} + h - \Delta)}{\varphi(y^{(k)} + h)} \right]_{h^{-1}}$$

übereinstimmend; wo n' die Anzahl der Gruppen von gleichen Gröfsen ist, deren Werthe respective y', y'', ... $y^{n'}$ sind, und wobei ich mich des Zeichens

$$[Fh]_{h^n}$$

für den Coëfficienten von h^n in der Entwickelung der Function Fh nach aufsteigenden ganzen Potenzen von h und der Bezeichnung

$$\frac{\varphi(x-x_1) \cdot \varphi(x-x_2) \ldots \varphi(x-x_n)}{\varphi(x-y_1) \cdot \varphi(x-y_2) \ldots \varphi(x-y_n)} = \Pi x$$

bediene. Man kann auch kürzer sich so ausdrücken, dafs das Summenzeichen sich nur auf die untereinander verschiedenen Werthe unter den Gröfsen

$$y_1, \quad y_2, \quad \ldots \quad y_n$$

beziehen soll, so dafs man unter dieser Voraussetzung die Gleichung

$$(4.) \qquad \Pi 0 = \frac{\varphi' 0}{\varphi \Delta} \Sigma^k \left[\Pi(y_k + h) \frac{\varphi(y_k + h - \Delta)}{\varphi(y_k + h)} \right]_{h^{-1}}$$

erhält."

Um Dies zu beweisen, setze ich der Kürze wegen den Werth des Ausdrucks

$$(5.) \quad \frac{\varphi(x-x_1) \cdot \varphi(x-x_2) \ldots \varphi(x-x_n)}{\varphi(x-y_1) \cdot \varphi(x-y_1) \ldots \varphi(x-y_n)} \cdot (\varphi' 0)^m \cdot (x-y_1)(x-y_2) \ldots (x-y_m) \cdot \frac{\varphi(x-\Delta)}{\varphi x},$$

nach der Substitution der Werthe (2.), für $\varepsilon = 0$,

$$= P_m x,$$

und erhalte dann, wenn ich die in (2.) angegebenen Substitutionen in den oben bezeichneten Theil der Summe einführe, dessen Werth für $\varepsilon = 0$, welchen ich durch Y' bezeichne, nemlich:

$$Y' = (\text{Lim. für } \varepsilon = 0) \frac{1}{\varphi \Delta} \sum_1^n{}^k \left(\frac{(-1)^{m-k} P_m(y' + (k-1)\varepsilon)}{1.2 \ldots (m-k)\, 1.2 \ldots k-1} \right) \frac{1}{\varepsilon^{m-1} (\varphi' 0)^{m-1}},$$

oder was, wie man sieht, Dasselbe ist

$$Y' = \frac{1}{1.2 \ldots (m-1)} \frac{1}{\varphi \Delta} \frac{1}{(\varphi' 0)^{m-1}} \sum_1^m{}^k (-1)^{m-k} \frac{(m-1)(m-2) \ldots (m-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots k-1} \frac{P(y' + (k-1)\varepsilon)}{\varepsilon^{m-1}},$$

wenn man rechts den Grenzwerth für $\varepsilon = 0$ nimmt.

Der unter dem Summenzeichen stehende Grenz-Ausdruck ist aber der Differentialquotient der Function Py' nach y', und man erhält daher den einfachen Ausdruck:

$$Y' = \frac{1}{\varphi\Delta}\,\frac{1}{(\varphi' 0)^{m-1}}[P(y'+h)]_{h^{m-1}}.$$

Setzt man endlich den aus (5.) hervorgehenden Werth von

$$P(y'+h) = (\varphi' 0)^{m-1} h^m \Pi(y'+h)\frac{\varphi(y'+h-\Delta)}{\varphi(y'+h)}$$

in diese Formel, so ergiebt sich die viel einfachere:

$$Y' = \frac{\varphi' 0}{\varphi\Delta}\left[\Pi(y'+h)\frac{\varphi(y'+h-\Delta)}{\varphi(y'+h)}\right]_{h^{-1}}.$$

Eben so erhält man aus der zweiten Gruppe gleicher Werthe, mit analoger Bezeichnung:

$$Y'' = \frac{\varphi' 0}{\varphi\Delta}\left[\Pi(y''+h)\frac{\varphi'(y''+h-\Delta)}{\varphi(y''+h)}\right]_{h^{-1}}$$

u. s. w., so dafs sich endlich durch Substitution dieser Ausdrücke in die aus der Bezeichnung sich ergebende Gleichung

$$\Pi 0 = Y' + Y'' \ldots + Y^{n'}$$

die obige Formel (4.) findet.

Wenn gleich die Ableitung, deren ich mich hier bedient habe, sehr einfach und elementar ist, so wird doch ihr Zusammenhang mit etwas allgemeineren Betrachtungen nicht überflüssig sein.

Zu dem Ende bemerke ich, dafs sie die einfache Folge aus folgendem, auch bei vielen andern Gelegenheiten nützlichen Theorem ist.

Wenn fx eine sonst beliebige, aber nach ganzen positiven Potenzen von $x-a$ entwickelbare Function von x ist, und φx eine andere, nach solchen Potenzen von x entwickelbare Function bedeutet, welche den Factor x, und zwar nur einmal enthält, so ist der Werth des Ausdrucks

$$\frac{fy_1}{\varphi(y_1-y_2)\cdot\varphi(y_1-y_3)\ldots\varphi(y_1-y_m)} + \frac{fy_2}{\varphi(y_2+y_3)\cdot\varphi(y_2-y_4)\ldots\varphi(y_2-y_1)} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{fy_m}{\varphi(y_m-y_1)\cdot\varphi(y_m-y_2)\ldots\varphi(y_m-y_{m-1})}$$

für den Fall, dafs man

$$y_1 = y,\quad y_2 = y+\varepsilon,\quad \ldots\quad y_m = y+(m-1)\varepsilon$$

setzt und die Grenze für $\varepsilon = 0$ nimmt:

$$(7.)\qquad = \left[\frac{fy+h}{(\varphi h)^m}\right]_{h^{-1}}.$$

Der Beweis dieses Theorems, welches in dem Falle, dafs fx eine ganze rationale Function von x, und $\varphi x = x$ ist, wohl zuerst von ***Lagrange*** (Mémoires de l'académie de Berlin 1792—93 p. 256) mutatis mutandis ausgesprochen ist, folgt auf leichte Art aus der einfachen Bemerkung, dafs man diese Functionen, weil sie in convergirende Reihen genannter Art entwickelbar sind, als *ganze* Functionen ansehen kann.

Man betrachte nämlich das Aggregat der Partialbrüche des Ausdrucks

$$\frac{(\varphi' 0)^m fx}{\varphi(x-y_1).\varphi(x-y_2)\ldots\varphi(x-y_m)},$$

welcher von den Nennern $x-y_1$, $x-y_2$, $\ldots$ $x-y_m$ abhangt, in doppelter Beziehung, sowohl wenn die Gröfsen y_1, y_2, $\ldots$ y_m noch untereinander verschieden sind, als auch wenn sie alle der Gröfse y gleich gesetzt werden.

Setzt man, der bessern Bezeichnung wegen, für den Augenblick

$$\varphi x = x\varphi' 0.\psi x,$$

so dafs $\psi 0 = 1$ ist, so wird das genannte Aggregat im ersten Fall:

$$(8.)\quad \frac{1}{(\varphi' 0)^{m-1}}\left\{\frac{fy_1}{\varphi(y_1-y_2).(y_1-y_3)\ldots(y_1-y_m)}\cdot\frac{1}{x-a_1}+\cdots\right.$$
$$\left.\cdots+\frac{fy_m}{\varphi(y_m-y_1).(y_m-y_2)\ldots(y_m-y_{m-1})}\cdot\frac{1}{x-y_m}\right\},$$

und im zweiten Fall, weil der obige Bruch die Form

$$\frac{fx}{(\varphi' 0)^m(x-y)^m(\psi(x-y))^m}$$

annimmt:

$$\left[\frac{fy+h}{(\psi h)^m}\right]_{h^0}\frac{1}{(x-y)^m}+\left[\frac{fy+h}{(\psi h)^m}\right]_{h^1}\frac{1}{(x-y)^{m-1}}\cdots+\left[\frac{fy+h}{(\psi h)^m}\right]_{h^{m-1}}\cdot\frac{1}{x-y}.$$

Dieser Ausdruck ist aber ***identisch*** mit folgendem:

$$(9.)\quad =\left[\frac{fy+h}{h^m(\psi h)^m}\cdot\frac{1}{x-y-h}\right]_{h^{-1}}=(\varphi' 0)^m\left[\frac{fy+h}{(\varphi h)^m}\cdot\frac{1}{x-a-h}\right]_{h^{-1}}.$$

Setzt man nun in den beiden, für den Fall dafs man die Substitution (2.) in (8.) einführt und die Grenze für $\varepsilon = 0$ nimmt, einander gleichen Ausdrücken (8. u. 9.) die Coëfficienten von x^{-1} in ihren Entwickelungen nach fallenden Potenzen von x einander gleich, so hat man das vorstehende Theorem.

Setzt man hierin

$$fx = \Pi x.\varphi(x-y_{m+1})\ldots\varphi(x-y_n),$$

so erfüllt diese Function, eben so wie die Function φx, welche oben definirt

wurde, die vorgeschriebenen Bedingungen des Theorems, und die wiederholte gehörige Anwendung des letztern führt dann ebenfalls auf die Gleichung (4.).

§. II.

Unter den unzähligen Anwendungen der Gleichung (4.) erlaube ich mir nur eine der einfachsten hier hervorzuheben und auszuführen; aber gerade diejenige, wodurch ihre grofse Bedeutung in der ganzen Theorie der elliptischen Functionen von selbst Jedem in die Augen fallen wird. Ich meine, dafs die äufserst einfache Ableitung der Grund-Eigenschaften der elliptischen Transcendenten, und namentlich des Fundamentaltheorems aus ihr, es zugleich erklärlich macht, weshalb sie auch in den übrigen Theilen dieser Theorie eine wichtige Rolle spielt.

In der That: geht man von der obigen Definition der Function φx als unendliches Product aus, so folgen das Fundamentaltheorem, so wie die Hauptgrundformeln der Functionen $\vartheta\vartheta$ für zwei Argumente, aus dem einfachen Falle der Gleichung (4.), wenn nur zwei, und einander gleiche Werthe y_1 und y_2 darin stehen.

Um jedoch nicht später den Gang der Rechnung zu unterbrechen, werde ich aus dem, nur in etwas anderer Form geschriebenen Ausdruck für φx, nämlich:

$$\varphi x = 2q^{\frac{1}{4}}\sin x,\quad \boldsymbol{P}(1-q^{2h}e^{2ix})(1-q^{2h}e^{-2ix}),$$

wobei ich mich des Zeichens

$$\boldsymbol{P}(fq^h)\quad \text{für}\quad fq,\ fq^2,\ fq^3,\ \ldots$$

bediene, folgende vier Grundformen dieser Function, so wie sie ***Jacobi*** eingeführt und bezeichnet hat, ableiten. Es folgen nämlich daraus die Formeln:

$$(10.)\quad \begin{cases} \varphi x = 2q^{\frac{1}{4}}\sin x.\boldsymbol{\Pi}(1-2q^{2h}\cos 2x+q^{4h}), \\ \varphi(x+\frac{1}{2}\pi) = 2q^{\frac{1}{4}}\cos x.\boldsymbol{\Pi}(1+2q^{2h}\cos 2x+q^{4h}), \\ \varphi(x+\frac{1}{2}il q) = -iq^{\frac{1}{4}}e^{ix}.\boldsymbol{\Pi}(1-2q^{2h-1}\cos 2x+q^{4h-2}), \\ \varphi(x+\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{2}il q) = -q^{\frac{1}{4}}e^{ix}.\boldsymbol{\Pi}(1+2q^{2h-1}\cos 2x+q^{4h-2}), \end{cases}$$

wo $i=\sqrt{-1}$ ist und lq den natürlichen Logarithmus der Gröfse q bedeutet. Setzt man nun ferner:

$$\begin{aligned} \vartheta_1 x &= \varphi x.\boldsymbol{\Pi}(1-q^{2h}), \\ \vartheta_2 x &= \varphi(x+\tfrac{1}{2}\pi).\boldsymbol{\Pi}(1-q^{2h}), \\ \vartheta x &= iq^{\frac{1}{4}}e^{-ix}\varphi(x+\tfrac{1}{2}il q).\boldsymbol{\Pi}(1-q^{2h}), \\ \vartheta_3 x &= q^{\frac{1}{4}}e^{-ix}\varphi(x+\tfrac{1}{2}\pi+\tfrac{1}{2}il q).\boldsymbol{\Pi}(1-q^{2h}), \end{aligned}$$

so ergeben sich aus den obigen Definitionen folgende bekannte Grundformeln:

$$(11.)\quad \begin{cases} \vartheta_1(x+\frac{1}{2}\pi) & = \vartheta_2 x, \\ \vartheta_1(x+\frac{1}{2}ilq) & = -iq^{-\frac{1}{4}}e^{ix}\vartheta x, \\ \vartheta_1(x+\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{2}ilq) & = q^{-\frac{1}{4}}e^{ix}\vartheta_3 x. \end{cases}$$

Setzt man in der Gleichung (4.)

$$\Pi x = \frac{\varphi(x-x_1)\varphi(x-x_2)}{(\varphi x-y)^2},$$

und für x_1, x_2, y, respective die drei Ausdrücke

$$y+x_1, \quad y+x_2, \quad y+\tfrac{1}{2}ilq,$$

so geht dieselbe nach leichten, aus den Formeln (11.) abzuleitenden Reductionen in folgende über:

$$(12.)\quad \frac{\vartheta_1(y+x_1)\vartheta_1(y+x_2)}{(\vartheta y)^2}$$

$$= -\frac{1}{\vartheta_1' 0\,\vartheta_1(x_1+x_2)}\left[\frac{\vartheta(x_1-h)\vartheta(x_2-h)\vartheta(y+x_1+x_2+h)}{\vartheta y+h}\right]_{h'};$$

woraus alle folgenden Formeln folgen.

Setzt man nämlich zuerst in dieser Gleichung $x_1 = x$, $x_2 = k-x$ und nimmt auf beiden Seiten den Coëfficienten von k' in der Entwickelung nach aufsteigenden Potenzen von k, so erhält man, mit Benutzung der analogen Bezeichnung:

$$\frac{\vartheta_1(y+x)\vartheta_1(y-x)}{(\vartheta y)^2} = -\left[\left[\frac{\vartheta(x-h)\vartheta(x-k+h)\vartheta(y+k+h)}{\vartheta_1' 0\,\vartheta_1' 0\,\vartheta y+h}\right]_{h'}\right]_{k'}.$$

Kehrt man hier die Reihenfolge der Entwickelungen um, so erhält man die Formel

$$\frac{\vartheta_1(y+x)\vartheta_1(y-x)}{(\vartheta y)^2} = -\left[\frac{\vartheta(x-h)}{(\vartheta_1' 0)^2}\,\frac{\vartheta(x+h)\vartheta'(y+h)-\vartheta(y+h)\vartheta'(x+h)}{\vartheta(y+h)}\right]_{h'},$$

oder endlich, nach Ausführung der angedeuteten Operation und nach leichter Reduction, folgende:

$$\frac{\vartheta_1(y+x)\vartheta_1(y-x)}{(\vartheta y)^2(\vartheta x)^2}(\vartheta_1' 0)^2 = \frac{d\frac{\vartheta' x}{\vartheta x}}{dx} - \frac{d\frac{\vartheta' y}{\vartheta y}}{dy}.$$

Setzt man Ex für $\frac{\vartheta' x}{\vartheta x}$, wie es *Jacobi* eingeführt hat, so geht die vorige Gleichung in

$$(13.)\quad \frac{\vartheta_1(y+x)\vartheta_1(y-x)}{(\vartheta y)^2(\vartheta x)^2}(\vartheta_1' 0)^2 = E'x - E'y$$

über.

In derselben der Reihe nach für x,

$$x = 0, \quad x = \tfrac{1}{2}\pi, \quad x = \tfrac{1}{2}\pi + \tfrac{1}{2}i\,lq$$

gesetzt, ergeben sich die drei wichtigen Formeln:

$$(14.)\quad \begin{cases} \left(\frac{\vartheta_0' 0}{\vartheta 0}\right)^2 \left(\frac{\vartheta_1 y}{\vartheta y}\right)^2 = +E'0 - E'y, \\ \left(\frac{\vartheta_0' 0}{\vartheta_3 0}\right)^2 \left(\frac{\vartheta_2 y}{\vartheta y}\right)^2 = -E'\tfrac{1}{2}\pi + E'y, \\ \left(\frac{\vartheta_0' 0}{\vartheta_2 0}\right)^2 \left(\frac{\vartheta_3 y}{\vartheta y}\right)^2 = -E'(\tfrac{1}{2}\pi + \tfrac{1}{2}i\,lq) + E'y. \end{cases}$$

Aus denselben folgen dadurch, dafs man die erste zu jeder der beiden letztern addirt, die beiden folgenden Gleichungen:

$$\left(\frac{\vartheta_1' 0}{\vartheta 0}\right)^2 \left(\frac{\vartheta_1 y}{\vartheta y}\right)^2 + \left(\frac{\vartheta_1' 0}{\vartheta_3 0}\right)^2 \left(\frac{\vartheta_2 y}{\vartheta y}\right)^2 = E'0 - E'\tfrac{1}{2}\pi,$$

$$\left(\frac{\vartheta_1' 0}{\vartheta 0}\right)^2 \left(\frac{\vartheta_1 y}{\vartheta y}\right)^2 + \left(\frac{\vartheta_1' 0}{\vartheta_2 0}\right)^2 \left(\frac{\vartheta_3 y}{\vartheta y}\right)^2 = E'0 - E'(\tfrac{1}{2}\pi + \tfrac{1}{2}i\,lq).$$

Ohne (was übrigens keine Schwierigkeit macht) die einzelnen drei Werthe $E'0$, $E'\frac{1}{2}\pi$, $E'(\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}i\,lq)$ selbst zu bestimmen, kann man durch Einsetzung des besondern Werths $y = 0$, die Gleichungen in folgende umformen:

$$(15.)\quad \begin{cases} \left(\frac{\vartheta_3 0}{\vartheta_2 0}\right)^2 \left(\frac{\vartheta_1 y}{\vartheta y}\right)^2 + \left(\frac{\vartheta 0}{\vartheta_2 0}\right)^2 \left(\frac{\vartheta_2 y}{\vartheta y}\right)^2 = 1, \\ \left(\frac{\vartheta_2 0}{\vartheta_3 0}\right)^2 \left(\frac{\vartheta_1 y}{\vartheta y}\right)^2 + \left(\frac{\vartheta 0}{\vartheta_3 0}\right)^2 \left(\frac{\vartheta_3 y}{\vartheta y}\right)^2 = 1; \end{cases}$$

wodurch die bekannten lineären Relationen zwischen den Quadraten der drei Functionen

$$\left(\frac{\vartheta_1 y}{\vartheta y}\right), \quad \left(\frac{\vartheta_2 y}{\vartheta y}\right), \quad \left(\frac{\vartheta_3 y}{\vartheta y}\right)$$

gefunden sind.

Substituirt man die Werthe von $E'y$ und $E'x$, welche sich aus der Gleichung (14.) ergeben, in die Formel (13.), so erhält man folgende Grundformeln für die Functionen ϑ_1 und ϑ:

$$\frac{\vartheta_1(y+x)\vartheta_1(y-x)}{(\vartheta y)^2(\vartheta x)^2}(\vartheta' 0)^2 = \left(\frac{\vartheta_1 y}{\vartheta y}\right)^2 - \left(\frac{\vartheta_1 x}{\vartheta x}\right)^2,$$

und wenn man $y + \frac{1}{2}i\,lq$ statt y setzt:

$$(16.)\quad \frac{\vartheta(y+x)\vartheta(y-x)(\vartheta 0)^2}{(\vartheta y)^2(\vartheta x)^2} = 1 - \left(\frac{\vartheta_1 y}{\vartheta y}\right)^2 \left(\frac{\vartheta_1 x}{\vartheta x}\right)^2.$$

Ferner substituire man in der Gleichung (12.) für x_1 und x_2 die beiden Werthe

$$x \text{ und } \tfrac{1}{2}i\,lq - x.$$

Dann erhält man, nach leichter Reduction, die Formel

$$\frac{\vartheta_1(y+x)\vartheta(y-x)}{(\vartheta y)^2}\vartheta 0\,\vartheta_1' 0 = \Big[\frac{\vartheta(x-h)\vartheta_1(x+h)\vartheta_1(y+h)}{\vartheta(y-h)}\Big]_{h'},$$

oder, nach Bestimmung des Entwickelungscoëfficienten:

$$(17.)\qquad \frac{\vartheta_1(y+x)\vartheta(y-x)}{(\vartheta y)^2(\vartheta x)^2}\vartheta 0\,\vartheta_1' 0 = \frac{\vartheta_1 y}{\vartheta y}\frac{d\left(\frac{\vartheta_1 x}{\vartheta x}\right)}{dx} + \frac{\vartheta_1 x}{\vartheta x}\frac{d\left(\frac{\vartheta_1 y}{\vartheta y}\right)}{dy}.$$

Setzt man hierin zuerst $y = x$, und dann $x = \frac{1}{2}\pi$, so erhält man, da $\vartheta_1 \pi = 0$ ist, auch

$$\frac{d\frac{\vartheta_1 x}{\vartheta x}}{dx} = 0,$$

wenn darin $x = \frac{1}{2}\pi$ gesetzt wird. Setzt man daher in derselben Gleichung (17.) $x = \frac{1}{2}\pi$, so erhält man die sehr wichtige Gleichung

$$(18.)\qquad \frac{d\frac{\vartheta_1 y}{\vartheta y}}{dy} = \frac{\vartheta_1' 0.\vartheta 0}{\vartheta_2 0.\vartheta_3 0}\cdot\frac{\vartheta_2 y}{\vartheta y}\cdot\frac{\vartheta_3 y}{\vartheta y},$$

welche den Differentialquotienten der Function $\frac{\vartheta_1 y}{\vartheta y}$ als ein Product der beiden Functionen $\frac{\vartheta_2 y}{\vartheta y}$ und $\frac{\vartheta_3 y}{\vartheta y}$ und einer Constante darstellt.

Wenn man endlich die beiden Seiten der Gleichung (17.) durch die respectiven Glieder der Gleichung (16.) dividirt, nachdem man in jener rechts die Differentialquotienten:

$$\frac{d\frac{\vartheta_1 x}{\vartheta x}}{dx}, \qquad \frac{d\frac{\vartheta_1 y}{\vartheta y}}{dy},$$

mittels der Formel (18.) durch die Functionen $\frac{\vartheta_2 x}{\vartheta x}$, $\frac{\vartheta_3 x}{\vartheta x}$, $\frac{\vartheta_2 y}{\vartheta y}$, $\frac{\vartheta_3 y}{\vartheta y}$ ausgedrückt hat, so gelangt man zu der Formel

$$\frac{\vartheta_2 0.\vartheta_3 0}{\vartheta 0.\vartheta 0}\,\frac{\vartheta_1(y+x)}{\vartheta(y+x)} = \frac{\frac{\vartheta_1 y}{\vartheta y}\frac{\vartheta_2 x}{\vartheta x}\frac{\vartheta_3 x}{\vartheta x} + \frac{\vartheta_1 x}{\vartheta x}\frac{\vartheta_2 y}{\vartheta y}\frac{\vartheta_3 y}{\vartheta y}}{1-\left(\frac{\vartheta_1 y}{\vartheta y}\right)^2\left(\frac{\vartheta_1 x}{\vartheta x}\right)^2},$$

welche das gesuchte Additionstheorem für die Function $\frac{\vartheta_1 y}{\vartheta y}$ in sich schliefst

und auf folgende Art in die, in den „Fundamenten" (§. 18.) zuerst gegebene Form übergeht.

Die Gleichungen (15. u. 18.), verbunden mit der Natur der Function $\vartheta_1 y$ gestatten, dafs man:

$$\frac{\vartheta_3 0}{\vartheta 0}\,\frac{\vartheta_1 x}{\vartheta x} = \sin\mathrm{am}\,\frac{2h'x}{\pi},$$

$$\frac{\vartheta 0}{\vartheta_2 0}\,\frac{\vartheta_2 x}{\vartheta x} = \cos\mathrm{am}\,\frac{2h'x}{\pi},$$

$$\frac{\vartheta 0}{\vartheta_3 0}\,\frac{\vartheta_3 x}{\vartheta x} = \Delta\,\mathrm{am}\,\frac{2h'x}{\pi}$$

setzt, wenn $\frac{\vartheta_2 0}{\vartheta_3 0} = \sqrt{k}$ und $\frac{\vartheta_3 0\,\vartheta_1' 0}{\vartheta 0\,\vartheta_2 0} = \frac{2h'}{\pi}$ angenommen wird. Substituirt man diese Ausdrücke in die Gleichung, so geht dieselbe unmittelbar in die erste Formel des (§. 18.) der „Fundamente" über.

Die Idee, aus den Eigenschaften der Functionen $\vartheta\vartheta$ zu dem Additionstheorem der elliptischen Functionen zu gelangen, ist bekanntlich auch zuerst von *Jacobi* aufgestellt, und zwar aus den Reihen-Entwickelungen der einzelnen vier Functionen selbst, durch die einfachsten Betrachtungen abgeleitet worden. In der Folge haben verschiedene Mathematiker diesen Weg zur Begründung der Theorie benutzt; doch glaube ich, dafs die Herleitung jenes Fundamentaltheorems aus der Gleichung (4.), oder einer ihr ähnlichen, bisher nicht gemacht ist, und bemerke nur noch, dafs ich mich jeder nähern und weitern Ausführung enthalten habe, da mein Zweck hier nur war, zu zeigen, wie im beinahe einfachsten Fall der Gleichung (5.) dies wichtige Theorem enthalten ist.

Königsberg, im August 1854.

4.

Über die Bewegung des Raumpendels mit Rücksicht auf die Rotation der Erde.

(Von Herrn *W. Dumas,* Schulamts-Candidaten, früher Mitglied des mathematisch-physicalischen Seminars zu Königsberg in Preufsen.)

Vorwort.

Nachdem die Theorie der Pendelschwingungen von den ausgezeichnetsten Analysten nach allen Seiten hin gründlich untersucht zu sein schien, war es etwas Überraschendes, als im Jahre 1851 *Foucault* bei seinen Pendelversuchen eine Störung des Pendels durch die Drehung der Erde nachwies, deren Einflufs auf die Bewegung schwerer Körper an der Erd-Oberfläche früher gar nicht etwa übersehen worden war. Schon *Gaufs* und *Poisson* haben die Gleichungen der Bewegung materieller Puncte, mit Rücksicht auf die Drehung und Gestalt der Erde, entwickelt, und insbesondere hat *Poisson* in seinen darauf sich beziehenden Abhandlungen im 16. Bande des Journals der polytechnischen Schule „über die Bewegung der Projectile in der Luft, mit Rücksicht auf die Bewegung der Erde" nicht vergessen, dabei des Pendels zu gedenken. Er weiset nach, dafs die Länge des einfachen Secundenpendels nicht geändert wird, und sagt dann in Bezug auf die Drehung der Schwingungs-Ebene „dafs die Kraft, welche auf das Pendel normal zu dieser Ebene wirkt, zu klein sei, um es merklich aus derselben abzulenken und irgend einen abschätzbaren Einflufs auf die Bewegung zu haben." Es war daher von grofsem Interesse, den von *Foucault* experimental nachgewiesenen Einflufs aus der analytischen Mechanik abzuleiten; was auch in der That sogleich nach der Entdeckung des Phänomens durch mehrere Mathematiker geschahe: zuerst durch *Binet* in den Comptes rendus vom 10. Febr. 1851, aber nur für *kleine* Schwingungen. Später erschien in den Schriften der *Danziger* naturforschenden Gesellschaft, 5. Bd. 1. Heft, 1853, eine auf diesen Gegenstand bezügliche Abhandlung von *Hansen* in *Gotha,* in welcher der berühmte Verfasser das in Rede stehende Erperiment *Foucaults* in demselben Sinne, jedoch nach allen Beziehungen, die dabei von Einflufs sein können, vollständig behandelt.

Dafs ich demungeachtet meine hier folgende Abhandlung der Bekanntmachung werth erachte, liegt einerseits darin, dafs sie lange vor dem Erscheinen der vorhin gedachten Arbeit entstanden und ehe mir letztere zu Gesicht kam gegenwärtig nur durch wenige Zusätze verändert worden ist; andererseits aber würde ich auch *nach* der Kenntnifsnahme von jener schönen Abhandlung, die meinige gar nicht modificirt haben, da mein Zweck von dem jener völlig verschieden ist.

Denn, von der Ansicht, die durch die Resultate aller bekannt gewordenen Beobachtungen bestätigt worden ist, ausgehend, dafs das Experiment kaum das einfache Sinus-Gesetz mit erträglicher Sicherheit darzustellen vermag, eine genaue Beobachtung der gesetzmäfsigen Abweichungen von demselben aber unmöglich zu sein scheint; habe ich gar nicht sowohl nach möglichst vollständiger Berücksichtigung aller bei den Schwingungen wirklicher physischer Pendel vorkommenden Umstände gestrebt, sondern im Gegentheil mich auf das mathematische Raumpendel beschränkt, und an diesem die Wirkung der durch die Rotation modificirten irdischen Schwere in ihrem ganzen Umfange nachzuweisen gesucht. Ich habe dabei also keine Rücksicht auf die Störungen genommen, welche die physischen Pendel durch den Widerstand der Atmosphäre einerseits, und durch die den idealen Voraussetzungen nicht entsprechende Aufhängung andererseits erleiden; um so mehr, als insbesondere die ersteren nach keinen sichern Principien sich schätzen lassen. Ich habe mich dagegen nicht auf die Betrachtung der *kleinen* Schwingungen allein beschränkt, wie es in allen genannten Arbeiten geschieht, sondern die Theorie der Variation der Constanten auf *beliebig grofse* Schwingungen angewendet und erst aus den allgemeinen Formeln die speciellen Fälle des ebenen Pendels, und eines solchen mit kleinen Excursionen, abgeleitet.

Dies ist eine Art der Behandlung des Problems, die *Lagrange* noch nicht ausführen konnte, da er in der „Mécanique analytique" die Aufgabe des Raumpendels, eben so wie verwandte, schwierigere Aufgaben, die Rotation eines festen Körpers um einen Punct betreffend, nur auf elliptische Integrale *zurückzuführen* und dann mit einem *Näherungsverfahren* sich begnügen mufste. Er hinterliefs den Nachfolgern die Aufgabe, auf welche die Weiterführung der erwähnten Probleme beruht: durch Umkehrung der Integrale und Betrachtung der daraus entspringenden Functionen die Integralrechnung zu vervollkommnen. Daher sind es denn die berühmten Urheber der Theorie der elliptischen Functionen, *Jacobi* und *Abel,* denen die analytische Mechanik

ihre weitere Ausbildung verdankt; und insbesondere ist es der erste, der nach *Abels* so frühem Tode die Entwickelung der elliptischen Functionen in Reihen, welche wegen ihrer sehr starken Convergenz endlichen Ausdrücken fast gleichstehen, zu seinem unvergänglichen Denkmale sich gesetzt hat. Noch aber hat diese Theorie nicht so vielfache Anwendung in der analytischen Mechanik gefunden, wie sie einst deren fähig sein dürfte, wenn die Hindernisse, welche sie noch auf eine ziemlich geringe Anzahl von Problemen beschränken, überwunden sein werden.

Zuerst hat ein Beispiel solcher Anwendungen *Sohnke* in *Königsberg* in einer Dissertation, ein der Theorie der Störungen angehöriges Problem betreffend „Die Bewegung der Himmelskörper im widerstehenden Mittel" gegeben (*Crelle's* Journ. Bd. 10. 1833), wo er die für die Variationen der Constanten der elliptischen Bahnen gefundenen Ausdrücke in Reihen nach Sinus und Cosinus der Vielfachen der *Zeit* mittels der elliptischen Functionen entwickelt, und dadurch zu ihrer Integration gelangt. Ein Jahr später hat *Rueb* die berühmte Aufgabe der Rotation eines festen Körpers, auf welchen keine äufseren Kräfte wirken (die von *Legendre* schon auf elliptische Integrale zurückgeführt worden war) zum Gegenstande einer Abhandlung gemacht, in der es ihm gelingt, durch Umkehrung der Integrale die drei Winkel, auf deren Bestimmung es ankommt, und eben so drei von den neun Coëfficienten, welche das im Körper feste Haupt-Axensystem auf ein im Raum festes System beziehen, als explicite Functionen der *Zeit* auszudrücken, während ihm eine ähnliche Behandlung der übrigen sechs Coëfficienten noch auf unausführbare Rechnungen zu führen scheint. Nach *Rueb* hat wieder ein *Königsberger* Mathematiker, *Durège*, auf *Richelots* Veranlassung, in einer noch ungedruckten Abhandlung, die Aufgabe des Raumpendels von dem *Lagrange*schen Standpuncte aus, bis auf einen ähnlichen Punct, wie *Rueb* die vorige Aufgabe, gebracht, da auch er nicht die Coordinaten des das Pendel bildenden Punctes als Functionen der *Zeit* ausgedrückt hat. Eben so wenig ist Dies in einer gleichzeitigen Abhandlung von *Gudermann* (*Crelle's* Journ. Bd. 38.) über denselben Gegenstand geschehen.

Das erste Beispiel einer *vollständigen* Behandlung hat daher wieder *Jacobi* selbst gegeben, indem er in seiner letzten Abhandlung über die Rotation (*Crelle's* Journ. 39.) die seit der Mitte des vorigen Jahrhunderts von den berühmtesten Geometern diesem Gegenstande gewidmeten Untersuchungen

zu einem endlichen Abschlusse gebracht hat, der jeden Gedanken an eine fernere Vervollkommnung abschneidet.

Durch die wiederholten Vorträge *Richelots* über die Theorie der elliptischen Functionen, die Dynamik und die Variation der Constanten wurde nun ich in den Stand gesetzt, einige an die erwähnten Arbeiten sich anschliefsende Aufgaben abzuhandeln. Nachdem *Richelot* in einem Falle der Rotation mit Wirkung äufserer Kräfte, dem sogenannten *Lagrange*schen Falle, eine ähnliche Form der Lösung erkannt hatte, wie sie *Jacobi* für die Rotation ohne äufsere Kräfte gefunden hatte, veranlafste er zuerst mich zu der Behandlung dieses Problems; welche ich darauf auf einen ähnlichen Grad der Vollständigkeit zu bringen suchte. Später nahm ich, wieder auf meines verehrten Lehrers *Richelot* Anregung, aus dem allgemeinen Interesse, welches die *Foucault*sche Entdeckung erregt hatte, Anlafs, mit Hülfe der Theorie der elliptischen Functionen die Variation der Constanten auf das Raumpendel anzuwenden; was in gleicher Weise mit dem genannten *Lagrange*schen Problem hätte geschehen können, von welchem das sphärische Pendel nur ein specieller Fall ist, und welches nur den Umfang der Rechnungen, nicht die mathematischen Schwierigkeiten vermehrt hätte.

So entstand die vorliegende Abhandlung, die ihren Werth, wenn sie irgend einen solchen hat, nur darin sucht, dafs sie die Nützlichkeit der elliptischen Functionen auch für Anwendungen auf Mechanik an einem neuen Beispiele zeigt.

I.

Poisson stellt a. a. O. die dynamischen Differentialgleichungen der Bewegung eines schweren Puncts auf einer beliebigen, mit der Oberfläche der Erde fest verbundenen Fläche auf. Bezieht man diese Bewegung auf ein rechtwinkliges Axensystem x, y, z, dessen Anfangspunct in dem festen Aufhängepuncte des Pendels, dessen z-Axe vertical nach ***unten***, die y-Axe horizontal nach ***Norden***, die x-Axe horizontal nach ***Westen*** gerichtet ist, und bezeichnet durch n die Winkelgeschwindigkeit der Erde um ihre Axe, durch β die Breite des Beobachtungs-Ortes (nördlich positiv, südlich negativ), durch dt das Element der ***Zeit***, durch L die Gleichung der gegebenen Fläche und durch λ endlich einen unbestimmten Coëfficienten: so sind die von ***Poisson*** angegebenen Differentialgleichungen folgende:

$$(1.)\quad \begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = \lambda\cdot\frac{\partial L}{\partial x} - 2n.\left(\sin\beta\cdot\frac{dy}{dt} + \cos\beta\frac{dz}{dt}\right), \\ \frac{d^2y}{dt^2} = \lambda\cdot\frac{\partial L}{\partial y} + 2n.\sin\beta\cdot\frac{dx}{dt}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} = g + \lambda\cdot\frac{\partial L}{\partial z} + 2n.\cos\beta\cdot\frac{dx}{dt}. \end{cases}$$

Im vorliegenden Falle des Pendels kann man, wenn r die Länge desselben ist:

$$L = (x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}} - r,$$

also statt $\frac{\partial L}{\partial x}$, $\frac{\partial L}{\partial y}$, $\frac{\partial L}{\partial z}$ beziehlich $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$, $\frac{z}{r}$ setzen; wo dann λ den Druck angiebt, den der feste Aufhängepunct zu erleiden hat.

Bei der Ableitung dieser Gleichungen sind alle Glieder, die den Factor n^2 haben, vernachlässigt. Dennoch läfst sich ihre Integration nicht auf Quadraturen zurückführen, sondern die Aufgabe nur durch Näherungsmethoden lösen, wobei man, wenn n eine kleine Gröfse erster Ordnung ist, auch nur Glieder von dieser Ordnung wird behalten dürfen. Man kann daher die in n multiplicirten Glieder

$$(2.)\quad \begin{cases} -2n\left(\sin\beta\cdot\frac{dy}{dt} + \cos\beta\frac{dz}{dt}\right) = U_x, \\ +2n\sin\beta\cdot\frac{dx}{dt} = U_y, \\ +2n\cos\beta\cdot\frac{dx}{dt} = U_z \end{cases}$$

als *störende Kräfte* ansehen und ihre Wirkung mittels Variation der Constanten des einfachen Pendels bestimmen, dessen Bewegungsgleichungen

$$(3.)\quad \begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = \lambda\frac{x}{r}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} = \lambda\frac{y}{r}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} = \lambda\frac{z}{r} + g \end{cases}$$

sind. Um die bekannten Integralgleichungen dieses Systems mit denjenigen Constanten zu finden, welche zur Variation am geeignetsten sind, werde ich sie auf die von *Hamilton* und *Jacobi* gezeigte Art ableiten; mit Benutzung des folgenden von *Jacobi* aufgestellten Theorems (S. *Richelot* „Über Rotation etc." in den Abhandlungen d. Berl. Akad. v. J. 1850):

Sind die n Bewegungsgleichungen eines freien Systems materieller Puncte, mit den Coordinaten x, y, z, x_1, y_1, z_1, etc. folgende:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = m\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial \Omega}{\partial x},$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = m\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial \Omega}{\partial y},$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} = m\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial \Omega}{\partial z},$$
$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = m_1\frac{\partial U}{\partial x_1} + \frac{\partial \Omega}{\partial x_1}, \quad \text{etc.}$$

so dafs m, m_1, etc. die Massen der resp. Puncte, U die Kräftefunction und Ω die Störungsfunction bezeichnen, und ist V eine vollständige Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\Sigma\frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right\} - U - h = 0,$$

(wo die Summe auf alle Puncte des Systems auszudehnen ist), mit den $n-1$ willkürlichen Constanten

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n-1},$$

während

$$\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{n-1}, \tau$$

beliebige neue Constanten bezeichnen, so sind nicht nur

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{\partial V}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \quad \ldots \quad \frac{\partial V}{\partial \alpha_{n-1}} = \beta_{n-1}, \quad \frac{\partial V}{\partial h} = t + \tau$$

die endlichen Integralgleichungen des ungestörten Problems, dessen Differentialgleichungen aus den obigen dadurch folgen, dafs man $\Omega = 0$ setzt, mit den $2n$ willkürlichen Constanten:

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots\ \alpha_{n-1},\ h,$$
$$\beta_1,\ \beta_2,\ \ldots\ \beta_{n-1},\ \tau,$$

sondern es haben diese Constanten auch die Eigenschaft, dafs sie, als Variabeln in das gestörte Problem eingeführt, folgende Differentialgleichungen geben:

$$\frac{d\alpha_1}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial\beta_1},\quad \frac{d\alpha_2}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial\beta_2},\quad \ldots\quad \frac{\partial\alpha_{n-1}}{\partial t} = \frac{\partial\Omega}{\partial\beta_{n-1}},\quad \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial\Omega}{\partial\tau},$$
$$\frac{d\beta_1}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_1},\quad \frac{d\beta_2}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_2},\quad \ldots\quad \frac{\partial\beta_{n-1}}{\partial t} = -\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_{n-1}},\quad \frac{d\tau}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial h}.$$

II.

Wenn keine Störungsfunction, sondern, wie in dem vorliegenden Falle, nur einzelne Störungsglieder U_x, U_y, etc. existiren, so tritt an die Stelle von $\frac{\partial U}{\partial\alpha}$ die Gröfse $U_x\frac{\partial x}{\partial\alpha} + U_y\frac{\partial y}{\partial\alpha} + \ldots = U_\alpha$, in welcher für α eine der obigen $2n$ Constanten zu setzen ist.

Wenn aufserdem die Coordinaten ***Bedingungsgleichungen*** genügen müssen, so hat man neue Variabeln ξ, ξ_1, ξ_2, ... einzuführen, welche dieselben *identisch* erfüllen, solche in die Gröfse

$$T = \Sigma\tfrac{1}{2}m\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\}$$

zu setzen, durch partielle Differentiation derselben nach $\frac{d\xi_1}{dt}$, $\frac{d\xi_2}{dt}$, etc. die Gleichungen

$$\frac{\partial V}{\partial\xi} = \frac{\partial T}{\partial\left(\frac{d\xi}{dt}\right)},$$
$$\frac{\partial V}{\partial\xi_1} = \frac{\partial T}{\partial\left(\frac{d\xi_1}{dt}\right)}$$

etc.

zu bilden, und mittels dieser, welche in Bezug auf die Differentialquotienten $\frac{d\xi}{dt}$ etc. lineär sind, die letztern aus dem Ausdrucke von T zu eliminiren. Dann wird die Gleichung

$$T - U - h = 0$$

zu einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung und zweiten Grades in Bezug auf die neuen Variabeln ξ, ξ_1, etc.; mit denselben ausgezeichneten Eigenschaften, wie die oben angegebene Differentialgleichung.

III.

In vorliegendem Falle des Pendels sind die Variabeln, welche die Statt findende Bedingungsgleichung

$$xx + yy + zz - rr = 0$$

identisch erfüllen, die Polarcoordinaten

$$(4.) \quad \begin{cases} x = r \sin\varphi \sin\psi, \\ y = r \cos\varphi \sin\psi, \\ z = r \cos\psi; \end{cases}$$

wo ψ der kleinste Winkel zwischen dem Pendel und der positiven halben Axe der z, φ der Winkel zwischen der Projection des Pendels auf die Horizontale und der positiven halben Axe der y ist; von dieser zur positiven x-Axe bis 360^0 und darüber hinaus gezählt. Setzt man demgemäfs in den Ausdruck von T:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= r\cos\psi\sin\varphi\cdot\frac{d\psi}{dt} + r\sin\psi\cos\varphi\cdot\frac{d\varphi}{dt}, \\ \frac{dy}{dt} &= r\cos\psi\cos\varphi\cdot\frac{d\psi}{dt} - r\sin\psi\sin\varphi\cdot\frac{d\varphi}{dt}, \\ \frac{dz}{dt} &= -r\sin\psi\cdot\frac{d\psi}{dt}, \end{aligned}$$

so ergiebt sich

$$T = \tfrac{1}{2} r^2 \left\{ \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + \sin^2\psi \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \right\},$$

und hieraus, durch Differentiation nach den Differentialquotienten:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \psi} &= r^2 \frac{d\psi}{dt}, \\ \frac{\partial V}{\partial \varphi} &= r^2 \sin^2\psi \cdot \frac{d\varphi}{dt}. \end{aligned}$$

Da aufserdem die Kräftefunction

$$U = gz = gr\cos\psi$$

ist, so erhält man die partielle Differentialgleichung

$$\frac{1}{2r^2}\left\{ \left(\frac{\partial V}{\partial \psi}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2\psi}\left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)^2 \right\} - gr\cos\psi - h = 0.$$

Um dieselbe zu integriren kann man

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = \text{const.} = l$$

setzen, und findet dann durch Auflösung nach $\frac{\partial V}{\partial \psi}$:

$$\frac{\partial V}{\partial \psi} = \pm\sqrt{\left(\frac{(h+gr\cos\psi).2r^2\sin^2\psi - l^2}{\sin^2\psi}\right)},$$

mithin wird

$$V = l\varphi \pm \int^{\psi} d\psi \sqrt{\left(\frac{(h+gr\cos\psi).2r^2\sin^2\psi - l^2}{\sin^2\psi}\right)},$$

oder, wenn man z wieder statt $r\cos\psi$ einführt:

$$V = l\varphi \mp \int^{z} r dz \frac{\sqrt{(2(h+gz)(r^2-z^2)-l^2)}}{r^2-z^2}.$$

Für die untere Grenze des Integrals kann man eine Function der Constanten h und l setzen; also unter andern eine Wurzel der Gleichung

$$2(h+gz)(r^2-z^2) - l^2 = 0,$$

die bekanntlich stets drei reelle Wurzeln hat. Bezeichnet man selbige der Gröfse nach durch

$$ra \ldots > \ldots rb \ldots > \ldots rc,$$

so liegen a und b zwischen $+1$ und -1, c zwischen -1 und $-\infty$; und da für Werthe von z, die aufserhalb des Intervalls ra bis rb liegen, die Wurzelgröfse in V imaginär wird, so ist es dies Intervall, in welchem z von einer Grenze zur andern oscillirt. Die Wurzel ra ist diejenige, die für die untere Grenze des Integrals in V angenommen werden soll. Differentiirt man dann die Function V nach den Constanten h und l, so erhält man für die Integralgleichungen der Differentialgleichungen des Raumpendels nach Einführung zweier neuen Constanten t_0 und φ_0 folgende:

$$(5\,a.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial h} = \mp\displaystyle\int_{ra}^{z} \frac{r dz}{\sqrt{(2(gz+h)(r^2-z^2)-l^2)}} = t - t_0, \\ \dfrac{\partial V}{\partial l} = \varphi \pm\displaystyle\int_{ra}^{z} \frac{r dz}{\sqrt{(2(gz+h)(r^2-z^2)-l^2)}} = \varphi_0. \end{cases}$$

Es ist klar, dafs die Constanten

$$t_0 \ldots ra \ldots \varphi_0$$

ein System gleichzeitiger Werthe der Variabeln

$$t \ldots z \ldots \varphi$$

sind. Eben so ist die mechanische Bedeutung der Constanten h und l ersichtlich; nämlich, dafs h zum Satze von der ***Erhaltung der lebendigen Kraft***, l zu dem ***Flächensatze*** in Bezug auf die horizontale Ebene gehört, und zwar so, dafs

$$(5\,b.)\qquad \begin{cases} \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\}-gz = h, \\ y\frac{dx}{dt}-x\frac{dy}{dt} = l \end{cases}$$

ist, wo h und l durch den Anfangszustand des Pendels bestimmt sind.

Führt man nun die Constanten h, l, t_0, φ_0 als Variablen in das gestörte Problem ein, so sind zufolge des oben citirten Theorems die umgeformten Differentialgleichungen folgende:

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= -U_{t_0} = -\left\{U_x\frac{\partial x}{\partial t_0}+U_y\frac{\partial y}{\partial t_0}+U_z\frac{\partial z}{\partial t_0}\right\}, \\ \frac{dl}{dt} &= +U_{\varphi_0} = +\left\{U_x\frac{\partial x}{\partial \varphi_0}+U_y\frac{\partial y}{\partial \varphi_0}+U_z\frac{\partial z}{\partial \varphi_0}\right\}, \\ \frac{dt_0}{dt} &= +U_h = +\left\{U_x\frac{\partial x}{\partial h}+U_y\frac{\partial y}{\partial h}+U_z\frac{\partial z}{\partial h}\right\}, \\ \frac{d\varphi_0}{dt} &= -U_l = -\left\{U_x\frac{\partial x}{\partial l}+U_y\frac{\partial y}{\partial l}+U_z\frac{\partial z}{\partial l}\right\}, \end{aligned}$$

oder, wenn man für U_x, U_y, U_z ihre oben angegebenen Werthe substituirt und zur Abkürzung

$$(6\,a.)\qquad \begin{cases} U_i^{(xy)} = \frac{\partial y}{\partial i}\frac{dx}{dt}-\frac{\partial x}{\partial i}\frac{dy}{dt}, \\ U_i^{(xz)} = \frac{\partial z}{\partial i}\frac{dx}{dt}-\frac{\partial x}{\partial i}\frac{dz}{dt} \end{cases}$$

setzt, wo i eine beliebige von den vier Constanten bedeutet:

$$(6\,b.)\qquad \begin{cases} \frac{dh}{dt} = -\{2n\sin\beta\,U_{t_0}^{(xy)}+2n\cos\beta\,U_{t_0}^{(xz)}\}, \\ \frac{dl}{dt} = +\{2n\sin\beta\,U_{\varphi_0}^{(xy)}+2n\cos\beta\,U_{\varphi_0}^{(xz)}\}, \\ \frac{dt_0}{dt} = +\{2n\sin\beta\,U_h^{(xy)}+2n\cos\beta\,U_h^{(xz)}\}, \\ \frac{d\varphi_0}{dt} = -\{2n\sin\beta\,U_l^{(xy)}+2n\cos\beta\,U_l^{(xz)}\}. \end{cases}$$

In diesen Gleichungen müssen die Gröfsen rechts als Functionen der ***Zeit*** und der ***Constanten*** ausgedrückt werden, welche letztere dann zum Zweck einer näherungsweisen Integration als wirkliche Constanten angesehen werden.

Da die Gröfse t_0 nur additiv mit t verbunden vorkommt, so ist U_{t_0} identisch gleich 0, d. h. es gilt auch für das gestörte Problem der Satz von der Erhaltung der Kraft; wie es in der That aus dem blofsen Anblick der ursprünglichen Differentialgleichungen erhellet. Um die drei andern Gröfsen U_i in der verlangten Form zu finden, mufs man zunächst aus den Integralgleichungen (5.) des ungestörten Pendels die Coordinaten x, y, z als Functionen der *Zeit* ausdrücken, wozu die Theorie der elliptischen Functionen bekanntlich die Mittel gewährt.

Aus der Natur der algebraischen Gleichungen folgt:

$$(7\,a.)\qquad 2(gz+h)(r^2-z^2)-l^2 = 2g(ra-z)(z-rb)(z-rc),$$

welches eine identische Gleichung ist, wenn man a, b, c als Functionen von h und l ausgedrückt sich vorstellt. Setzt man demnach $z=\mp r$ hinein, so ergiebt sich:

$$(7\,b.)\qquad \begin{cases} -l^2 = -2gr^3.(1-a)(1-b)(1-c), \\ -l^2 = +2gr^3.(1+a)(1+b)(1+c); \end{cases}$$

woraus durch Elimination von l^2 zwischen den Wurzeln a, b, c die Relation

$$(7.\,c.)\qquad 0 = 1+ab+ac+bc$$

folgt. Die Gröfse l selbst kann positiv und negativ sein; je nach dem Anfangs-Impulse. Daher mufs man

$$(7\,d.)\qquad \frac{l}{\sqrt{(2gr^3)}} = \mp\sqrt{((1-a)(1-b)(1-c))} = \mp\sqrt{(-(1+a)(1+b)(1+c))}$$

setzen, und es soll in der Folge stets von doppelten Zeichen das untere auf den Fall $l>0$, das obere auf den Fall $l<0$ bezogen werden. Nach der Bedeutung von l ist es klar, dafs der erstere Fall bei links drehender Bewegung der Projection des Pendels, der zweite bei rechts drehender Statt findet.

Setzt man nun mit *Lagrange* (Mécan. anal.):

$$z = ra\cos^2\sigma + rb\sin^2\sigma,$$

so erhält man

$$\begin{aligned} ra-z &= r(a-b)\sin^2\sigma, \\ z-rb &= r(a-b)\cos^2\sigma, \\ z-rc &= r(a-c)\left\{1-\frac{a-b}{a-c}\sin^2\sigma\right\}, \\ dz &= -2r(a-b).\sin\sigma\cos\sigma\,d\sigma, \end{aligned}$$

und wegen der Gleichung (7.):

$$2(gz+h)(r^2-z^2)-l^2 = 2gr^3.(a-b)^2(a-c)\sin^2\sigma\cos^2\sigma\left(1-\frac{a-b}{a-c}\sin^2\sigma\right)$$

und da $\sigma = 0$ statt $z = ra$ gesetzt werden kann, nach (5 *a.*):

$$t - t_0 = \int_0^{\sigma} \sqrt{\left(\frac{r}{g}\,\frac{2}{(a-c)}\right)} \frac{\varepsilon\, d\sigma}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{a-b}{a-c}\right)\sin^2\sigma\right]}},$$

wo $\varepsilon = \mp 1$ unabhängig von dem Zeichen von t sein soll.

Nun ist, wegen der angenommenen Reihenfolge der Wurzeln, $\left(\frac{a-b}{a-c}\right)$ stets ein echter positiver Bruch, mithin die Wurzelgröfse niemals $= 0$, und ε stets entweder $+1$ oder -1. Man setze $\varepsilon = +1$, d. h. σ zugleich mit t ***wachsend.*** Setzt man dann zur Abkürzung:

$$\sqrt{\frac{g(a-c)}{2r}} = m, \quad \sqrt{\frac{a-b}{a-c}} = \varkappa, \quad \sqrt{\frac{b-c}{a-c}} = \sqrt{(1-\varkappa^2)} = \varkappa', \quad m(t-t_0) = u,$$

so ist nach der von ***Jacobi*** (in den Fund. novis etc.) eingeführten Bezeichnungsweise:

$$\sigma = \operatorname{am}(u, \varkappa), \quad \text{oder kürzer} \quad \sigma = \operatorname{am} u,$$

und daher

$$(8\,a.) \qquad \begin{cases} z = r(a\cos^2 \operatorname{am} u + b \sin^2 \operatorname{am} u) \\ \quad = r\{a - (a-b)\sin^2 \operatorname{am} u\}. \end{cases}$$

Ferner ist:

$$\arg \operatorname{am} \tfrac{1}{2}\pi \pmod{\varkappa} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-\varkappa^2 \sin^2\varphi)}} = K,$$

$$\arg \operatorname{am} \tfrac{1}{2}\pi \pmod{\varkappa'} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-\varkappa'^2 \sin^2\varphi)}} = K',$$

mithin ist

$$T = \frac{1}{m} \cdot K$$

die constante ***Zeit,*** in welcher z von einem Maximum m bis zu dem nächsten Minimum rb sinkt, oder umgekehrt; d. h. $4T$ ist die der ***Dauer einer Schwingung hin und her*** des ebenen Pendels entsprechende ***Zeit.***

Die zweite Integralgleichung (5 *a.*) giebt, wenn man dt statt dz einführt:

$$\varphi - \varphi_0 = \int_{t_0}^{t} \frac{l\,dt}{r^2 - z^2} = \int_{t_0}^{t} \left(\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{l}{r}}{r+z} + \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{l}{r}}{r-z}\right) dt$$

und, wenn man u statt z und t setzt, so ergiebt sich:

$$\varphi - \varphi_0 = \int_0^{u} \left\{ \frac{\frac{l}{2r^2 m(1+a)}}{1 - \frac{a+b}{1+a}\sin^2 \operatorname{am} u} + \frac{\frac{l}{2r^2 m(1-a)}}{1 + \left(\frac{a-b}{1-a}\right)\sin^2 \operatorname{am} u} \right\} du.$$

Diese Integrale gehören zu den von ***Legendre*** sogenannten Integralen mit *circulairem* ***Parameter.*** Setzt man, mit Einführung zweier neuer Constanten, a_1, a_2:

$$\frac{a-b}{1+a} = \varkappa^2 \sin^2 \mathrm{am}(K+ia_1),$$

$$-\frac{a-b}{1-a} = \varkappa^2 \sin^2 \mathrm{am}\, ia_2,$$

(wo $i=\sqrt{-1}$ ist), so sind a_1 und a_2 ***reell,*** und man kann, da nur die Quadrate ihrer elliptischen Functionen bestimmt sind, annehmen, dafs erstlich beide zwischen $+K' \cdots -K'$ liegen und zweitens mit l in den Zeichen übereinstimmen.

Unter diesen Voraussetzungen hat man dann, wenn der bequemern Schreib-Art wegen sin am, cos am, Δam mit den von ***Gudermann*** eingeführten Zeichen sn, cn, dn vertauscht werden:

$$(9.)\quad \begin{cases} \mathrm{sn}\,(K+ia_1) = +\sqrt{\dfrac{a-c}{1+a}}, & \mathrm{sn}\, ia_2 = \mp\sqrt{\dfrac{a-c}{1-a}}, \\ \mathrm{cn}\,(K+ia_1) = \pm i\sqrt{\dfrac{-1-c}{1+a}}, & \mathrm{cn}\, ia_2 = +\sqrt{\dfrac{1-c}{1-a}}, \\ \mathrm{dn}\,(K+ia_1) = +\sqrt{\dfrac{1+b}{1+a}}, & \mathrm{dn}\, ia_2 = +\sqrt{\dfrac{1-b}{1-a}}, \end{cases}$$

folglich erhält man:

$$\frac{l}{2r^2 m(1+a)} = \frac{\mp\sqrt{(-(1+a)(1+b)(1+c))}}{\sqrt{(a-c)(1+a)}} = +i\cdot\frac{\mathrm{cn}\,K+ia_1\,\mathrm{dn}\,K+ia_1}{\mathrm{sn}\,K+ia_1},$$

$$\frac{l}{2r^2 m(1-a)} = \frac{\mp\sqrt{((1-a)(1-b)(1-c))}}{\sqrt{(a-c)(1-a)}} = +i\cdot\frac{\mathrm{cn}\,ia_2\,\mathrm{dn}\,ia_2}{\mathrm{sn}\,ia_2}$$

und

$$\varphi-\varphi_0 = \int_0^u du \left\{ \frac{i\,\mathrm{cn}\,K+ia_1\,\mathrm{dn}\,K+ia_1}{\mathrm{sn}\,K+ia_1} \Big/ \left(1-\varkappa^2\,\mathrm{sn}^2\,K+ia_1\,\mathrm{sn}^2 u\right) + \frac{i\,\mathrm{cn}\,ia_2\,\mathrm{dn}\,ia_2}{\mathrm{sn}\,ia_2} \Big/ \left(1-\varkappa^2\,\mathrm{sn}^2\,ia_2\,\mathrm{sn}^2 u\right) \right\}.$$

Nach der von ***Jacobi*** in der oben erwähnten Abhandlung (*Crelle's* Journ. Bd. 39.) gegebenen Tafel für die Reduction der Integrale dritter Gattung auf die Functionen Θu und Hu, erhält man aus der letzten Gleichung:

$$\varphi-\varphi_0 = u\left\{\frac{\partial \log HK+ia_1}{\partial a_1} + \frac{\partial \log Hia_2}{\partial a_2}\right\} + \frac{1}{2i}\log\left(\frac{\Theta u+K+ia_1\,\Theta u+ia_2}{\Theta u+K-ia_1\,\Theta u-ia_2}\right),$$

also, wenn man zur Abkürzung:

$$(10.)\quad \begin{cases} \Phi = \left\{\frac{\partial \log H(K+ia_1)}{\partial a_1} + \frac{\partial \log H(ia_2)}{\partial a_2}\right\}, \\ w = \frac{1}{2i}\log\left\{\frac{\Theta(u+K+ia_1)\,\Theta(u+ia_2)}{\Theta(u+K-ia_1)\,\Theta(u-ia_2)}\right\} \\ \text{setzt, so wird} \\ \varphi - \varphi_0 = u.\Phi + w. \end{cases}$$

Der Winkel w ist *periodisch,* indem er für $u \ldots 2K + u \ldots 4K + u$ etc. stets denselben Werth annimmt, und für $u = 0 \ldots K \ldots 2K \ldots$ etc. verschwindet.

Aus den Gleichungen (8. und 10.) ergiebt sich mit Rücksicht hierauf folgende Tafel zusammengehörender Werthe:

$$(11.)\quad \begin{cases} \text{am}\,u = 0 \ldots & \frac{1}{2}\pi & \ldots & \pi & \ldots & \frac{3}{2}\pi & \ldots \text{etc.} \\ u = 0 \ldots & K & \ldots & 2K & \ldots & 3K & \ldots \\ t = t_0 \ldots & t_0 + T & \ldots & t_0 + 2T & \ldots & t_0 + 3T & \ldots \\ z = ra \ldots & rb & \ldots & ra & \ldots & rb & \ldots \\ \varphi = \varphi_0 \ldots & \varphi_0 + \Phi K & \ldots & \varphi_0 + 2\Phi K & \ldots & \varphi_0 + 3\Phi K & \ldots \end{cases}$$

Der constante Winkel ΦK, den die Projection des Pendels beschreibt, während dieses selbst von seiner höchsten Stellung zu der tiefsten, oder umgekehrt, übergeht, liegt *stets* zwischen den Grenzen

$$\mp\tfrac{1}{2}\pi \quad \text{und} \quad \mp\pi,$$

deren erste dem gewöhnlichen, die zweite dem herumschwingenden ebenen Pendel zukommt (oder, wenn man nicht eine unendlich grofse Anfangsgeschwindigkeit ausschliefst, dem in beliebig geneigter Ebene umschwingenden Pendel).

Aus der zweiten Gleichung (10.) folgt, wenn

$$N = \sqrt{\{\Theta(u+K+ia_1)\,\Theta(u+ia_2)\,\Theta(u+K-ia_1)\,\Theta(u-ia_2)\}}$$

gesetzt wird:

$$(12.)\quad \begin{cases} 2N\cos w = \Theta(u+K+ia_1)\,\Theta(u+ia_2) + \Theta(u+K-ia_1)\,\Theta(u-ia_2), \\ 2Ni\sin w = \Theta(u+K+ia_1)\,\Theta(u+ia_2) - \Theta(u+K-ia_1)\,\Theta(u-ia_2). \end{cases}$$

Aber es ist:

$$1+\cos\psi = 1+\frac{z}{r} = (1+a)\{1-\varkappa^2\,\text{sn}^2(K+ia_1)\,\text{sn}^2 u\},$$

$$1-\cos\psi = 1-\frac{z}{r} = (1-a)\{1-\varkappa^2\,\text{sn}^2 ia_2\,\text{sn}^2 u\},$$

folglich (nach Fund. pag. 175):

$$1+\cos\psi = (1+a)\cdot\frac{\Theta^2 0\,\Theta(u+K+ia_1)\,\Theta(u+K-ia_1)}{\Theta^2 u\,\Theta^2(K+ia_1)},$$

$$1-\cos\psi = (1-a)\cdot\frac{\Theta^2 0\,\Theta(u+ia_2)\,\Theta(u-ia_2)}{\Theta^2 u\,\Theta^2 ia_2},$$

und wenn man erwägt, dafs

$$\frac{1+a}{\Theta^2(K+ia_1)} = \frac{a-c}{\Theta^2(K+ia_1)\,\mathrm{sn}^2(K+ia_1)} = \frac{(a-c)\varkappa}{H^2(K+ia_1)},$$

$$\frac{1-a}{\Theta^2 ia_2} = \frac{a-c}{-\Theta^2 ia_2\,\mathrm{sn}^2 ia_2} = \frac{(a-c)\varkappa}{-H^2 ia_2},$$

während $\varkappa.\Theta^2 0 = H'0^2$ ist (wenn man mit $H'0$ den Werth von $\frac{dHu}{du}$ für $u=0$ bezeichnet), so erhält man:

$$(13\,a.)\quad \begin{cases} 1+\cos\psi = (a-c)\cdot\dfrac{H'0^2\,\Theta(u+K+ia_1)\,\Theta(u+K-ia_1)}{\Theta^2 u\,H^2(K+ia_1)}, \\ 1-\cos\psi = (a-c)\cdot\dfrac{H'0^2\,\Theta(u+ia_2)\,\Theta(u-ia_2)}{-\Theta^2 u\,H^2 ia_2}; \end{cases}$$

woraus durch Multiplication

$$\sin^2\psi = (a-c)^2\cdot\frac{H'0^4.NN}{-\Theta^4 u\,H^2(K+ia_1)\,H^2 ia_2}$$

folgt; oder, da $\sin\psi > 0$, $N > 0$, $H(K+ia_1) > 0$, $\frac{1}{i}Hia_2 \leqq 0$ ist (correspondirend mit dem Zeichen von l):

$$(13\,b.)\quad \sin\psi = (a-c)\cdot\frac{\mp N.H'0^2}{H(K+ia_1)\,Hia_2\,\Theta^2 u}.$$

Diese Gleichung durch Multiplication mit (12.) verbunden, giebt, wenn man $a-c$ zur Abkürzung durch λ bezeichnet:

$$(14.)\quad \begin{cases} \sin\psi\cos w = \lambda\cdot\dfrac{\mp iH'0\,H'0}{2HK+ia_1\,Hia_2}\cdot\left\{\dfrac{\Theta(u+K+ia_1)}{\Theta u}\cdot\dfrac{\Theta(u+ia_2)}{\Theta u}\right. \\ \qquad\qquad \left. +\dfrac{\Theta(u+K-ia_1)}{\Theta u}\cdot\dfrac{\Theta(u-ia_2)}{\Theta u}\right\}, \\ \sin\psi\sin w = \lambda\cdot\dfrac{\mp H'0\,H'0}{2HK+ia_1\,Hia_2}\cdot\left\{\dfrac{\Theta(u+K+ia_1)}{\Theta u}\cdot\dfrac{\Theta(u+ia_2)}{\Theta u}\right. \\ \qquad\qquad \left. -\dfrac{\Theta(u+K-ia_1)}{\Theta u}\cdot\dfrac{\Theta(u-ia_2)}{\Theta u}\right\}. \end{cases}$$

Diese Formeln geben die Coordinaten in Bezug auf ein mit der Geschwindigkeit Φm um die verticale z-Axe rotirendes Axensystem. Multiplicirt man sie erstlich mit resp. $r\cos(\Phi u+\varphi_0)$ und $r\sin(\Phi u+\varphi_0)$, zweitens mit $-r\sin(\Phi u+\varphi_0)$ und $+r\cos(\Phi u+\varphi_0)$ und addirt jedesmal, so ergeben sich für die Coordinaten x, y, wenn man noch von den trigonometrischen zu den exponentiellen Functionen übergeht, folgende Werthe:

$$(15\,a.)\quad \begin{cases} x = r\lambda\cdot\dfrac{iH'0^2}{\mp H(K+ia_1)Hia_2}\cdot\dfrac{1}{2i}\cdot\Big\{e^{i(\Phi u+\varphi_0)}\cdot\dfrac{\Theta(u+K+ia_1)\Theta(u+ia_2)}{\Theta u^2} \\ \qquad\qquad -e^{-i(\Phi u+\varphi_0)}\cdot\dfrac{\Theta(u+K-ia_1)\Theta(u-ia_2)}{\Theta u^2}\Big\}, \\ y = r\lambda\cdot\dfrac{iH'0^2}{\mp H(K+ia_1)Hia_2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\Big\{e^{i(\Phi u+\varphi_0)}\cdot\dfrac{\Theta(u+K+ia_1)\Theta(u+ia_2)}{\Theta u^2} \\ \qquad\qquad +e^{-i(\Phi u+\varphi_0)}\cdot\dfrac{\Theta(u+K-ia_1)\Theta(u-ia_2)}{\Theta u^2}\Big\}. \end{cases}$$

In ähnlicher Form erhält man z durch Addition aus den Gleichungen (13 *a.*), nämlich:

$$z = r\lambda\cdot\tfrac{1}{2}\Big\{\frac{\Theta(u+K+ia_1)\Theta(u+K-ia_1)H'0^2}{\Theta u^2 H^2(K+ia_1)}+\frac{\Theta(u+ia_2)\Theta(u-ia_2)H'0^2}{\Theta^2 u H^2 ia_2}\Big\}.$$

Es möge nun folgende Bezeichnung angewendet werden:

$$\frac{\Theta(u+v)H'0}{\Theta u\,Hv} = P(u,v).$$

Dann gehen die obigen Ausdrücke in folgende über:

$$(15\,b.)\quad \begin{cases} x = \mp r\lambda\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\{e^{i(\Phi u+\varphi_0)}\cdot P(u,K+ia_1)P(u,ia_2) \\ \qquad\qquad +e^{-i(\Phi u+\varphi_0)}\cdot P(u,K-ia_1)P(u,-ia_2)\}, \\ y = \mp r\lambda\cdot\dfrac{1}{2i}\cdot\{e^{i(\Phi u+\varphi_0)}\cdot P(u,K+ia_1)P(u,ia_2) \\ \qquad\qquad -e^{-i(\Phi u+\varphi_0)}\cdot P(u,K-ia_1)P(u,-ia_2)\}, \\ z = r\lambda\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\{P(u,K+ia_1)P(u,K-ia_1)-P(u,ia_2)P(u,-ia_2)\}. \end{cases}$$

An dieselben schliefst sich noch die ebenfalls aus (13 *a.*) folgende identische Gleichung:

$$r = r\lambda\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\{P(u,K+ia_1)P(u,K-ia_1)+P(u,ia_2)P(u,-ia_2)\}.$$

Eliminirt man mittels dieser Gleichung den Factor λ aus den übrigen, oder setzt man statt λ seinen Werth in a_1 und a_2, nämlich:

$$(16.)\quad \lambda = a-c = \frac{2}{\left(\frac{1+a}{a-c}\right)+\left(\frac{1-a}{a-c}\right)} = \frac{2}{\frac{1}{\mathrm{sn}^2(K+ia_1)}-\frac{1}{\mathrm{sn}^2 ia_2}},$$

so erfüllen die gefundenen Coordinatenformeln, unabhängig von den Werthen der 7 Constanten φ_0, Φ, a_1, a_2, z, t_0, m, *identisch* die Bedingungsgleichung $xx+yy+zz-rr=0$.

IV.

Durch die Function $P(u,v)$, deren Producte zu zweien hier die Coordinaten bestimmen, hat *Jacobi* in der oben erwähnten Abhandlung die 9 Transformationscoëfficienten zwischen dem festen und dem beweglichen Axensystem

bei der Rotation ausgedrückt. Doch kommt sie dort nur ***lineär*** vor, und ***Jacobi*** giebt deshalb nicht die Entwickelung von Producten mehrerer solcher Functionen mit einem gleichen Argument u, auf welche es ***hier*** offenbar ankommen wird. Es soll daher zunächst gezeigt werden, wie sich ein solches Product durch die einfache Function und ihre Differentialquotienten nach u ausdrücken lasse, indem man dabei von einer Formel ausgeht, die sich mit Hülfe der bekannten Theorie der ***Zerlegung in Partialbrüche*** aus der (Fund. §. 52. pag. 145) gegebenen Productenzerfällung der Function Θ ergiebt. Sie ist folgende:

$$(17.)\quad \frac{\Theta(u+v_1)\Theta(u+v_2)\dots\Theta(u+v_n)}{\Theta(u+w_1)\Theta(u+w_2)\dots\Theta(u+w_n)}$$
$$= \Sigma\frac{\Theta(u+w_1+Sv-Sw)}{\Theta(u+w_1)}\cdot\frac{H(v_1-w_1)H(v_2-w_1)\dots H(v_n-w_1)}{H(Sv-Sw)H(w_2-w_1)\dots H(w_n-w_1)};$$

die Summe so genommen, dafs man der Reihe nach v_2 mit v_1, v_3 mit v_2, $\dots$ v_1 mit v_n und eben so w_2 mit w_1, w_3 mit w_2, $\dots$ w_1 mit w_n cyclisch vertauscht. Sv und Sw bedeuten resp. $v_1+v_2+\dots+v_n$ und $w_1+w_2+\dots+w_n$. Vorausgesetzt ist, dafs in dem Nenner links keine gleichen Factoren vorkommen, und dafs $H(Sv-Sw)$ nicht gleich 0 sei.

Drückt man alle Θ durch P aus, so geht die Formel in die folgende über:

$$(18.)\quad P(u+w_1, v_1-w_1)\,P(u+w_2, v_2-w_2)\dots P(u+w_n, v_n-w_n)$$
$$= \Sigma P(u+w_1, Sv-Sw)\cdot\frac{H(v_1-w_1)H(v_2-w_1)\dots H(v_n-w_1)}{H(v_1-w_1)H(v_2-w_2)\dots H(v_n-w_n)}$$
$$\times\frac{H'0.H'0\dots H'0}{H(w_2-w_1)H(w_3-w_1)\dots H(w_n-w_1)}.$$

Diese Formel bleibt richtig, auch wenn man die w sämmtlich verschwinden läfst. Man setze daher links $w_1=w_2=$ etc. $=0$ und eben das rechts in den Ausdrücken $Sv-Sw$ und $H(v_1-w_1).H(v_2-w_2)\dots H(v_n-w_n)$, welche in allen Gliedern der Summe dieselben sind, und nehme dann rechts die Grenze. Dies giebt:

$$(19.)\quad P(u, v_1)\,P(u, v_2)\dots P(u, v_n)$$
$$= \text{Lim.}\Big[\Sigma P(u+w_1, Sv)\cdot\frac{H(v_1-w_1)H(v_2-w_1)\dots H(v_n-w_1)}{Hv_1.Hv_2\dots Hv_n}$$
$$\times\frac{H'0.H'0\dots H'0}{H(w_2-w_1)H(w_3-w_1)\dots H(w_n-w_1)}\Big]_{\text{für } w_1=w_2=\dots=w_n=0.}$$

Zur Abkürzung setze man nun:

$$P(u, Sv)=P,\qquad \frac{\partial P(u, Sv)}{\partial u}=P',\qquad \frac{\partial^2 P(u, Sv)}{\partial u^2}=P'',\text{ etc.}$$

$$\text{Lim.}\{H(v_1+w)H(v_2+w)\dots H(v_n+w)\}_{w=0} = \Pi,$$

$$\text{Lim.}\left\{\frac{\partial^h\{H(v_1+w)H(v_2+w)\dots H(v_n+w)\}}{\partial w^h}\right\}_{w=0} = \Pi^{(h)},$$

$$\text{Lim.}\left\{\frac{wH'0}{Hw}\right\}_{w=0} = \mu_0, \quad \text{Lim.}\left\{\frac{\partial\left(\frac{wH'0}{Hw}\right)}{\partial w}\right\}_{w=0} = \mu_1, \quad \dots \quad \text{Lim.}\left\{\frac{\partial^h\left(\frac{wH'0}{Hw}\right)}{\partial w^h}\right\}_{w=0} = \mu_h,$$

so dafs also folgende Entwickelungen Statt finden:

$$(20.)\quad \begin{cases} P(u+w, Sv) = P+\frac{1}{1}wP'+\frac{1}{2!}w^2P''+\frac{1}{3!}w^3P'''+\cdots \\ H(v_1-w)H(v_2-w)\dots H(v_n-w) = \Pi-\frac{1}{1}w\Pi'+\frac{1}{2!}w^2\Pi''-\frac{1}{3!}w^3\Pi'''+\cdots \\ \frac{H'0}{Hw} = \frac{1}{w}\left\{\mu_0+\frac{1}{1}w\mu_1+\frac{1}{2!}w^2\mu_2+\frac{1}{3!}w^3\mu_3+\cdots\right\}. \end{cases}$$

In der letzten von diesen Reihen kann man auch die ungeraden Glieder weglassen, da offenbar alle μ mit ungeraden Indices verschwinden; und für μ_0 kann man 1 setzen.

Substituirt man dann diese Reihen in die Seite der Gleichung (19.) rechts, so erhält man aus dem ersten Gliede der Summe einen Ausdruck der zum Nenner das Product

$$(w_2-w_1)(w_3-w_1)\dots(w_n-w_1)$$

hat, und in allen andern Gliedern ähnliche Nenner. Da aber die Summe für $w_1 = w_2 = \text{etc.} = 0$ *endlich* bleiben mufs, so müssen nothwendig bei der Entwickelung der Zähler nach Potenzen der w alle Glieder mit kleinern Dimensionen als der $(n-1)^{\text{ten}}$ in der Summe identisch sich aufheben; und da diejenigen mit höhern Dimensionen mit verschwindenden w ebenfalls verschwinden, so hat man nur die Glieder von der $(n-1)^{\text{ten}}$ Dimension in den Zählern zu berücksichtigen. Man erhält demnach, wenn man durch

$$[fx]_{x^h}$$

den Coëfficienten der h^{ten} Potenz von x in der Entwickelung nach *steigenden ganzen Potenzen* der Function fx bezeichnet:

$$P(u, v_1)\,P(u, v_2)\,\ldots\,P(u, v_n)$$

$$= \Sigma \frac{\left\{\begin{array}{l} \left\{P + wP' + \frac{1}{2!}P'' + \text{etc.}\right\} \\ \times\left\{1 - w_1\frac{\Pi'}{\Pi} + \frac{1}{2!}w_1^2\frac{\Pi''}{\Pi} - \text{etc.}\right\} \\ \times\left\{1 + \frac{1}{2!}\mu_2(w_2 - w_1)^2 + \frac{1}{4!}\mu_4(w_2 - w_1)^4 + \cdots\right\} \\ \times\left\{1 + \frac{1}{2!}\mu_2(w_3 - w_1)^2 + \frac{1}{4!}\mu_4(w_3 - w_1)^4 + \cdots\right\} \\ \text{etc. etc.} \end{array}\right\} w_1^\alpha \,.\, w_2^\beta \,\ldots\, w_n^\nu}{(w_2 - w_1)(w_3 - w_1)\,\ldots\,(w_n - w_1)}$$

für $\alpha + \beta + \cdots + \nu = n - 1$.

Das Zeichen Lim. ist weggelassen, weil die Summe, als eine rationale, symmetrische, homogene Function 0ten Grades von den w, die zum Nenner die alternirende Function vom niedrigsten Grade hat, diese auch im Zähler als Factor haben, und mithin von den w ganz unabhängig sein mufs. Entwickelt man die Seite rechts für $n = 1, 2, 3, 4, 5$, so findet sich, wenn man für den Augenblick zur Abkürzung

$$P_0 = P,$$

$$P_1 = P' - \frac{\Pi'}{\Pi}P,$$

$$P_2 = P'' - 2\frac{\Pi'}{\Pi}P' + \frac{\Pi''}{\Pi}P,$$

$$P_3 = P''' - 3\frac{\Pi'}{\Pi}P'' + 3\frac{\Pi''}{\Pi}P' + \frac{\Pi'''}{\Pi}P,$$

etc. etc.

setzt:

$$(21.)\quad \left\{\begin{array}{l} P(u, v_1) = P_0, \\ P(u, v_1)\,P(u, v_2) = P_1 \,.\, \Sigma\left\{\frac{w_1}{(w_2 - w_1)}\right\}, \\ P(u, v_1)\ldots P(u, v_3) = \frac{1}{2}\,P_2 \,.\, \Sigma\left\{\frac{w_1^2}{(w_2 - w_1)(w_3 - w_1)}\right\} \\ \qquad + \frac{1}{2}\mu_2 \,.\, P_0 \,.\, \Sigma\left\{\frac{(w_2 - w_1)^2 + (w_3 - w_1)^2}{(w_2 - w_1)(w_3 - w_1)}\right\}, \\ P(u, v_1)\ldots P(u, v_4) = \frac{1}{6}\,P_3 \,.\, \Sigma\left\{\frac{w_1^3}{(w_2 - w_1)(w_3 - w_1)(w_4 - w_1)}\right\} \\ \qquad + \frac{1}{2}\mu_2 \,.\, P_1 \,.\, \Sigma\left\{\frac{(w_1\{(w_2 - w_1)^2 + \cdots + (w_4 - w_1)^2\}}{(w_2 - w_1)\ldots(w_4 - w_1)}\right\}, \end{array}\right.$$

$$(21.)\quad \begin{cases} P(u,v_1)\dots P(u,v_5) = \frac{1}{24}P_4.\Sigma\left\{\dfrac{w_1^4}{(w_2-w_1)\dots(w_5-w_1)}\right\} \\ \qquad + \frac{1}{2}\mu_2.\frac{1}{2}P_2.\Sigma\left\{\dfrac{w_1^2\{(w_2-w_1)^2+\dots+(w_5-w_1)^2\}}{(w_2-w_1)\dots(w_5-w_1)}\right\} \\ + (\frac{1}{2}\mu_2)^2.P_0.\Sigma\left\{\dfrac{(w_2-w_1)^2(w_3-w_1)^2+\dots+(w_4-w_1)^2(w_5-w_1)^2}{(w_2-w_1)\dots(w_5-w_1)}\right\} \\ + \frac{1}{24}\mu_4.P_0.\Sigma\left\{\dfrac{(w_2-w_1)^4+\dots+(w_5-w_1)^4}{(w_2-w_1)\cdots(w_5-w_1)}\right\}. \end{cases}$$

Die Summen sind sämmtlich Binomialcoëfficienten. Setzt man ihre Zahlenwerthe ein, so ergiebt sich

$$(22.)\quad \begin{cases} P(u,v_1) = P_0, \\ P(u,v_1)P(u,v_2) = -P_1, \\ P(u,v_1)\dots P(u,v_3) = \frac{1}{2}P_2 + \frac{1}{2}\mu_2\cdot P_0\cdot\frac{3}{1}, \\ P(u,v_1)\dots P(u,v_4) = -\frac{1}{6}P_3 - \frac{1}{2}\mu_2\cdot P_1\cdot\frac{4}{1}, \\ P(u,v_1)\dots P(u,v_5) = \frac{1}{24}P_4 + \frac{1}{2}\mu_2\cdot\frac{1}{2}P_2\cdot\frac{5}{1} + \left\{(\frac{1}{2}\mu_2)^2\cdot\dfrac{5.4}{1.2} + \frac{1}{24}\mu_4\cdot\frac{5}{1}\right\}P_0. \end{cases}$$

Um das Gesetz dieser Reihen deutlicher sichtbar zu machen, setze ich noch die nächsten beiden her:

$$P(u,v_1)P(u,v_2)\dots P(u,v_6)$$
$$= -\frac{1}{5!}P_5 - \frac{6}{1}\cdot(\frac{1}{2}\mu_2)\cdot\frac{1}{3!}P_3 - \left(\frac{6.5}{1.2}\cdot(\frac{1}{2}\mu_2)^2 + \frac{6}{1}\cdot\frac{\mu_4}{4!}\right)P_1,$$

$$P(u,v_1)P(u,v_2)\dots P(u,v_7)$$
$$= \frac{1}{6!}P_6 + \frac{7}{1}\cdot\frac{1}{2}\mu_2\cdot\frac{1}{4!}P_4 + \left(\frac{7.6}{1.2}\cdot(\frac{1}{2}\mu_2)^2 + \frac{7}{1}\cdot\frac{\mu_4}{4!}\right)P_2 + \dots$$
$$\dots + \left(\frac{7.6.5}{1.2.3}\cdot(\frac{1}{2}\mu_2)^3 + 2\cdot\frac{7.6}{1.2}\cdot\frac{1}{2}\mu_2\cdot\frac{1}{4!}\mu_4 + \frac{7}{1}\cdot\frac{1}{6!}\mu_6\right)P_0.$$

Im Folgenden werden nur die Producte bis zu 5 Factoren angewandt werden; daher ist auf die allgemeine Entwickelung hier nicht näher einzugehen nöthig.

Setzt man für die Gröfse P_0, P_1 etc. ihre Werthe durch P in die Gleichungen (22.), so ergiebt sich:

$$(23.)\quad \begin{cases} +P(u,v) = P, \\ -P(u,v_1)P(u,v_2) = \frac{1}{1}P' - P\cdot\dfrac{\Pi'}{\Pi}, \\ +Pu,v_1)\dots P(u,v_3) = \dfrac{1}{2!}P'' - \frac{1}{1}P'\cdot\dfrac{\Pi'}{\Pi} + P\cdot\frac{1}{2}\left(\dfrac{\Pi''}{\Pi} + 3\mu_2\right), \end{cases}$$

$$(23.)\quad \begin{cases} -P(u,v_1)\dots P(u,v_4) = \frac{1}{3!}P''' - \frac{1}{2!}P''\cdot\frac{\Pi'}{\Pi} + \frac{1}{1}P'\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{\Pi''}{\Pi}+4\mu_2\right) \\ \qquad\qquad - P\cdot\frac{1}{3!}\left(\frac{\Pi'''}{\Pi}+12\mu_2\frac{\Pi'}{\Pi}\right), \\ +P(u,v_1)\dots P(u,v_5) = \frac{1}{4!}P^{IV} - \frac{1}{3!}P'''\cdot\frac{\Pi'}{\Pi} + \frac{1}{2!}P''\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{\Pi''}{\Pi}+5\mu_2\right) \\ \quad - P\cdot\frac{1}{3!}\left(\frac{\Pi'''}{\Pi}+15\mu_2\frac{\Pi'}{\Pi}\right) + P\,\frac{1}{4!}\left(\frac{\Pi^{IV}}{\Pi}+30\mu_2\frac{\Pi''}{\Pi}+60\mu_2^2+5\mu_4\right). \end{cases}$$

Diese Formeln erfahren eine kleine Modification, wenn $Sv = 0$ ist (allgemeiner, wenn $Sv = 2hK + 2h'iK'$ ist, was aber in der Anwendung nicht vorkommen wird), indem dann rechts $P = \frac{\Theta(u+Sv)\,H'0}{\Theta u\,H(Sv)}$ unendlich wird. Nach der *Taylor*schen Reihe wird aber, wenn man bis auf die erste Potenz von Sv entwickelt:

$$P = \frac{(\Theta u + Sv.\Theta' u + \cdots)\,H'0}{\Theta u.(Sv.H'0 + \cdots)} = \frac{1}{Sv} + \frac{\Theta' u}{\Theta u} + \cdots$$

Für $Sv = 0$ verschwinden alle folgenden Glieder, und es ist demnach in den Differentialquotienten von P für diese Function einfach $\frac{\Theta' u}{\Theta u}$ oder Zu zu setzen. Die Coëfficienten von P selbst müssen, weil die Function links endlich bleibt, identisch verschwinden; d. h. es müssen, wenn

$$Sv = 0$$

ist. folgende Gleichungen Statt finden:

$$(24.)\quad \begin{cases} \text{für } n = 2: \frac{\Pi'}{\Pi} = 0, \\ \quad - \quad 3: \frac{\Pi''}{\Pi} + 3\mu_2 = 0, \\ \quad - \quad 4: \frac{\Pi'''}{\Pi} + 12\mu_2\frac{\Pi'}{\Pi} = 0, \\ \quad - \quad 5: \frac{\Pi^{IV}}{\Pi} + 30\mu_2\frac{\Pi''}{\Pi} + 60\mu_2^2 + 5\mu_4 = 0, \end{cases}$$

welche Gleichungen mit Ausnahme der ersten, sämmtlich auf dem Additionstheoreme der zweiten Gattung elliptischer Integrale beruhen.

In den Gliedern mit dem Factor P hat man hiernach für P nur $\frac{1}{Sv}$ zu setzen. Sie nehmen dann die Form $\frac{0}{0}$ an und geben sämmtlich endliche, im Allgemeinen nicht verschwindende Constanten. Man kann aber ein wenig

anders verfahren. ***Jacobi*** giebt nämlich a. a. O. eine Entwickelung für die Function

$$P(u, ia) \mp P(u, ia),$$

aus welcher für das gegenwärtige P die folgende sich findet:

$$25. \quad \frac{2K}{\pi} \cdot P(u, v)$$

$$= \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi v}{2K}\right)} + 4 \cdot \sum_1^\infty{}_h \left\{ \frac{q^h(1-q^{2h}) \cos\frac{\pi v}{2K} \cdot \sin\frac{h\pi u}{K} + q^h(1+q^{2h}) \sin\frac{\pi v}{2K} \cdot \cos\frac{h\pi u}{K}}{1 - 2q^{2h}\cos\frac{\pi v}{K} + q^{4h}} \right\},$$

wo q die kleine Gröfse $e^{-\pi\frac{K'}{K}}$ und e die Basis des natürlichen Logarithmensystems bedeutet. Die Reihe convergirt für beliebige Werthe von v, und für solche von u, deren imaginärer Theil zwischen $+iK' \cdots -iK'$ liegt, diese Grenzen selbst ausgeschlossen.

Setzt man hiernach

$$P(u, v) = \frac{\frac{\pi}{2K}}{\sin\left(\frac{\pi v}{2K}\right)} + Q(u, v),$$

so enthält Q nur periodische Glieder von u und bleibt für $v = 0$ endlich, nämlich Zu. Also hat man, wenn $Sv = 0$ ist, Q', Q'' etc. statt P', P'' etc. und in den letzten Gliedern statt P selbst $\frac{\frac{\pi}{2K}}{\sin\left(\frac{\pi . Sv}{2K}\right)}$ zu setzen, und dann die Grenze zu nehmen. Dies Verfahren stimmt allerdings bis jetzt mit dem frühern überein, ist aber besser, sobald noch Differentiationen nach den v nöthig sind; wie es hier der Fall sein wird.

Es sind jetzt noch die Coëfficienten der Reihen (23.) näher zu bestimmen; also die Gröfsen μ_h und $\Pi^{(h)}$. Bezeichnet man zu dem Ende, analog mit $H'0$, die Werthe von $\frac{d^3Hu}{du^3}$, $\frac{d^5Hu}{du^5}$ etc. für $u = 0$ durch $H'''0$, $H^{\mathrm{v}}0$ etc., so giebt die ***Taylor***sche Reihe:

$$\frac{wH'0}{Hw} = \frac{wH'0}{wH'0 + \frac{1}{3!} \cdot w^3 H'''0 + \frac{1}{5!} \cdot w^5 H^{\mathrm{v}}0 + \cdots},$$

und wenn man die Division ausführt:

$$\frac{wH'0}{Hw} = 1 - \frac{1}{3!}w^2\left(\frac{H'''0}{H'0}\right) + \left(\frac{1}{3!}\right)^2 \cdot w^4\left(\frac{H'''0}{H'0}\right)^2 - \cdots - \frac{1}{5!} \cdot w^4\left(\frac{H^{\mathrm{v}}0}{H'0}\right) + \cdots$$

Hieraus folgt:

$$\mu_2 = -\tfrac{1}{3}.\left(\frac{H'''0}{H'0}\right)$$

$$\mu_4 = +\tfrac{2}{3}.\left(\frac{H'''0}{H'0}\right)^2 - \tfrac{1}{5}\left(\frac{H^{\mathrm{v}}0}{H'0}\right).$$

Die weitern Glieder werden nicht gebraucht. Die Gröfsen $H^{(h)}0$ lassen sich leicht durch

$$Z'0 = \frac{\partial Zu}{\partial u} \text{ (für } u=0) = 1-\frac{E}{K}$$

(wo E das ganze Integral zweiter Gattung ist) ausdrücken. Man findet dadurch:

$$26\,a. \quad \begin{cases} H'''0 = H'0.\{-(1+\varkappa^2)+3Z'0\}, \\ H^{\mathrm{v}}0 = H'0.\{+(1+4\varkappa^2+\varkappa^4)-10(1+\varkappa^2)Z'0+15Z'0Z'0\}, \end{cases}$$

und diese Werthe in die Ausdrücke der μ gesetzt, geben:

$$26\,b. \quad \begin{cases} \mu_2 = -Z'0+\tfrac{1}{3}(1+\varkappa^2), \\ \mu_4 = +3Z'0Z'0-2(1+\varkappa^2)Z'0+\tfrac{1}{15}(7+8\varkappa^2+7\varkappa^4). \end{cases}$$

Um ferner die Gröfsen Π', Π'' etc. zu finden, setze man, analog mit der Bezeichnung von $Zu = \frac{\Theta' u}{\Theta u}$:

$$Yu = \frac{H'u}{Hu}.$$

Dann ist, mit Rücksicht auf die Formeln (Fund. p. 174, 7. und p. 164, 4.):

$$(27\,a.) \quad \begin{cases} Yu = Z(u+iK')+\dfrac{i\pi}{2K} = Zu+\dfrac{\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{sn}\,u}, \\ Y'u = Z'(u+iK') \quad\quad = Z'0-\dfrac{1}{\mathrm{sn}^2 u}, \\ Y''u = Z''(u+iK') \quad\quad = \dfrac{2\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{sn}^3 u}. \end{cases}$$

Die höhern Differentialquotienten lassen sich natürlich, wie die von Zu, auf die beiden ersten reduciren. Differentiirt man weiter, so ergiebt sich:

$$Y'''u = -2\frac{\mathrm{dn}^2 u}{\mathrm{sn}^2 u} - 2\varkappa^2.\frac{\mathrm{cn}^2 u}{\mathrm{sn}^2 u} - 6.\frac{\mathrm{cn}^2 u\,\mathrm{dn}^2 u}{\mathrm{sn}^4 u}$$

$$= -2\varkappa^2+4(1+\varkappa^2).\frac{1}{\mathrm{sn}^2 u} - 6.\frac{1}{\mathrm{sn}^4 u}$$

$$= -2\varkappa^2+4(1+\varkappa^2)(Z'0-Y'u)-6(Z'0-Y'u)^2.$$

Setzt man demnach die (mit $\varkappa^4$ proportionale) Gröfse

$$-2\varkappa^2+4(1+\varkappa^2)Z'0-6Z'0Z'0 = \varkappa_4 = -2\mu_4+\tfrac{14}{15}(1-\varkappa^2+\varkappa^4),$$

so erhält man

$$(27\,b.) \qquad Y'''u = z_4 - 12\mu_2 . Y'u - 6\,Y'u\,Y'u,$$

und, weiter differentiirt:

$$(27\,c.) \qquad Y^{IV}u = -12\mu_2\,Y''u - 12\,Y'u\,Y''u,$$

$$(27\,d.) \qquad Y^{V}u = -12\mu_2 Y'''u - 12\,Y''u\,Y''u - 12\,Y'u\,Y'''u, \text{ etc.}$$

Nun war:

$$\Pi = H(v_1+w).H(v_2+w)\ldots H(v_n+w) \quad \text{für} \quad w=0.$$

Differentiirt man logarithmisch nach w und setzt dann $w=0$, so findet sich

$$\frac{\Pi'}{\Pi} = \frac{H'v_1}{Hv_1} + \frac{H'v_2}{Hv_2} + \ldots + \frac{H'v_n}{Hv_n},$$

mithin, wenn man die Summe der Werthe der Function $\frac{d^h Yu}{du^2}$ für $u = v_1 v_2 \ldots v_n$ durch $SY^{(h)}v$ bezeichnet:

$$\Pi' = \Pi . SYv.$$

Durch weiteres Differentiiren ergiebt sich:

$$\begin{aligned}
\Pi'' &= \Pi . SY'v + \Pi' . SYv,\\
\Pi''' &= \Pi . SY''v + 2\Pi' . SY'v + \Pi'' . SYv,\\
\Pi^{IV} &= \Pi . SY'''v + 3\Pi' . SY''v + 3\Pi'' . SY'v + \Pi''' . SYv,\\
&\text{etc. etc.,}
\end{aligned}$$

folglich durch allmählige Substitution:

$$(28.) \quad \begin{cases}
\Pi' = \Pi . SYv,\\
\Pi'' = \Pi . \{SY'v + (SYv)^2\},\\
\Pi''' = \Pi . \{SY''v + 3SY'v\,SYv + (SYv)^3\},\\
\Pi^{IV} = \Pi . \{SY'''v + 4SY''v\,SYv + 6SY'v(SYv)^2 + 3(SY'v)^2 + (SYv)^4\}.
\end{cases}$$

Da die Gröfsen Y, Y', Y'' etc. bekannt sind, so werden durch die Gleichungen (26. und 28.) die Coëfficienten der Gleichungen (23.) vollständig bestimmt, und man kann daher jetzt zu ihrer Anwendung auf das sphärische Pendel übergehen.

V.

Zunächst läfst sich mit Hülfe der zweiten Gleichung (23.), die mit Substitution des Werths von $\frac{\Pi'}{\Pi}$ aus (28.) in folgende übergeht:

$$(29.) \qquad P(u, v_1).P(u, v_2) = -P'(u, v_1+v_2) + (Yv_1 + Yv_2)\,P(u, v_1+v_2)$$

den Formeln (15.) für die Coordinaten eine elegantere Form geben. Setzt

man in diese Gleichung resp. $K+ia_1$ und ia_2 statt v_1 und v_2, und erwägt, dafs dann Yv_1+Yv_2 nichts anders ist als $-i\Phi$, so erhält man

$$P(u, K+ia_1).P(u, ia_2) = -P'(u, K+ia_1+ia_2) - i\Phi.P(u, K+ia_1+ia_2)$$

und hieraus durch Verwandlung von i in $-i$:

$$P(u, K-ia_1).P(u, -ia_2) = -P'(u, K-ia_1-ia_2)+i\Phi.P(u, K-ia_1-ia_2).$$

Multiplicirt man die erste dieser Gleichungen mit $e^{i(\Phi u+\varphi_0)}$, die zweite mit $e^{-i(\Phi u+\varphi_0)}$, so gehen die Seiten rechts in resp. $\frac{\partial}{\partial u}\{e^{i(\Phi u+\varphi_0)}P(u, K+ia_1+ia_2)\}$ und $\frac{\partial}{\partial u}\{e^{-i(\Phi u+\varphi_0)}P(u, K-ia_1-ia_2)\}$ über. Setzt man daher zur Abkürzung:

$$(30.)\quad \begin{cases} R = \frac{1}{2i}\{e^{i(\Phi u+\varphi_0)}.P(u, K+ia_1+ia_2) - e^{-i(\Phi u+\varphi_0)}.P(u, K-ia_1-ia_2)\}, \\ S = \frac{1}{2}\{e^{i(\Phi u+\varphi_0)}.P(u, K+ia_1+ia_2) + e^{-i(\Phi u+\varphi_0)}.P(u, K-ia_1-ia_2)\}, \end{cases}$$

welches beides *reelle* Functionen sind, so erhält man, ohne weitere Reductionen, für die Coordinaten x, y folgende einfache Ausdrücke:

$$(31\,a.)\quad \begin{cases} x = \pm r\lambda.\frac{\partial S}{\partial u}, \\ y = \mp r\lambda.\frac{\partial R}{\partial u}. \end{cases}$$

Setzt man ferner in die Gleichung (29.) statt v_1 und v_2 resp. $K+ia_1+\varepsilon$ und $-K-ia_1$ und nimmt dann die Grenze für $\varepsilon = 0$, so hat man den Fall $Sv = 0$; mithin ist nach der obigen Auseinandersetzung Q statt P', und $\frac{\frac{\pi}{2K}}{\sin\frac{\pi Sv}{2K}}$ statt P zu setzen. So ergiebt sich, wenn man noch erwägt, dafs $P(-K-ia_1) = -P(K-ia_1)$ ist:

$$P(u, K+ia_1).P(u, K-ia_1) = Q'(u, 0) - \mathrm{Lim.}\left\{\frac{\frac{\pi}{2K}.Y(K+ia_1+\varepsilon)-Y(K-ia_1)}{\sin\frac{\pi\varepsilon}{2K}}\right\}$$
$$= Z'-uY'(K+ia_1).$$

Auf gleiche Weise ergiebt sich:

$$P(u, ia_2).P(u, -ia_2) = -Z'u+Y'(ia_2),$$

folglich nach den letzten Gleichungen (15 *b.*) durch Addition und Subtraction:

$$(31\,b.)\quad \begin{cases} z = r\lambda\left\{\frac{\partial Zu}{\partial u} - \frac{1}{2}(Y'(K+ia_1)+Y'(ia_2))\right\}, \\ r = r\lambda\{\frac{1}{2}(Y'(ia_2)-Y'(K+ia_1))\}, \end{cases}$$

welches zwei Gleichungen sind, deren Identität mit resp. (8. und 16.) leicht zu sehen ist.

VI.

Mit Hülfe der Formel (25.) lassen sich nun diese Ausdrücke leicht in ***Reihen*** verwandeln. Setzt man:

$$\frac{a_1}{K'} = \alpha_1, \quad \frac{a_2}{K'} = \alpha_2, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = \sigma,$$

so dafs also α_1 und α_2 zwischen $0 \cdots \mp 1$, σ zwischen $0 \cdots \mp 2$ liegen, und setzt dann in die Gleichung (25.) $K + ia_1 + ia_2$ statt v, wodurch

$$\cos\frac{\pi v}{2K} = \tfrac{1}{2}\cdot\left\{e^{\frac{\pi i(K+i\sigma K')}{2K}} + e^{-\frac{\pi i(K+i\sigma K')}{2K}}\right\} = -\frac{i}{2}(q^{-\frac{1}{2}\sigma} - q^{\frac{1}{2}\sigma}),$$

$$\sin\frac{\pi v}{2K} = \frac{1}{2i}\cdot\left\{e^{\frac{\pi i(K+i\sigma K')}{2K}} - e^{-\frac{\pi i(K+i\sigma K')}{2K}}\right\} = +\tfrac{1}{2}(q^{-\frac{1}{2}\sigma} + q^{\frac{1}{2}\sigma}).$$

sich ergiebt, so erhält man:

$$\frac{2K}{\pi}\cdot P(u, K + ia_1 + ia_2)$$

$$= \frac{2}{q^{-\frac{1}{2}\sigma} + q^{+\frac{1}{2}\sigma}} + 2\sum_1^\infty{}^h\left\{\frac{q^h(1+q^{2h})(q^{-\frac{1}{2}\sigma}+q^{\frac{1}{2}\sigma})\cdot\cos\frac{h\pi u}{K} - iq^h(1-q^{2h})(q^{-\frac{1}{2}\sigma}-q^{\frac{1}{2}\sigma})\sin\frac{h\pi u}{K}}{1+q^{2h}(q^{-\sigma}+q^{+\sigma})+q^{4h}}\right\}.$$

Multiplicirt man diese Reihe mit $e^{i(\Phi u+\varphi_0)}$, so ist nach (30.) der ***reelle*** Theil die Function S, der ***imaginaire*** ist R, welcher letztere aufserdem aus dem ersten durch Differentiation nach φ_0 folgt. Verwandelt man dann noch durch eine leichte Reduction die Summe in eine solche von $-\infty$ bis $+\infty$, indem man jedes Glied in zwei Partialbrüche zerlegt, und setzt endlich

$$\frac{2K\Phi}{\pi} = f,$$

so dafs also f eine zwischen $\mp 0 \cdots \mp 2$ liegende Zahl ist; so ergiebt sich:

$$(32\,a.)\quad \begin{cases} \dfrac{2K}{\pi}\cdot S = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^h \dfrac{2q^{h+\frac{1}{2}\sigma}}{1+q^{2h+\sigma}}\cdot\cos((2h+f)x+\varphi_0), \\ \dfrac{2K}{\pi}\cdot R = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^h \dfrac{2q^{h+\frac{1}{2}\sigma}}{1+q^{2h+\sigma}}\cdot\sin((2h+f)x+\varphi_0). \end{cases}$$

Hier bedeutet x nach den (Fund.) das Argument $\frac{\pi u}{2K}$.

Setzt man ferner $v = 0$ in der Reihe für $Q(u, v)$ (25.), so erhält man die bekannte Entwickelung von Zu:

$$(32\,b.)\quad \frac{2K}{\pi}\cdot Zu = \sum_1^\infty{}^h \frac{4q^h}{1-q^{2h}}\cdot\sin 2hx.$$

Differentiirt man diese drei Reihen nach u, so erhält man nach (31.) endlich folgende gesuchte Entwickelungen der Coordinaten:

$$(33.)\quad \begin{cases} x = \mp r\lambda\cdot\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2 \cdot \sum_{-\infty}^{+\infty h} (2h+f)\cdot\frac{2q^{h+\frac{1}{2}\sigma}}{1+q^{2h+\sigma}}\cdot\sin\left((2h+f)x+\varphi_0\right), \\ y = \mp r\lambda\cdot\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2 \cdot \sum_{-\infty}^{+\infty h} (2h+f)\cdot\frac{2q^{h+\frac{1}{2}\sigma}}{1+q^{2h+\sigma}}\cdot\cos\left((2h+f)x+\varphi_0\right), \\ z = r\lambda\cdot\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2 \cdot \sum_{+1}^{+\infty h} 2h\cdot\frac{4q^h}{1-q^{2h}}\cdot\cos 2hx \\ \qquad\qquad -\tfrac{1}{2}r\lambda\left(Y'ia_2+Y'(K+ia_1)\right). \end{cases}$$

Mittels bekannter Umformungen finden sich statt dieser Reihen andere complementäre, die nach Potenzen von $q' = e^{-\frac{\pi K}{K'}}$ fortschreiten und die daher stärker als die obigen convergiren, wenn x^2 den Werth $\frac{1}{2}$ übersteigt. Da dieselben zur Anwendung auf das vorliegende Problem nicht nöthig sind, so unterlasse ich ihre Ableitung und füge hier nur noch folgende Reihen-Entwickelungen für die in den Gleichungen (33.) vorkommende Constanten bei:

$$(34.)\quad \begin{cases} f = \frac{2K\Phi}{\pi} = \frac{2K}{\pi} i\left(Y(K+ia_1)+Y(ia_2)\right) \\ = \left\{\begin{array}{l} 1-\frac{2q^{\alpha_1}}{1+q^{\alpha_1}}+\frac{2q^{2-\alpha_1}}{1+q^{2-\alpha_1}}-\frac{2q^{2+\alpha_1}}{1+q^{2+\alpha_1}}+\cdots \\ +1+\frac{2q^{\alpha_2}}{1-q^{\alpha_2}}+\frac{2q^{2-\alpha_2}}{1-q^{2-\alpha_2}}+\frac{2q^{2+\alpha_2}}{1-q^{2+\alpha_2}}+\cdots \end{array}\right\}, \\ \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2\cdot\left(Y'(ia_2)+Y'(K+ia_1)\right) \\ = \left\{\begin{array}{l} -\frac{4q^{\alpha_1}}{(1+q^{\alpha_1})^2}-\frac{4q^{2-\alpha_1}}{(1+q^{2-\alpha_1})^2}-\frac{4q^{2+\alpha_1}}{(1+q^{2+\alpha_1})^2}-\cdots \\ +\frac{4q^{\alpha_2}}{(1-q^{\alpha_2})^2}+\frac{4q^{2-\alpha_2}}{(1-q^{2-\alpha_2})^2}+\frac{4q^{2+\alpha_2}}{(1-q^{2+\alpha_2})^2}+\cdots \end{array}\right\}, \\ \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2\cdot\frac{2}{\lambda} = \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2\left(Y'(ia_2)-Y'(K+ia_1)\right) \\ = \left\{\begin{array}{l} +\frac{4q^{\alpha_1}}{(1+q^{\alpha_1})^2}+\frac{4q^{2-\alpha_1}}{(1+q^{2-\alpha_1})^2}+\frac{4q^{2+\alpha_1}}{(1+q^{2+\alpha_1})^2}+\cdots \\ +\frac{4q^{\alpha_2}}{(1-q^{\alpha_2})^2}+\frac{4q^{2-\alpha_2}}{(1-q^{2-\alpha_2})^2}+\frac{4q^{2+\alpha_2}}{(1-q^{2+\alpha_2})^2}+\cdots \end{array}\right\}. \end{cases}$$

(Die Fortsetzung im nächsten Heft.)

5.

Note, die Anwendung eines trigonometrischen Satzes betreffend.

(Von Herrn Dr. *M. Ohm,* Prof. der Math. an der Universität zu Berlin.)

Die nachstehende Kleinigkeit hat nur ein pädagogisches Interesse; interessant ist es aber, zu sehen, wie ein einziger ***bekannter*** Satz die wissenswürdigsten und zum weiteren Studium der analytischen Geometrie, so wie in den Anwendungen der letzteren unentbehrlichsten Sätze, jeden für sich und unabhängig von dem andern, ferner die Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte, der Kräftenpaare und der Drehungen, etc. ohne alle Rechnung und wie mit einem Schlage giebt; zugleich mit der Überzeugung von ihrer Allgemeingültigkeit.

Der fragliche trigonometrische Satz ist der nachstehende

Hülfssatz.

I. Wenn n beliebige Puncte im Raume ganz beliebig durch gerade Linien mit einander verbunden werden, so aber, dafs eine geschlossene Figur $A_1A_2A_3 \ldots A_nA_1$ entsteht, so ist die Summe der Projectionen aller Seiten (A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, etc., zuletzt noch A_nA_1) auf eine beliebig gegebene ***Richtung UV,*** allemal der Null gleich, wenn man nur unter ***Projection*** irgend einer Seite das Product versteht aus der Länge dieser Seite, multiplicirt mit dem Cosinus des (spitzen, rechten oder stumpfen) Winkels, welchen die ***Richtung*** dieser Seite, ***wie sie bei der Beschreibung des ganzen Umfanges*** $A_1A_2A_3 \ldots A_nA_1$ ***in einem Zuge sich ausweiset,*** mit der ***Richtung UV*** (nie mit der entgegesetzten Richtung VU) bildet.

Stellt man sich nämlich durch alle Puncte $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$, Ebenen senkrecht auf UV vor, so ist das zwischen je zwei nächst auf einander folgenden dieser Ebenen liegende Stück von UV allemal die Projection eines jeden der zwischen denselben Ebenen liegenden Stücks des Umfangs der Figur $A_1A_2A_3 \ldots A_nA_1$, und positiv oder negativ, je nachdem das gedachte Stück des Umfangs die Richtung von der einen Ebene zur andern, oder von der andern Ebene zur ersteren hat. Da nun die Figur eine *geschlossene* sein soll,

so liegen zwischen je zwei solchen, nächst auf einander folgenden, auf UV senkrechten Ebenen, die Stücken des Umfangs in gerader Anzahl und in Richtungen, die genau eben so oft vorwärts als rückwärts gehen: folglich heben sich diese Projectionen paarweise einander auf, so dafs die *Summe* der Projectionen aller Stücken des Umfanges $A_1A_2A_3 \ldots A_nA_1$, welche zwischen je zwei nächst auf einander folgenden, der auf UV senkrechten Ebenen liegen, nothwendig der Null gleich ist; wodurch der Satz auch für den, zwischen den beiden äufsersten der auf UV senkrechten Ebenen liegenden ganzen Umfang $A_1A_2A_3 \ldots A_nA_1$ mit erwiesen ist.

Dieser Satz ist bekannt genug; auch gilt er natürlich noch, wenn alle Puncte A_1, A_2, A_3, $\ldots$ A_n mit der Richtung UV selbst, in einer und derselben Ebene liegen.

II. Alle Seiten der geschlossenen Figur $A_1A_2A_3 \ldots A_nA_1$, welche auf der Projectionsrichtung UV *senkrecht* stehen, können bei Bildung der Gleichung sofort übergangen werden, weil ihre Projectionen der Null gleich sind.

Wir geben nun einige Anwendungen dieses Satzes. In diesen Anwendungen setzen wir stets *rechtwinklige* Coordinaten-Axen OX, OY und OZ im Raume voraus; dies hindert jedoch nicht, neue Coordinaten-Axen, die aber stets wieder *rechtwinklig* angenommen werden, noch einzuführen, oder auch blofs zwei Axen in einer der Coordinaten-Ebenen allein, zu beachten.

§. 1.

Man betrachte zuerst *einen* Punct M im Raume, welcher durch die drei Coordinatenwerthe $OX = x$, $OY = y$ und $OZ = z$ (O ist der Anfangspunct der Coordinaten) gegeben ist; durch ihn ist auch die Richtung und die Länge der Geraden OM geometrisch festgestellt. Bezeichnet man die drei Winkel

$$MOX, \quad MOY \quad \text{und} \quad MOZ$$

beziehlich durch

$$\alpha, \quad \beta \quad \text{und} \quad \gamma,$$

stellt sich MB ($= z$) senkrecht auf die Ebene XOY, dann BA ($= y$) senkrecht auf OX vor, so dafs $OA = x$ wird, so hat man die geschlossene Figur $OABMO$. Projicirt man nun solche nach und nach auf die Richtungen

$$OX, \quad \text{oder } OY, \quad \text{oder } OZ,$$

so erhält man (nach II.), weil stets zwei der Seiten der Figur auf der jedesmaligen Projectionsrichtung senkrecht stehen:

(1.) $OM.\cos\alpha = x$, (2.) $OM.\cos\beta = y$, (3.) $OM.\cos\gamma = z$.

Wird aber dasselbe Vierseit ***OABMO*** auf die vierte Richtung ***OM*** projicirt, so giebt der Hülfssatz ohne Weiteres:

$$(4.) \quad x.\cos\alpha + y.\cos\beta + z.\cos\gamma = OM.$$

Diese Gleichung aber giebt, je nachdem man sie mit ***OM multiplicirt***, oder ***dividirt***, und wenn man dabei noch die Gleichungen (1, 2, 3.) zu Hülfe nimmt, sofort

$$(5.) \quad x^2 + y^2 + z^2 = OM^2,$$

$$(6.) \quad (\cos\alpha)^2 + (\cos\beta)^2 + (\cos\gamma)^2 = 1.$$

Die Gleichungen gelten ganz allgemein, obgleich in der Figur lauter ***positive*** Coordinatenwerthe vorausgesetzt wurden. Denn so wie einer oder der andere dieser Coordinatenwerthe, z. B. y, negativ, also die wirkliche Länge der entsprechenden Seite der Figur durch die (positive) Zahl $-y$ ausgedrückt sein sollte, würde gleichzeitig dieselbe Seite (bei dem Beschreiben der Figur ***in einem Zuge***) die entgegengesetzte Richtung haben, also mit der Projectionsrichtung den Nebenwinkel $180^0 - \lambda$ des Winkels λ bilden, den sie vorher mit ihr gebildet hat; der Cosinus dieses Winkels würde dann $= -\cos\lambda$ sein, und statt $y.\cos\lambda$ käme jetzt $(-y).(-\cos\lambda)$ zu stehen, welches Product aber dem $y.\cos\lambda$ wieder gleich ist.

§. 2.

Man stelle sich nun noch, aufser dieser beliebigen Richtung ***OM***, eine zweite beliebige Richtung ***OM'*** vor, welche mit denselben Axen ***OX***, ***OY*** und ***OZ*** die Winkel α', β', γ' bildet, so dafs wiederum

$$(\cos\alpha')^2 + (\cos\beta')^2 + (\cos\gamma')^2 = 1$$

ist.

Steht ***OM*** senkrecht auf ***OM'***, so dafs also der Winkel ***MOM'*** ein rechter ist, so projicire man das Viereck ***OABMO*** auf diese fünfte Richtung ***Om'***. Man erhält mittels des Hülfssatzes sogleich

$$x.\cos\alpha' + y.\cos\beta' + z.\cos\gamma' = 0,$$

oder, wenn man durch ***OM*** dividirt (nach §. 1. No. 1—3.):

$$(1.) \quad \cos\alpha.\cos\alpha' + \cos\beta.\cos\beta' + \cos\gamma.\cos\gamma' = 0\ ^*).$$

---

*) Man findet auch diese Gleichung, als erste, wenn man $OM = 1$ setzt, weil dann (nach §. 1. No. 1—3.) $\cos\alpha$, $\cos\beta$ und $\cos\gamma$ selbst die Coordinatenwerthe des Punctes M sind. — Dies auch für die Folge.

Diese Gleichung findet also allemal Statt, so oft die Richtungen OM und OM' auf einander senkrecht stehen.

Stehen diese Richtungen nicht auf einander senkrecht, so werde der Winkel MOM' gesucht, welchen sie mit einander machen. Zu dem Ende fälle man, von dem Puncte M aus, auf OM' eine Senkrechte, welche die Richtung OM' selbst in A' trifft, wenn MOM' ein spitzer Winkel ist, welche aber in der entgegengesetzten Richtung $M'O$ (und zwar in deren Verlängerung) in einem Puncte A_1 treffen wird, wenn der Winkel MOM' stumpf sein sollte. Im erstern Fall projicire man das Fünfseit $OABMA'O$ auf die gedachte fünfte Richtung OM', und der Hülfssatz giebt sofort:

$$x.\cos\alpha' + y.\cos\beta' + z.\cos\gamma' = OA',$$

folglich, wenn man durch OM dividirt (nach §. 1. No. 1—3.):

$$(2.)\qquad \cos\alpha.\cos\alpha' + \cos\beta.\cos\beta' + \cos\gamma.\cos\gamma' = \cos MOM';$$

welche Gleichung auch noch gilt, wenn der Winkel MOM' ein rechter sein sollte, weil sie dann in die (1.) übergeht.

Dieselbe Gleichung erhält man noch, wenn MOM' stumpf ist; denn dann ist sein Nebenwinkel MOA_1 spitz, und da demnach für letzteren der eben entwickelte Satz gilt, so hat man

$$\cos\alpha.\cos A_1OX + \cos\beta.\cos A_1OY + \cos\gamma.\cos A_1OZ = \cos MOA_1,$$

d. h. weil $\cos v = -\cos(180^0 - v)$ ist:

$$\cos\alpha.(-\cos\alpha') + \cos\beta.(-\cos\beta') + \cos\gamma.(-\cos\gamma') = -\cos MOM';$$

und dies ist dieselbe Gleichung (2.).

Die Gleichungen (1. und 2.) gelten ganz allgemein, wie auch die Richtungen OM und OM' vorausgesetzt werden, wenn gleich in der Figur zunächst positive Coordinatenwerthe angenommen wurden; insofern man nur das am Schlusse des (§. 1.) Gesagte wiederholen kann.

Die Gleichung (2.) giebt auch noch zu erkennen, dafs die Gleichung (1.) den *rechten* Winkel MOM' *nothwendig bedingt;* denn so wie der Winkel MOM' kein rechter ist, so ist nach (2.) die Gleichung (1.) unmöglich.

§. 3.

Die Coordinatenwerthe eines Punctes M, auf die Axen OX, OY und OZ bezogen, seien wieder x, y und z. Durch den Ursprung O sind drei neue rechtwinklige Axen OX', OY' und OZ' gelegt und gegeben durch die 9 Winkel, welche jede der letztern mit den drei alten Axen macht

(zwischen welchen 9 Winkeln natürlich die Gleichung (§. 1. No. 6.) dreimal, und eben so auch die Gleichung (§. 2. No. 1.) dreimal Statt findet, weil eben die neuen Axen wieder auf einander senkrecht stehen). Man soll die auf die neuen Axen bezogenen Coordinatenwerthe x', y' und z' desselben Punctes M, durch die alten ausdrücken.

Stellt man sich zunächst wieder, wie in (§. 1.), die Geraden MB und BA, aufserdem aber auch noch die MA' senkrecht auf OX' gezogen vor, (wie in §. 2.), so dafs $OA' = x'$ wird, während $OA = x$, $AB = y$ und $BM = z$ ist, so hat man das Fünfseit $OABMA'O$ (genau wie in §. 2.). Wird nun letzteres auf die neue Richtung OX' projicirt, so giebt der Hülfssatz (I. u. II.) *unmittelbar* dieselbe Gleichung wie in (§. 2.), nämlich:

$$(\odot) \qquad x.\cos X'OX + y.\cos X'OY + z.\cos X'OZ = x'.$$

Die beiden andern Gleichungen für y' und z' auf analoge Weise.

Dafs die Gleichungen allgemeingültig sind, obgleich wieder im Vorstehenden alle Coordinatenwerthe positiv vorausgesetzt wurden, leuchtet nach dem am Schlusse des (§. 1.) Gesagten, ohne Weiteres ein.

§. 4.

Es ist gegeben eine Gerade OD, der Länge nach $(= e)$, und der Lage nach durch die Winkel, welche sie mit den drei auf einander senkrecht angenommenen Axen OX, OY und OZ macht. Man soll die Gleichung einer *Ebene* finden, welche durch D hindurchgeht und auf der Geraden OD senkrecht steht.

Ist M ein beliebiger Punct dieser Ebene, so liegt die Gerade MD in dieser Ebene und steht *senkrecht* auf OD. Fället man nun (wie in §. 1.) MB $(= z)$ senkrecht auf XOY, und dann BA $(= y)$ senkrecht auf OX, so dafs OA $(= x)$ die dritte Coordinate des Punctes M wird, und projicirt nun das Fünfseit $OABMDO$ auf die Richtung OD, so erhält man mittels des Hülfssatzes (I. u. II.) die Gleichung

$$(1.) \qquad x.\cos DOX + y.\cos DOY + z.\cos DOZ - e = 0,$$

wo $e = OD$ ist; und dies ist die verlangte Gleichung. Dabei mag man nicht übersehen, dafs bekanntlich allemal

$$(2.) \qquad (\cos DOX)^2 + (\cos DOY)^2 + (\cos DOZ)^2 = 1$$

ist (nach §. 1. No. 6.).

Anmerk. Hieraus lassen sich leicht Folgerungen ziehen.

A. Erstlich läfst sich folgern, dafs die Gleichung einer jeden ***Ebene*** algebraisch und von der ***ersten*** Ordnung ist; denn wie auch die Ebene liegen mag, so kann man doch immer von O aus auf sie eine Senkrechte OD fällen, welche eine bestimmte Länge und eine bestimmte Richtung hat, und dann ist, wenn $e = OD$ gesetzt wird, die Gleichung (1.) ihre Gleichung.

B. Zweitens läfst sich daraus auch wieder folgern, dafs jede Gleichung erster Ordnung mit reellen Coëfficienten, nämlich

$$(3.) \qquad Ax + By + Cz + E = 0,$$

oder, wenn sie in dieser andern Form gegeben ist:

$$(4.) \qquad A(x-a) + B(y-b) + C(z-c) = 0,$$

wo a, b und c die Coordinatenwerthe eines Punctes der durch die Gleichung gegebenen Fläche vorstellen, sobald x, y und z als Coordinatenwerthe angesehen werden, die sich auf rechtwinklige Axen beziehen, allemal nur solche Puncte liefert, die alle in einer und derselben Ebene liegen, ***dafs sie also allemal die Gleichung einer Ebene ist.*** Dividirt man sie nämlich durch $\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)}\,(= r)$, so dafs sie die Form

$$(5.) \qquad \frac{A}{r}x + \frac{B}{r}y + \frac{C}{r}z + \frac{E}{r} = 0$$

annimmt, damit die Summe der Quadrate der drei neuen Coëfficienten von x, y und z, $= 1$ wird, so läfst sich immer eine Gerade OD finden, die mit den Axen OX, OY, OZ Winkel macht, welche durch die Gleichungen

$$\cos DOX = \frac{A}{r}, \quad \cos DOY = \frac{B}{r} \quad \text{und} \quad \cos DOZ = \frac{C}{r}$$

bestimmt werden. Setzt man nun die Länge e von D, $= \frac{-E}{r}$, so ist die Gleichung (1.) die Gleichung der Ebene, welche auf OD senkrecht steht; dieselbe ist jetzt aber nicht von der Gleichung (5.) und folglich auch nicht von der Gleichung (3.) verschieden; also ist letztere, nämlich

$$(3.) \qquad Ax + By + Cz + E = 0,$$

die Gleichung einer Ebene, welche von dem Ursprunge O der Coordinaten um $-\frac{E}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}}$ absteht, während dieser Abstand OD mit den drei Axen OX, OY, OZ Winkel macht, deren Cosinusse beziehlich

$$(6.) \qquad \frac{A}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}}, \quad \frac{B}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}} \quad \text{und} \quad \frac{C}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}}$$

sind. Dabei stellt die Quadratwurzel $\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}$ überall einen und denselben ihrer beiden Werthe vor, und zwar den $\left\{\begin{matrix}\text{positiven}\\\text{negativen}\end{matrix}\right\}$, je nachdem die gegebene Zahl E $\left\{\begin{matrix}\text{negativ}\\\text{positiv}\end{matrix}\right\}$ ist, weil der Abstand OD oder $-\frac{E}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}}$ negativ werden kann und darf. *)

C. Da zwei, durch die Gleichungen

$$(7.)\quad \begin{cases} Ax+By+Cz+D=0, \\ A'x+B'y+C'z+D'=0 \end{cases}$$

gegebene Ebenen, wenn sie sich schneiden, denselben Winkel δ unter sich bilden, den die auf sie senkrechten Geraden OD und OD' mit einander machen, dieser letztere Winkel aber nach (§. 2.) gefunden wird, während in vorstehende (6.) die dortigen $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ gefunden sind, und analog auch $\cos\alpha'$, $\cos\beta'$, $\cos\gamma'$ sich ausdrücken lassen, so hat man alsbald:

$$(8.)\quad \cos\delta = \frac{AA'+BB'+CC'}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}.\sqrt{(A'^2+B'^2+C'^2)}};$$

und diese Ebenen stehen daher auf einander senkrecht, so oft

$$(9.)\quad AA'+BB'+CC'=0$$

ist.

D. Sind die beiden, durch die Gleichungen (7.) gegebenen Ebenen mit einander parallel, so fallen die senkrechten Abstände OD und OD' in eine und dieselbe Richtung zusammen und es müssen daher die Cosinusse

$$\frac{A}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}} \quad \text{und} \quad \frac{A'}{\sqrt{(A'^2+B'^2+C'^2)}},$$

desgleichen die beiden andern analogen Paare von Cosinussen, beziehlich einander gleich sein. Dies ist der Fall, und ist nur dann der Fall, so oft

$$(10.)\quad \frac{A'}{A}=\frac{B'}{B}=\frac{C'}{C}$$

---

*) Ist die Gleichung (3.) die einer Tangential-Ebene an eine, durch die Gleichung $f_{x,y,z}=0$ gegebene krumme Fläche, d. h. ist für $x=a$ und $y=b$, die dritte Ordinate z, der Ebene und der krummen Fläche, jede $=c$, und sind für dieselben Werthe von x, y und z,

$$A=\frac{df}{dx}, \quad B=\frac{df}{dy} \quad \text{und} \quad C=\frac{df}{dz},$$

so drücken die 3 Quotienten in (6.) die Cosinusse der Winkel aus, welche die *Normale* an die krumme Fläche mit den Axen OX, OY, OZ macht, weil sie mit OD parallel läuft.

oder

$$A' = mA, \quad B' = mB \quad \text{und} \quad C' = mC$$

und m eine und dieselbe beliebige Zahl ist *).

Wir geben endlich noch eine Anwendung des Hülfssatzes in einem andern Gebiete.

§. 5.

Geht man von dem Satze des ***Kräftenparallelogramms*** aus, so kann man bekanntlich die mittlere Kraft (die Resultante) P_0, aus n gegebenen Kräften P_1, P_2, P_3 ... P_n, es mögen die letzteren in einer Ebene, oder beliebig im Raume einen (materiellen) Punct O gleichzeitig angreifen, allemal geometrisch construirt sich vorstellen, und zwar so:

Man setze alle Kräfte durch Längen ausgedrückt, und $OA_1 = P_1$; darauf lasse man P_2, von O aus nach A_1 hin, parallel mit sich fortrücken, so dafs sie die Lage A_1A_2 einnimmt; dann ist die dritte Seite OA_2 des Dreiecks OA_1A_2 (nach dem Satze des Kräftenparallelogramms) die Resultante der beiden Kräfte P_1 und P_2. Stellt man sich nun wieder die Kraft P_3, von O aus, parallel mit sich fortgerückt vor, nach A_2 hin, so dafs sie die Lage A_2A_3 einimmt, so ist wiederum die dritte Seite OA_3 des Dreiecks OA_2A_3 die Resultante aus OA_2 und P_3, also auch die Resultante aus den 3 Kräften P_1, P_2 und P_3. Wird nun die nächste Kraft P_4 von O aus parallel mit sich fortgerückt angenommen, nach A_3 hin, so dafs A_3A_4 ihre jetzige Lage ist, so ist OA_4 die Resultante der vier Kräfte P_1, P_2, P_3 und P_4. Fährt man so fort, bis endlich die n^{te} Kraft P_n parallel mit sich von O aus nach A_{n-1} fortgerückt wird, so dafs sie die Lage $A_{n-1}A_n$ einnimmt, so ist $OA_n = P_0$ die Resultante aller n Kräfte P_1 bis P_n, der Gröfse und Richtung nach.

Will man nun aus dieser ***Construction*** der mittlern Kraft (d. h. der Resultante) die letztere auch ***berechnen***, so nehme man beliebige drei Axen UX, UY, UZ an, welche durch den Punct O gehen können, oder nicht.

---

*) Es werden sich nicht ohne Interesse alle die analogen Probleme, welche in der Ebene vorkommen auf demselben Wege behandeln, d. h. in einer Ebene die auf einander senkrechten Axen OX und OY und *eine* Richtung OM betrachten lassen; dann für *zwei* Richtungen OM und OM' in derselben Ebene, der $\cos MOM'$, die Bedingungsgleichung des rechten Winkels; ferner bei Einführung neuer Axen OX' und OY' der Ausdruck der neuen Coordinatenwerthe x' und y'; dann die Gleichung der auf OD senkrechten Geraden; der Winkel zweier gegebenen Geraden; die Bedingungsgleichung ihrer auf einander senkrechten, oder ihrer parallelen Lage; zuletzt die Winkel zu finden, welche die Normale an eine gegebene krumme Fläche mit den beiden Coordinaten-Axen macht.

Dann sind

$$\alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1;\quad \alpha_2,\ \beta_2,\ \gamma_2;\quad \alpha_3,\ \beta_3,\ \gamma_3;\quad \ldots\quad \alpha_n,\ \beta_n,\ \gamma_n$$

die Winkel, welche die Kräfte

$$\boldsymbol{P}_1,\quad \boldsymbol{P}_2,\quad \boldsymbol{P}_3,\quad \ldots\quad \boldsymbol{P}_n\quad ,$$

beziehlich mit den Axen $\boldsymbol{UX}$, $\boldsymbol{UY}$, $\boldsymbol{UZ}$ machen; und macht die gesuchte Resultante $\boldsymbol{P}_0 = \boldsymbol{OA}_n$ mit denselben Axen beziehlich die Winkel α_0, β_0, γ_0, so dafs die *Richtung* $\boldsymbol{A_nO}$ der Seite des $(n+1)$ Seits $\boldsymbol{OA_1A_2A_3\ldots A_nO}$, mit denselben Axen die Winkel $180^0-\alpha_0$, $180^0-\beta_0$, $180^0-\gamma_0$ einschiefst; so erhält man nach dem Hülfssatze (I.), sobald man dieses $(n+1)$ Seit auf $\boldsymbol{UX}$, oder $\boldsymbol{UY}$ oder $\boldsymbol{UZ}$ projicirt, sofort die Gleichungen

$$(1.)\quad \boldsymbol{P}_1.\cos\alpha_1+\boldsymbol{P}_2.\cos\alpha_2+\cdots+\boldsymbol{P}_n.\cos\alpha_n = \boldsymbol{P}_0.\cos\alpha_0,$$

$$(2.)\quad \boldsymbol{P}_1.\cos\beta_1+\boldsymbol{P}_2.\cos\beta_2+\cdots+\boldsymbol{P}_n.\cos\beta_n = \boldsymbol{P}_0.\cos\beta_0,$$

$$(3.)\quad \boldsymbol{P}_1.\cos\gamma_1+\boldsymbol{P}_2.\cos\gamma_2+\cdots+\boldsymbol{P}_n.\cos\gamma_n = \boldsymbol{P}_0.\cos\gamma_0;$$

und man ist zu gleicher Zeit von deren Allgemeingültigkeit versichert, wie auch alle die α, alle die β, und alle die γ spitz, recht oder stumpf sein mögen *).

Diese Gleichungen gelten, wie auch die Axen $\boldsymbol{UX}$, $\boldsymbol{UY}$, $\boldsymbol{UZ}$ gegen einander liegen mögen. Stehen aber letztere alle drei auf einander senkrecht, so hat man noch (nach §. 1. No. 6.) die Gleichung

$$(4.)\quad (\cos\alpha_0)^2+(\cos\beta_0)^2+(\cos\gamma_0)^2 = 1;$$

und diese 4 Gleichungen reichen nun aus, die 4 unbekannten $\boldsymbol{P}_0$ und α_0, β_0, γ_0 leicht auszuwerthen.

Wenn es sich trifft, dafs bei der geometrischen Construction der mittlern Kraft, nachdem die ersten $n-1$ Kräfte $\boldsymbol{P}_1$ bis $\boldsymbol{P}_{n-1}$ das n Seit $\boldsymbol{OA_1A_2\ldots A_{n-1}O}$ gebildet haben, die Resultante $\boldsymbol{OA}_{n-1}$ aus diesen $n-1$ Kräften der n^{ten} Kraft $\boldsymbol{P}_n$ genau gleich und genau entgegen ist, so dafs also der Punct $\boldsymbol{A}_n$ mit $\boldsymbol{O}$ zusammenfällt und statt des $(n+1)$ Seits blofs ein n Seit $\boldsymbol{OA_1A_2\ldots A_{n-1}O}$ entsteht, während nun die n Kräfte sich offenbar im Gleichgewicht halten, so

---

*) Nimmt man den speciellen Fall von nur 3 Kräften $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$ und $\boldsymbol{P}_3$ an, welche zugleich in aufeinander senkrechten Axen $\boldsymbol{OX}$, $\boldsymbol{OY}$, $\boldsymbol{OZ}$ wirken, in der eben bezeichneten, oder in der gerade entgegengesetzten Richtung, und nimmt man diese Axen zugleich statt der Projections-Axen $\boldsymbol{UX}$, $\boldsymbol{UY}$, $\boldsymbol{UZ}$, so gehen die Gleichungen (1—3.) in

$$\pm\boldsymbol{P}_1 = \boldsymbol{P}_0.\cos\alpha_0,\qquad \pm\boldsymbol{P}_2 = \boldsymbol{P}_0.\cos\beta_0,\qquad \pm\boldsymbol{P}_3 = \boldsymbol{P}_0.\cos\beta_0$$

über; wodurch die Zusammensetzung und Zerlegung solcher Kräfte *(durch Rechnung)* möglich ist.

darf man nur dieses n Seit auf eine der Richtungen, z. B. auf UX, projiciren, um die Gleichgewichtsgleichung

$$(5.) \quad P_1 . \cos\alpha_1 + P_2 . \cos\alpha_2 + \cdots + P_n . \cos\alpha_n = 0$$

zu finden. Projicirt man auf drei solche Axen, so hat man drei solche Gleichgewichtsgleichungen, aus denen dann die n^{te} Kraft ihrer Gröfse und Richtung nach gefunden werden kann, welche den $n-1$ übrigen Kräften das Gleichgewicht hält.

§. 6.

Stellen in (§. 5.) die Buchstaben P_1, P_2, P_3, ... P_n die Momente von n Gegenpaaren (Zwillingspaaren, Kräftenpaaren, couples de forces) vor, welche in n verschiedenen, durch den Punct O hindurchgehenden Ebenen gleichzeitig wirken, und sind die Richtungen, welche in (§. 5.) die Kräfte hatten, jetzt die *gleichnamigen* Axenrichtungen dieser Gegenpaare, *) so folgt aus dem bekannten Satze vom „Parallelogramm der Gegenpaare" (der unmittelbar aus dem Kräftenparallelogramm hervorgeht), dafs in der Construction (§. 5.) die Gerade OA_2 der Gröfse nach das Moment des mittlern Gegenpaars ist, welches statt der beiden Seitengegenpaare, deren Momente P_1 und P_2 sind, gesetzt werden kann, während die Richtung derselben OA_2, die gleichnamige Axenrichtung dieses mittlern Gegenpaares ist, so dafs die Ebene dieses mittlern Gegenpaares, durch den Punct O angenommen, senkrecht auf dieser Richtung OA_2 steht und die (Dreh-) Richtung dieses mittlern Gegenpaares mit der Drehrichtung der Seitengegenpaare (deren Momente P_1 und P_2 sind) zusammenfällt, d. h. eine und dieselbe sein mufs, sobald die gleichnamigen

---

*) Wirkt in jeder von zwei verschiedenen Ebenen E_1 und E_2, ein Gegenpaar, und stellt man sich aus einem Puncte D_1 und D_2 in jeder Ebene Senkrechte $V_1 D_1 W_1$ und $V_2 D_2 W_2$ auf die Ebene vor, welche nach den beiden entgegengesetzten Seiten der Ebene in's Unendliche fortgehen, so heifst jede solche, als mit ihrer Ebene fest angenommene Senkrechte, die *Axe dieses Gegenpaars*. Legt man nun beide Ebenen mit den Puncten D_1 und D_2 und übrigens ganz auf einander, und findet sich, dafs wenn die Axenrichtungen $D_1 V_1$ und $D_2 V_2$ zusammenfallen, dann beide Gegenpaare in den mit einander zusammengefallenen Ebenen, *einerlei* (Dreh-) Richtung haben, so sind die gedachten Axenrichtungen *gleichnamige*. Zeigen aber beide Gegenpaare (in der einzigen Ebene) entgegengesetzte (Dreh-) Richtungen, so müssen sie *einerlei* (Dreh-) Richtung zeigen, wenn die eine der beiden Ebenen z. B. E_2 mit ihrer (fest angenommenen) Axe umgedreht wird, so dafs nun die Richtungen $D_1 V_1$ und $D_2 W_2$ auf einander fallen; und nun sind diese beiden letztgenannten Axenrichtungen diejenigen, welche *gleichnamige* genannt werden.

Im erstern Fall sind natürlich auch die beiden $D_1 W_1$ und $D_2 W_2$, *gleichnamige* Axenrichtungen, so wie in dem andern Fall auch noch $D_1 W_1$ und $D_2 V_2$ ein Paar *gleichnamige* Axenrichtungen sein werden.

Axenrichtungen, nämlich OA_1, die Parallele durch O mit A_1A_2 (*nicht* mit A_2A_1) und noch die OA_2, mit ihren fest daran haftenden senkrechten Ebenen zusammengelegt angenommen werden.

Daraus folgt aber, dafs nun in der Construction (§. 5.) die Gerade OA_n der Gröfse nach das Moment des mittlern Gegenpaares vorstellt, welches statt aller n Seitengegenpaare (welche die Momente P_1, P_2, P_3, ... P_n haben) gesetzt werden kann, und dafs die Richtung derselben OA_n die gleichnamige Axenrichtung dieses mittlern Gegenpaares ist, so dafs die Ebene des letztern (durch O angenommen) senkrecht auf OA_n steht und die (Dreh-) Richtung des letztern zusammenfallen mufs mit der (Dreh-) Richtung z. B. des Gegenpaars, dessen Moment $P_1 = OA_1$ ist, sobald beide gleichnamige Axenrichtungen OA_n und OA_1 auf einander gelegt gesetzt werden.

Findet aber das $(n+1)$ Seit $OA_1A_2 \ldots A_nO$ Statt, so giebt dessen Projection auf die in (§. 5.) beliebig angenommenen Axen UX, UY und UZ sogleich dieselben drei Gleichungen (1—3.) des (§. 5.), aus denen dann das Moment $P_0 = OA_n$ des mittlern Gegenpaars, so wie die Winkel α_0, β_0, γ *berechnet* werden, welche die gleichnamige Axenrichtung OA_n dieses mittlern Gegenpaares mit den drei Axen UX, UY und UZ macht *).

Und findet sich bei der Construction, dafs der Punct A_n mit O zusammenfällt, was nur dann, aber dann allemal der Fall ist, wenn das mittlere Gegenpaar OA_{n-1} aus den $n-1$ Gegenpaaren P_1, P_2, ... P_{n-1} dem n^{ten} Gegenpaar P_n das Gleichgewicht hält, weil sie gleiche Momente und entgegengesetzte (Dreh-) Richtungen haben, so giebt die Projection des jetzigen n Seits $OA_1A_2 \ldots A_{n-1}O$ auf die Axen, sogleich wieder die Gleichgewichts-Gleichungen.

§. 7.

Sind die beiden Seiten OA und OB eines Parallelogramms der Gröfse nach die Winkelgeschwindigkeiten, mit denen sich ein Körper gleichzeitig um die beiden Axen OA und OB drehen will, und sind zu gleicher Zeit OA und OB *gleichnamige* Richtungen dieser Dreh-Axen, so ist die Diagonale OC dieses Parallelogramms, *der Richtung nach*, die gleichnamige Richtung der Axe, um welche eine Drehung beginnt, und *der Gröfse nach* die Winkel-

*) Eben so wie in der Note zu (§. 5.) kann man auch hier den besondern Fall betrachten, wodurch drei, in auf einander senkrechten Ebenen wirkende Gegenpaare, in ein einziges vereinigt werden, und auch das letztere wieder in die drei ersteren zerlegt wird (durch Rechnung).

geschwindigkeit dieser Drehung; wie sich solches aus dem Parallelogramm der Kräfte leicht beweisen läfst.

Daher giebt die Construction (§. 5.) sogleich die gleichnamige Richtung der Dreh-Axe OA_n, während OA_n der Gröfse nach die Winkelgeschwindigkeit der Drehung um diese Axe ist; und diese Drehung ersetzt alle die n gleichzeitigen Drehungen, deren Winkelgeschwindigkeit der Gröfse nach durch die dortigen P_1, P_2, ... P_n ausgedrückt wird, falls nur die dortigen Richtungen mit den gleichnamigen Axenrichtungen dieser letztern n Drehungen zusammenfallen.

Aber eben deshalb giebt die Projection jenes $n+1$ Seits auch jetzt wieder die dortigen Gleichungen (1 bis 3.), aus denen die Winkelgeschwindigkeit $P_0 = OA_n$ der mittlern Drehung und die Winkel α_0, β_0, γ_0 ***berechnet*** werden können, welche die gleichnamige Richtung dieser mittlern Dreh-Axe mit den Axen UX, UY und UZ macht. *)

Und halten sich die n Drehungen im Gleichgewicht, so giebt die Projection des n Seits $OA_1A_2 \ldots A_{n-1}O$ sogleich wieder die dortigen Gleichungen (5.) des Gleichgewichts.

Diese Beispiele reichen aus, die Fruchtbarkeit des obigen Hülfssatzes anschaulich zu machen; unzählige andere Beispiele, besonders auch für Figuren, die sich in einer Ebene gestaltet haben, übergehen wir. Schliefslich aber werde noch ausdrücklich bemerkt, dafs wir recht gut wissen, wie die Anwendung dieses Hülfssatzes auch bei andern Schriftstellern schon angetroffen wird, dafs aber unsers Wissens noch nie darauf aufmerksam gemacht worden ist, dafs er so durchgreifend benutzt werden kann und die Resultate mit stets gleicher Einfachheit, Kürze und Schnelligkeit liefert. Diese Nachweisung in einer Zusammenstellung aller wissenswürdigsten Grundwahrheiten der analytischen Geometrie, wie in mehreren der wichtigsten Fragen der Statik und der Dynamik zu geben, ist der alleinige Zweck dieser kleinen Arbeit.

---

*) Die Gleichungen in der Note zu (§. 5.) geben natürlich auch wieder sogleich die Zusammensetzung dreier gleichseitiger Drehungen um rechtwinklige Axen in eine einzige, so wie die Zerlegung dieser letztern in die drei erstern, *durch Rechnung.*

Berlin, im November 1853.

6.

De compositione numerorum primorum formae $4\lambda+1$ ex duobus quadratis.

(Scrips. *Henr. Jo. Smith*, Oxoniensis.)

Sit

$$q_1+\cfrac{1}{q_2+\cfrac{1}{q_3}+\ddots+\cfrac{1}{q_n}}$$

fractio continua, cujus numerator, qui determinanti

$$\begin{vmatrix} q_1 & 1 & 0 & 0 & . & . & 0 \\ -1 & q_2 & 1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & -1 & q_3 & 1 & . & . & 0 \\ 0 & 0 & -1 & q_4 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & -1 & q_n \end{vmatrix}$$

aequalis est, per hujusmodi formulam $(q_1\, q_2\, q_3 \ldots q_{n-1}\, q_n)$ exprimatur. Erit ergo

$[q_1\, q_2 \ldots q_{i-1}\, q_i] = [q_i\, q_{i-1} \ldots q_2\, q_1]$ et

$$[q_1 \ldots q_n] = [q_1\, q_2 \ldots q_i]\cdot[q_{i+1} \ldots q_n]+[q_1\, q_2 \ldots q_{i-1}]\cdot[q_{i+2} \ldots q_n];$$

quae aequationes pendent ab illa forma determinantali, ambae autem ***L. Eulero*** debentur.

Itaque, si quantitatum q ***par*** sumatur numerus, ipsae que ita serie symmetrica disponantur, ut binae inter se aequales fiant, elucet, quantitatem $[q_1\, q_2 \ldots q_i\, q_i \ldots q_2\, q_1]$ summam fore duorum quadratorum inter se primorum; fit enim

$$[q_1\, q_2 \ldots q_i\, q_i \ldots q_2\, q_1] = [q_1\, q_2 \ldots q_i]^2+[q_1\, q_2 \ldots q_{i-1}]^2 \ldots$$

Contra in numero quotientium ***impari***, erit

$$[q_1 \ldots q_{i-1}\, q_i\, q_{i-1} \ldots q_2\, q_1] = (q_1 \ldots q_{i-1})\cdot\{[q_1 \ldots q_i]+[q_1 \ldots q_{i-2}]\},$$

unde colligis, numerum $[q_1 \ldots q_i \ldots q_1]$ primum esse non posse, nec duplicem numeri primi; si quidem casus excipis, in quibus, aut i unitati aequatur, aut i binario, q_1 unitati.

Sit p numerus integer datus; $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_s$ series numerorum, qui ad p primi sunt, ipsius que p dimidio minores. Formentur fractiones continuae $\frac{p}{\mu_1}, \frac{p}{\mu_2}, \ldots \frac{p}{\mu_s}$; quae omnes ita terminentur, ut is quotiens qui in extremo loco ponatur, unitatem superet. Hinc patet, quanta fuerit numerorum $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_s$ multitudo, tantum fore numerum determinantium $[q_1 \ldots q_n]$, qui dato numero p aequales erunt, neque praeter illos ullum dare ejusdem formae determinantem, cujus et primus et extremus quotiens unitate major sit, qui que numero p aequalis esse possit.

Jam vero, quum duo determinantes $[q_1 \ldots q_n]$ et $[q_n \ldots q_1]$ aequales sint, quum que ipsum q_n unitate majus sit, apparet $[q_n \ldots q_1]$ ex una aliqua fractionum $\frac{p}{\mu}$ oriri. Unde sequitur, data quavis fractione $\frac{p}{\mu}$, inveniri posse aliam in eadem serie, quae quotientes eosdem, ordine inverso, repraesentet.

Sit p primus, formae $4\lambda+1$; ut numerus determinantium ipsi p aequalium par existat. Quum ipse p unus e determinantium serie fiat, unus certo alius inveniri poterit in quo quotientium ordo invertendo non mutatur. Cum sit ergo

$$p = [q_1 q_2 \ldots q_i q_i \ldots q_2 q_1]$$

erit denique

$$p = [q_1 q_2 \ldots q_i]^2 + [q_1 q_2 \ldots q_{i-1}]^2.$$

Quam theorematis Fermatiani demonstrationem maxime elementarem esse patet, quum pendeat a conversione fractionum vulgarium in fractiones continuas.

Singulos autem formae $1+x^2$ divisores ex duobus quadratis conflari, eodem modo demonstrare in promptu est. Sit enim

$$\mu\nu = 1+x^2 \,.\,.$$

apparet fore

$$\mu = [q_1 q_2 \ldots q_i q_i \ldots q_2 q_1],$$
$$\nu = [q_2 q_3 \ldots q_i q_i \ldots q_3 q_2],$$
$$x = [q_1 q_2 \ldots q_i q_i \ldots q_2].$$

Oxford, Maio 1854.

7.

Quelques considérations sur l'équilibre du polygone funiculaire, et sur la chaînette.

(Par M. *Steichen,* professeur à l'école militaire de Bruxelles.)

§. I.

Avant que d'en venir à la question générale que nous nous proposons de traiter ici, nous croyons utile de reprendre par quelques notions préliminaires. Soit un polygone funiculaire ayant n noeuds; on donne les intervalles ou longueurs de cordon qui séparent les noeuds consécutifs et les intensités et directions des forces extrêmes et intermédiaires qui les sollicitent, à l'exception d'une seule force qui reste inconnue en grandeur et en direction, et qui doit être déterminée d'après la condition qu'il y ait équilibre. Je dis que dans ce cas on peut toujours trouver la figure d'équilibre du polygone: et que la force inconnue est égale et contraire à la résultante des $n-1$ forces données, ramenées parallèlement à elles-mêmes au noeud ou point d'application de cette force.

Soient ($a, b, c, d, \ldots g, h$) (Tab. III. Fig. 1) les n sommets consécutifs, et $ab, bc, cd, \ldots gh$ les intervalles développés en ligne droite de ces noeuds, (P, Q, X, Z) les forces extrêmes données en grandeur et direction, R, S, T, V, W les forces intermédiaires données de la même manière, U la force inconnue appliquée au sommet e, et définie par la condition qu'elle fasse équilibre aux forces des autres sommets: la question consistera donc dans la détermination de la figure du polygone et de la force U. En faisant commencer cette figure en un point arbitraire a, et construisant d'abord sur les forces P, Q, appliquées à ce noeud, un parallèlogramme, on n'a qu'à prolonger sa diagonale contraire, pour obtenir la direction et la position du premier côté du polygone; de plus sa tension de b vers a est une force bn égale à la première diagonale am. Sur la droite bn et la force R on construit un second parallèlogramme; il donne la diagonale bp qu'on prolonge en sens contraire d'une quantité bc égale à l'intervalle rectifié entre les $2^{\text{ième}}$ et $3^{\text{ième}}$ noeuds: on a par là la direction et la position du second côté du polygone. On peut faire remarquer que si la ligne d'action de R n'est pas dans le plan (P, Q, ab), le plan

(*ab, R, bc*) n'a que la droite *ab* commune avec le premier: de plus la tension de *bc* de *c* vers *b*, sera la résultante *cq* des forces *P, Q, R* ramenées parallèlement à elles-mêmes au sommet *b* ou *c*. Pour avoir ensuite le 3ième côté *cd*, on construit le parallèlogramme sur *cq* et *S*, et l'on prolonge sa diagonale en sens contraire d'une quantité *cd*, égale à l'intervalle rectifié entre les 3ième et 4ième noeuds: la tension de *d* vers *c* est la résultante des forces (*P, Q, R, S*) ramenées en *d* ou en *c;* de là on conclut encore une fois la position du 4ième côté *de;* et sa tension de *e* vers *d* est la résultante des forces (*P, Q, R, S, T*), ramenées en *d* ou en *e*. Mais étant une fois parvenu au sommet *e*, sollicité pas la force *U* encore inconnue de grandeur et de direction, on doit changer de marche, et reprendre de la manière suivante:

La tension du cordon *ef* de *e* vers *f* doit être en grandeur et en direction la résultante des forces (*V, W, X, Z*) toutes connues d'intensité et de direction: ainsi, après avoir construit à part cette résultante, on mène par le sommet *e* une droite *ef* parallèle à sa direction, et l'on porte une longueur égale à l'intervalle rectifié des noeuds *e, f;* on voit aussi que la force *U* est par là égale et contraire à la résultante des tensions sur *ed, ef*, ou à la résultante de toutes les forces connues, ramenées parallèlement à elles-mêmes au noeud *e*. Le restant de la solution est manifeste, et l'on peut comparer ce qui vient d'être dit avec la solution de ***Poisson*** (tome I. page 551).

Mais cette manière directe et immédiate de procéder à l'aide des données fondamentales ne se maintient plus, dès qu'une fois on veut faire un pas de plus, et traiter cette autre question qui naît naturellement de la première: *Un polygone funiculaire est attaché par ses deux extrêmités à deux points fixes* A, B; *il a* n *noeuds placés à des intervalles rectifiés, connus; chaque noeud* N_1, N_2, N_3, . . . N_n *est sollicité par une force donnée de grandeur et de direction: on demande la figure d'équilibre du système.* Les indications un peu vagues données par ***Poisson***, ne suffisent pas pour trouver les équations de condition explicites de la question; le fait même de la solution qui suit, justifiera notre assertion; car il faut ici une généralisation de la composition des forces que l'auteur cité n'expose nulle part dans son ouvrage, et qui a été déjà indiquée brièvement dans nos mémoires précédents.

Soient *T', T''* les tensions inconnues des deux côtés ou cordons extrêmes, considérées comme des forces actives, agissant de N_1 vers *A*, et de N_n vers *B;* de sorte que l'équilibre subsiste entre les forces inconnues *T, T'*, et les forces

connues P, P', P'', P''', ... qui agissent aux sommets N_1, N_2, N_3, N_4, ... respectivement. En plaçant avec ***Poisson*** l'origine des coordonnées rectangles au premier point de suspension A, et nommant (λ, μ, η) (λ', μ', η') les coefficients de direction des forces T, T', par rapport à ces axes, $(\alpha, \beta, \gamma)(\alpha', \beta', \gamma')$ ... ceux des forces P, P', ..., on obtient d'abord les conditions

$$(a.)\quad \begin{cases} T.\lambda + T'.\lambda' + P.\alpha + P'.\alpha' + P''.\alpha'' + \text{etc. etc. ...} = 0, \\ T.\mu + T'.\mu' + P.\beta + P'.\beta' + P''.\beta'' + \text{etc. .....} = 0, \\ T.\eta + T'.\eta' + P.\gamma + P'.\gamma' + P''.\gamma'' + \text{etc. .....} = 0, \\ \lambda^2 + \mu^2 + \eta^2 = 1, \quad \lambda'^2 + \mu'^2 + \eta'^2 = 1, , \ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

ce qui forme cinq équations seulement pour déterminer les 8 inconnues T, T', λ, μ, ... η'. On conçoit d'ailleurs immédiatement que celles-ci étant une fois trouvées, on peut déterminer ensuite par leurs moyen la figure d'équilibre du système. Ainsi donc la difficulté de la question se réduit d'abord à découvrir les trois autres équations de condition entre les données et les inconnues. Sans doute elles doivent résulter, comme le dit ***Poisson***, de ce que la position des deux points fixes est donnée, et on doit les obtenir, en calculant les valeurs des coordonnées de l'un de ces points, rapporté aux axes de l'autre pris pour origine, c'est-à-dire les projections du périmètre funiculaire sur ces axes, et les égalant aux valeurs connues de ces mêmes coordonnées.

Mais ces indications ne suffisent même pas pour faire comprendre comment ces projections renfermeront les inconnues $T \ldots \eta'$; c'est après tout une difficulté qu'il faut éclaircir, en montrant la loi de dépendance qui subsiste entre ces projections, les données $(P, P', \ldots \alpha, \beta, \gamma, \ldots)$ et les inconnues T, T', ... η'. Or en prenant

$$AN_1 = l_1, \quad N_1N_2 = l_2, \quad \ldots \quad N_{n-1}N_n = l_n, \quad N_nB = l_{n+1},$$

et considérant que les droites l_1 l_{n+1} sont, la première en sens contraire de T, et la dernière dans le sens même de T', on obtient pour leurs projections sur les axes coordonnés:

$$-\lambda l_1, \quad -\mu l_1, \quad -\eta . l_1, \quad \lambda' . l_{n+1}, \quad \mu' . l_{n+1}, \quad \eta' . l_{n+1}.$$

Ainsi en nommant m, n, p les coordonnées de B par rapport aux axes en A, on obtient:

$$\lambda' . l_{n+1} - \lambda . l_1 + l_2 \cos(l_2 x) + l_3 \cos(l_3 x) + l_4 \cos(l_4 x) + \text{etc. ...} = m,$$
$$\mu' . l_{n+1} - \mu . l_1 + l_2 \cos(l_2 y) + l_3 \cos(l_3 y) + l_4 \cos(l_4 y) + \text{etc. ...} = n,$$
$$\eta' . l_{n+1} - \eta . l_1 + l_2 \cos(l_2 z) + l_3 \cos(l_3 z) + l_4 \cos(l_4 z) + \text{etc. ...} = p.$$

Or pour faire ressortir maintenant la loi de dépendance sont il s'agit, et dans la vue de transformer en conséquence les trois relations qu'on vient de trouver, je nommerai R_1, R_2, R_3, ... les résultantes des forces (T, P) $(T, P, P')(T, P, P', P'')$, et j'aurai par là:

$$R_1^2 = T^2 + P^2 + 2P.T\cos(P, T) = T^2 + P^2 + 2P.T(\alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\eta).$$

De plus, comme la projection d'une résultante sur un axe est toujours égale à la somme des projections des composantes, il vient:

$$R_1\cos(R_1 x) = \lambda.T + \alpha.P; \quad R_1\cos(R_1 y) = \mu T + \beta P,$$
$$R_1\cos(R_1 z) = \eta T + \gamma P;$$

Puisque donc la droite l_2 comptée de N_1 vers N_2 forme le prolongement contraire de la résultante R_1, on doit avoir:

$$\cos(l_2 x) = -\frac{\lambda T + \alpha P}{R_1}, \quad \cos(l_2 y) = -\frac{\mu T + \beta P}{R_1}, \quad \cos(l_2 z) = -\frac{\eta T + \gamma P}{R_1}.$$

Mais la loi généralisée de la composition des forces donne:

$$R_2^2 = T^2 + P^2 + P'^2 + 2PT\cos(P, T) + 2PP'\cos(P, P') + 2P'T\cos(P', T)$$
$$= P^2 + P'^2 + T^2 + 2PP'(\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma') + 2P'T(\alpha'\lambda + \beta'\mu + \gamma'\eta)$$
$$+ 2TP(\alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\eta),$$

et pour $\cos(l_3 x)$, $\cos(l_3 y)$, $\cos(l_3 z)$ on trouve encore les valeurs:

$$\cos(l_3 x) = -\frac{\lambda T + \alpha P + \alpha' P'}{R_2}, \quad \cos(l_3 y) = -\frac{\mu T + \beta P + \beta' P'}{R_2},$$
$$\cos(l_3 z) = - \text{ etc.}$$

Ayant la loi de composition analytique générale qui ressort de là pour les résultantes ultérieures R_4, ... R_n, et pour les directions des côtés l_4, l_5, ... l_n, on voit sans nouveaux frais de calcul, et en conservant néanmoins les quantités R_1, R_2, ... comme abréviations, que les trois égalités obtenues ci-dessus deviennent:

$$(b.) \quad \begin{cases} \lambda' l_{n+1} - \lambda.l_1 - l_2.\dfrac{\lambda T + \alpha P}{R_1} - l_3.\dfrac{\lambda T + \alpha P + \alpha' P'}{R_2} - \text{etc. etc.} \ldots = m, \\ \mu' l_{n+1} - \mu.l_1 - l_2.\dfrac{\mu T + \beta P}{R_1} - l_3.\dfrac{\mu T + \beta P + \beta' P'}{R_2} - \text{etc.} \ldots = n, \\ \eta' l_{n+1} - \eta.l_1 - l_2.\dfrac{\eta T + \gamma P}{R_1} - l_3.\dfrac{\mu T + \gamma P + \gamma' P'}{R_2} - \text{etc.} \ldots = p. \end{cases}$$

Or eu égard aux valeurs de R_1, R_2, R_3, ... en fonction des données et des inconnues, on voit maintenant que les trois dernières équations subsistent elles-mêmes entre les données et les inconnues; partant qu'en combinaison avec

les cinq équations (*a.*), elles sont nécessaires et suffisantes pour faire connaître les tensions extrêmes en grandeur et en direction, et partant la figure et la position d'équilibre du polygone proposé. On obtient ensuite les tensions sur l_2, l_3, ... par les valeurs des forces R_1, R_2, ... Si la figure du polygone est fermée, le point B coïncide avec A, et dans les équations (*b.*) on prendra $m=0$, $n=0$, $p=0$.

On peut s'arrêter de plus près à l'examen du cas particulier où toutes les forces sollicitantes P, P', P''', ... se reduisent à des *poids* qu'il est permis de considérer comme parallèles. En prenant alors l'axe Az suivant la verticale descendante du point A, l'axe Ax suivant l'horizontale tracée par A dans le vertical encore inconnu ZAN_1, et allant de A vers B, l'axe Ay suivant l'horizontale, normale en A à ce plan, on obtient:

$$\mu=0,\quad \alpha=0,\quad \beta=0,\quad \gamma=1,\quad \alpha'=0,\quad \beta'=0,\quad \gamma'=1,$$

ce qui donnera:

$$\cos(l_2x)=-\frac{\lambda T}{R_1},\quad \cos(l_2y)=0,\quad \cos(l_2z)=-\frac{\eta T}{R_1},$$

$$\cos(l_3x)=-\frac{\lambda T}{R_2},\quad \cos(l_3y)=0,\quad \cos(l_3z)=-\frac{\eta T}{R_2};$$

. . . . . .

ainsi tous les côtés l_2, l_3, l_4, ... l_n sont dans le vertical déterminé par la verticale Az et par le premier côté l_1. De plus, le côté $l_{n+1}=N_nB$ devant se trouver suivant le prolongement contraire de la résultante des forces R_n et du poids $P^{(n-1)}$ qui agit au sommet N_1, est encore située dans le plan ZAN_1; de sorte que ce plan est le vertical même conduit suivant la droite AB; et l'on a parconséquent aussi $\mu'=0$; ce qui rend la seconde équation (*b.*) identique, ou donne $n=0$. Faisant ensuite pour abréger:

$$\frac{l_2}{R_1}+\frac{l_3}{R_2}+\frac{l_4}{R_3}+\cdots+\frac{l_n}{R_{n-1}}=W,$$

et nommant Q la somme des poids P, P', ... $P^{(n-1)}$ suspendus aux noeuds, les premières et troisièmes équations (*a, b.*) deviendront:

$$(a.)\quad T.\lambda+T'.\lambda'=0,\quad T.\eta+T'.\eta'+Q=0,\quad \lambda^2+\eta^2=1,\quad \lambda'^2+\eta'^2=1,$$

$$(b.)\quad \lambda(l_1+W.T)=\lambda' l_{n+1}-m,\quad \eta(l_1+W.T)=\eta'.l_{n+1}-p.$$

En désignant par φ, φ' les angles des forces T, T' avec la verticale ascendante, on obtient: $\eta=-\cos\varphi$, $\eta'=-\cos\varphi'$, $\lambda=-\sin\varphi$, $\lambda'=+\sin\varphi'$,

et les six équations (a', b'.) se ramènent aux quatre suivantes:

$$(1.) \quad -T.\sin\varphi + T'.\sin\varphi' = 0,$$
$$(2.) \quad -T\cos\varphi - T'\cos\varphi' + Q = 0,$$
$$(3.) \quad (l_1 + W.T)\sin\varphi = m - l_{n+1}\cdot\sin\varphi',$$
$$(4.) \quad (l_1 + W.T)\cos\varphi = p + l_{n+1}\cdot\cos\varphi',$$

dans lesquelles la quantité W a maintenant la valeur:

$$W = l_2 : \sqrt{[T^2 + P^2 - 2P.T.\cos\varphi]} + l_3 : \sqrt{[T^2 + (P+P')^2 - 2T(P+P')\cos\varphi]}$$
$$+ l_4 : \sqrt{[T^2 + (P+P'+P'')^2 - \text{etc.}]} + \cdots$$
$$+ l_n : \sqrt{[T^2 + (P+P'+\cdots+P^{(n-2)})^2 - 2T(P+P'+\cdots+P^{(n-2)}]\cos\varphi)}.$$

Ainsi, étant donnés les deux points de suspension, les intervalles l_1, l_2, ... l_n, l_{n+1} et les poids P, P', P'', ... qui agissent aux divers noeuds d'un polygone, on peut déduire des équations (1, 2, 3, 4.) la figure d'équilibre correspondante, après avoir calculé les tensions extrêmes en grandeur et en direction. Il est vrai qu'en s'en tenant au sens naturel de la question, ce qui suppose les $2n+3$ données l_1, l_2, ... l_{n+1}, P, P', ... m, p, on obtiendrait avec beaucoup de peine les quantités inconnues T, T', φ, φ'. Mais si, en conservant les données l_1, ... l_{n+1}, et P, P', P'', ... on considère une fois comme inconnues les deux quantités m, p, et qu'on se donne à leur place les deux autres T, φ, on pourra calculer les valeurs de T', φ' par les équations (1, 2.) dont la première fait connaître φ', et la seconde T'; car elles donnent:

$$Q.\sin\varphi' = T.\sin(\varphi+\varphi'), \qquad Q.\sin\varphi = T''.\sin(\varphi+\varphi').$$

De plus, φ, T étant donnés, la quantité W peut être calculée en valeur de φ, T, P, P'', ... $P^{(n-2)}$, l_2, l_3, ... l_n, et doit parconséquent être considérée comme connue dans les équations (3, 4.) qui sont donc propres dèslors au calcul des coordonnées m, p. Ayant obtenu ainsi T', φ', m, p, on a la valeur de $R_1 = \sqrt{(T^2 + P^2 - 2P.T.\cos\varphi)}$, et ensuite:

$$\cos(l_2 x) = T.\sin\varphi : R_1, \qquad \cos(l_2 z) = T.\cos\varphi : R_1.$$

On procéderait de même pour la tension et la direction des côtés l_3, l_4, ... l_n. Ainsi se trouve resolue la question modifiée, dont voici l'énoncé:

Un polygone funiculaire est attaché par une extrêmité à un point fixe A; le côté qui y aboutit doit avoir une tension connue, et une direction donnée AN_1: on charge les noeuds N_1, N_2, ... N_n de poids connus: quelle doit être la position du second point d'attache, pour que l'équilibre subsiste sous les conditions prescrites, et quelle est la figure du polygone?

GENERAL LIBRARY University of MICHIGAN

On pourrait demander aussi dans quels rapports il faut faire varier les poids, pour que la figure et la position d'équilibre se conservent *les mêmes*. Il s'ensuit d'abord de là que les angles φ, φ' doivent rester invariables; ce qui prouve que les tensions T, T' devront varier en raison même du poids total, appliqué aux divers sommets. En outre les quantités m, p, devant rester constantes, aussi bien que les angles φ, φ', d'après la nature de la question, on voit par chacune des équations (3, 4.), que la quantité $(l_1 + W.T)$, partant celle $W.T$, doit encore conserver une valeur constante, lors de l'altération des poids suspendus, d'après de certains rapports encore inconnus. Si donc, par suite de cette réduction qui change par exemple P, P', P'', ... en P_0, P_1, P_2, ..., W devient une quantité W_1, h fois plus petite, que sa valeur primitive, il faudra que la tension T devienne T_1, T_1 étant h fois plus grand que T. Cela donnera:

$$l_2 : \sqrt{[h^2T^2 + P_0^2 - 2P_0 h.T.\cos\varphi]} + l_3 : \sqrt{[h^2T^2 + (P_0+P_1)^2 - 2hT(P_0+P_1)\cos\varphi]} + \text{etc.} =$$
$$l_2 : h\sqrt{[T^2 + P^2 - 2P.T.\cos\varphi]} + l_3 : \sqrt{[T^2 + (P+P')^2 - 2T(P+P')\cos\varphi]} + \text{etc.}$$

Or cette dernière condition est satisfaite généralement, si l'on prend:

$$P_0 = h.P, \quad P_1 = h.P', \quad P_2 = h.P'', \quad \text{etc.},$$

et de là même résultera pour la nouvelle tension T_1 une valeur h fois plus grande que T, conformément à ce qui est requis par les équations (1, 2), puisque le nouveau poids total Q_1 devient aussi $h.Q$. Ainsi, dans l'hypothèse que tous les cordons soient inextensibles, la figure d'équilibre n'est pas altérée, si l'on réduit tous les poids y appliqués dans un même rapport. Ce fait est analogue à la propriété de la chaîne pesante et homogène qui affecte une forme courbe, indépendante de sa densité.

§. II.

Remarques sur la chaînette.

Nous venons de voir que la question du polygone funiculaire peut être envisagée de deux manières différentes, selon les données et les inconnues que l'on adopte; et qu'une fois les éliminations sont pour ainsi dire impossibles, tandis que l'autre fois elles n'offrent absolument aucune difficulté. La théorie de la chaînette présente de même la difficulté de la résolution d'équations transcendantes, dans la détermination de certaines constantes, et l'on y est naturellement conduit à ces deux questions distinctes:

1°. ***Étant données la longueur l de la chaîne et les deux points de suspension A, B, ou les coordonnées (α, β) du second point B par rapport***

à un axe horizontal Ax', et à un axe vertical Ay': déterminer la constante et les dimensions correspondantes de la courbe, et notamment les coordonnées du sommets D (Fig. 2).

2°. *Un premier point de suspension A étant donné, et la courbe devant passer par un sommet D connu, dont les coordonnées (t, u) par rapport aux axes Ax', Ay' ont parconséquent des valeurs assignées: déterminer la constante ou le paramètre de la courbe, etc.*

Habituellement les auteurs de mécanique rationnelle, en traitant ce sujet de la chaînette, ne font pas ressortir ce double point de vûe de la théorie et de ses applications. Les remarques suivantes pourront donc offrir encore quelqu'intérêt, et être utiles dans de certaines circonstances.

D'abord la première question est traitée complètement dans l'ouvrage de *Poisson* (2ième édition 1833). En désignant par λ le paramètre de la courbe, c'est-à-dire la longueur inconnue d'une chaîne de même densité que la proposée, et dont le poids marque la tension horizontale au sommet *D* de la courbe, on obtient la relation

$$(\text{I.}) \qquad l^2 - \beta^2 = \lambda^2 (e^{\frac{\alpha}{\lambda}} + e^{-\frac{\alpha}{\lambda}} - 2).$$

La détermination de λ par le moyen de cette équation et des essais successifs est très laborieuse, excepté dans le cas particulier où le rapport $\sqrt{(l^2 - \beta^2)} : \alpha$ est très près de l'unité, ce qui suppose aussi le rapport $l : \alpha$ fort peu supérieur à l'unité pour $\beta = 0$. Alors, en développant le second membre, on a la valeur approchée:

$$(\text{II.}) \qquad 4\lambda^2 = \frac{\alpha^3}{6.(l-\alpha)}.$$

Mr. *Eytelwein* évite le calcul des essais successifs d'une manière ingénieuse, par le moyen d'une table à trois colonnes dont l'une renferme les valeurs de l'abscisse t en fraction de λ, la seconde les valeurs correspondantes de l'ordonnée calculée en fraction de λ, par le moyen de l'équation de la courbe entre x et y ou t et u, tandis que la troisième colonne renferme la valeur correspondante de $u : t$. Par là on peut résoudre aisément tous les cas particuliers de la question N°. 2, et même d'une manière suffisamment approchée pour la pratique, quand on veut recourir aux parties proportionnelles, comme on le fait avec les tables de logarithmes. La nouvelle trigonométrie de Mr. *Gudermann* fournit une solution plus approchée encore, mais le travail du calculateur nous paraît bien plus considérable. Ensuite, pour compléter la question, on

peut demander la longueur l de la chaîne, après avoir obtenu son paramètre λ par les données t, u. Or comme l'arc s, compté du sommet, a la valeur $\sqrt{(2\lambda u+u^2)}$, on aura l par l'équation

$$(\text{III.}) \qquad l = \sqrt{(2\lambda u+u^2)}+\sqrt{[(2\lambda+u-\beta)(u-\beta)]},$$

qui fait connaître la longueur de la courbe, passant par un premier point de suspension A, par un sommet donné D, et devant se rattacher à un point de suspension B inconnu qui ait néanmoins avec le point A une différence de niveau inférieure β donnée. Si cette différence est supérieure, on change $u-\beta$ en $u+\beta$ dans la formule (III.). Celle-ci resout encore cette question accessoire:

On suspend à deux points A, B de niveau, et éloignés d'un intervalle α, une chaîne de longueur $l>\alpha$; on mesure sur la courbe formée la plus grande flèche de flexion u: déduire de là le paramètre λ, ou la tension horizontale; car dans ce cas $\beta=0$, et l'on connaît à la fois l, u dans l'équation (III.) qui donne ensuite λ par un calcul fort simple. Ne pourrait-on pas déduire de là un moyen d'appréciation de la raideur naturelle des cordes, eu égard à leurs diamètres? Ayant en effet plusieurs cordes de même longueur et de diamètres différents, on pourrait suspendre d'abord à deux points fixes un fil très délié, très flexible, et d'égale longueur; ce fil donnerait lieu à une flèche de flexion u très peu différente de sa valeur rationnelle, et qu'il suffirait de mesurer; mais chaque corde étant ensuite substituée au fil, donne lieu à une flèche de flexion $f<u$, par l'effet de la raideur naturelle qui détruit en partie l'inflexion dûe au poids de la corde: et évidemment le petit excès linéaire $u-f$ marque en quelque sorte pour un diamètre de corde donné, et pour une longueur l et un intervalle α, le défaut de flexibilité ou la raideur de la corde. Mais pour déduire de là quelques vues théoriques, il faudrait trouver une définition générale exacte et précise à la fois, de ce qu'on nomme un peu vaguement la ***raideur***. Dans le cas de u, t donnés, où l'on aurait besoin de calculer λ à défaut de tables, par les essais successifs, il faudrait recourir à l'équation de la courbe qui donnerait:

$$(\text{IV.}) \qquad u=\tfrac{1}{2}\lambda\left(e^{\frac{t}{\lambda}}+e^{-\frac{t}{\lambda}}-2\right),$$

et dès lors, avant que d'entreprendre aucun essai, il sera au moins utile de connaître la limite inférieure de λ; la limite supérieure $\lambda<l$ ne saurait servir ici, puisque les données sont par hypothèse t, u, et que l est encore inconnue.

Or l'arc courbe compris entre D et A est plus grand que la corde AD de ces deux points; cela donne:

$$2\lambda . u + u^2 > AD^2, \quad \text{ou} \quad > t^2 + u^2, \quad \text{ou} \quad \lambda > \frac{t^2}{2u}.$$

Faisons remarquer que la seconde inégalité qui résulte de la comparaison de l'arc DB avec la corde, ne pourrait pas être employée, comme renfermant les deux constantes α, β, et qu'il est seulement permis de considérer comme connue l'une d'elles. D'ailleurs l'inéquation $\lambda > t^2 : 2u$ est d'une grande simplicité, et dans tous les cas particuliers où l'ordonnée u a une valeur assez faible par rapport à l'abscisse t, on peut commencer par prendre $\lambda = t^2 : 2u$, ce qui revient à confondre la chaînette avec une parabole à axe vertical et de sommet D. L'égalité (IV.) doit en tout cas servir à donner ensuite pour λ une valeur plus approchée de λ. On ne doit pas perdre de vûe non plus que les quantités λ, u croissent et décroissent en sens contraire, c'est-à-dire que quand l'une augmente, l'autre diminue, et réciproquement.

En resumé la méthode des essais successifs appliquée à la solution de la *question* (2°.), est laborieuse, à l'exception du cas spécial où il est permis de confondre d'abord la courbe avec la parabole. Celle de Mr. ***Eytelwein*** est au contraire expéditive, et nous parait préférable sous tous les rapports: c'est pourquoi nous sommes naturellement conduit à rechercher si elle ne pourrait être généralisée et étendue à la solution numérique de tous les cas particuliers qui se rattachent à la *question* (1°.). Mais avant que d'exposer le résultat de notre investigation, il convient d'établir les équations de condition entre constantes par la nouvelle voie d'élimination qui résulte d'une façon si régulière de l'emploi des notations trigonométriques de Mr. ***Gudermann***. L'équation de la courbe rapportée aux axes Dx, Dy du sommet, étant en coordonnées rectangles:

$$y + \lambda = \tfrac{1}{2}\lambda . (e^{\frac{x}{\lambda}} + e^{-\frac{x}{\lambda}}),$$

devient d'après le texte et dans les notations de l'auteur:

$$y + \lambda = \lambda . \mathfrak{Cos} \frac{x}{\lambda}.$$

La condition de la courbe, de passer par les deux points de suspension, l'un $B = (\alpha - t, u - \beta + \lambda)$, l'autre $A = (-t, u)$, donnera:

$$u - \beta + \lambda = \lambda . \mathfrak{Cos} \frac{\alpha - t}{\lambda}, \qquad u + \lambda = \lambda . \mathfrak{Cos} \frac{t}{\lambda},$$

d'où:

$$(a.) \qquad -\beta = \lambda.\left(\mathfrak{Cos}\frac{\alpha-t}{\lambda} - \mathfrak{Cos}\frac{t}{\lambda}\right).$$

Mais on a aussi pour l'arc s, exprimé par l'abscisse horizontale:

$$s = \tfrac{1}{2}\lambda.(e^{\frac{x}{\lambda}} - e^{-\frac{x}{\lambda}}) = \lambda.\mathfrak{Sin}\frac{x}{\lambda},$$

d'où l'on conclut immédiatement:

$$(b.) \qquad l = \lambda\left(\mathfrak{Sin}\frac{\alpha-t}{\lambda} + \mathfrak{Sin}\frac{t}{\lambda}\right).$$

Or

$$\mathfrak{Cos}\frac{\alpha-t}{\lambda} - \mathfrak{Cos}\frac{t}{\lambda} = 2\mathfrak{Sin}\frac{\alpha}{2\lambda}\,\mathfrak{Sin}\frac{t}{\lambda}, \qquad \mathfrak{Sin}\frac{\alpha-t}{\lambda} + \mathfrak{Sin}\frac{t}{\lambda} = 2\mathfrak{Sin}\frac{\alpha}{2\lambda}\,\mathfrak{Cos}\frac{t}{\lambda};$$

ce qui donne par substitution dans les équations $(a, b.)$:

$$-\beta = 2\lambda.\mathfrak{Sin}\frac{\alpha}{2\lambda}\cdot\mathfrak{Sin}\frac{t}{\lambda}; \qquad l = 2\lambda.\frac{\alpha}{2\lambda}\cdot\mathfrak{Cos}\frac{t}{\lambda} = \text{etc.},$$

partant

$$l^2 - \beta^2 = 4\lambda^2.\mathfrak{Sin}^2\frac{\alpha}{2\lambda} = \lambda^2(e^{\frac{\alpha}{\lambda}} + e^{-\frac{\alpha}{\lambda}} - 2). \quad \text{C. Q. F. T.}$$

Cette dernière égalité est identique au résultat de ***Poisson***, exprimé par l'équation (I.), et les deux avant-dernières serviront à calculer t, et ensuite u, quand λ est connu. Or nous voyons par la forme de (I.), que si l'on prend:

$$Y = \tfrac{1}{2}\lambda(e^{\frac{\alpha}{\lambda}} + e^{-\frac{\alpha}{\lambda}} - 2), \quad \text{d'où} \quad l^2 - \beta^2 = 2\lambda.Y,$$

et que l'on se donne diverses valeurs de α en fraction de λ, on peut calculer les valeurs correspondantes de Y en fraction ou en nombre fractionnaire de λ, de la même manière que l'ordonnée verticale d'une chaînette dont l'abscisse serait α; ce qui est fourni par la table de Mr. ***Eytelwein***. Ainsi, en concevant diverses valeurs indéterminées $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \ldots \lambda_n$ de λ, et prenant successivement

$$\alpha = m_1\lambda_1,\ m_2\lambda_2,\ m_3\lambda_3,\ \ldots\ m_n\lambda_n,$$

on obtient immédiatement pour Y les valeurs correspondantes:

$$Y = n_1\lambda_1,\ n_2\lambda_2,\ n_3\lambda_3\ \ldots\ n_n\lambda_n,$$

et pour $\sqrt{(l^2-\beta^2)} = \sqrt{(2\lambda.Y)}$, on aura à l'aide des nombres auxiliaires $n_1, n_2, n_3, \ldots$:

$$\sqrt{(l^2-\beta^2)} = \sqrt{(2n_1).\lambda_1},\ \sqrt{(2n_2).\lambda_2},\ \sqrt{(2n_3).\lambda_3},\ \ldots\ \sqrt{(2n_n).\lambda_n}.$$

En inscrivant dans une même colonne verticale d'une table les valeurs de α, on inscrira dans une deuxième colonne les valeurs correspondantes de $\sqrt{(l^2-\beta^2)}$,

de manière que les nombres m_μ et $q_\mu = \sqrt{(2n_\mu)}$ se trouvent l'un à côté de l'autre sur une même ligne horizontale. Dans une troisième colonne on inscrira les quotients $q_\mu : m_\mu$ ou les diverses valeurs du rapport $\sqrt{(l^2-\beta^2)} : \alpha$, en observant le même ordre dans les indices. De cette façon la table se trouve toute formée; et par son moyen on peut resoudre la question de la détermination de λ, étant donnés l, α, β. En effet, soient l', α', β' leurs valeurs numériques actuelles; on évalue le rapport $\sqrt{(l'^2-\beta'^2)} : \alpha'$, que l'on cherche ensuite dans la troisième colonne de la table. Supposons que le nombre qui s'en approche le plus, n'en diffère pas d'une quantité sensible et qu'il occupe la $\mu^{\text{ième}}$ ligne horizontale; le nombre de la deuxième colonne aura la valeur $q_\mu . \lambda_\mu = l'$, ce qui donne $\lambda_\mu = l' : q_\mu$, et par la première on obtient $\lambda_\mu = \alpha' : m_\mu$. Cette double valeur de λ_μ offre un moyen de contrôle suffisant; mais si la valeur en nombres du rapport $\sqrt{(l'^2-\beta'^2} : \alpha'$ diffère sensiblement de celui de la table qui en approche le plus, il faudra faire la correction par les parties proportionnelles; comme cela se pratique pour les logarithmes. Sous ce rapport les intervalles de la table de Mr. ***Eytelwein*** me paraissent assez resserrés; mais elle ne s'étend peut-être pas assez loin, pour qu'on puisse former par son moyen une table nouvelle suffisamment étendue. En effet, en prenant les derniers nombres qui la terminent, savoir $\alpha = 3\lambda$, $Y = 9{,}06766 . \lambda$, on trouve $\sqrt{2n} = 4{,}258558$, ce qui donne $\sqrt{(l^2-\beta^2)} : \alpha = 1{,}41952$; ainsi en se limitant à $\alpha = 3\lambda$, on ne pourrait résoudre numériquement que les questions dans lesquelles le rapport de $\sqrt{(l^2-\beta^2)} : \alpha$, ou celui de $l : \alpha$ pour $\beta = 0$, ne surpasserait pas 1,42 au plus. Mais il ne serait pas bien long de pousser plus loin la table à former; car en mettant l'équation (I.) sous la forme

$$\sqrt{(l^2-\beta^2)} = \lambda\left(e^{\frac{\alpha}{2\lambda}} - e^{-\frac{\alpha}{2\lambda}}\right),$$

on attribuera au rapport $\alpha : \lambda$, à partir de 3, des valeurs croissantes jusqu'à une limite supérieure pour laquelle la valeur correspondante du rapport du premier membre avec α soit plus grand que la plus grande valeur pratique de ce rapport: on calculera les valeurs correspondantes de $\sqrt{(l^2-\beta^2)}$ en parties de λ, et celle du rapport de la quantité radicale à α, et l'on inscrira ces nombres obtenus une fois pour toutes, dans la table à former, et que l'on peut prolonger aussi loin qu'on veut. On peut faire remarquer encore que la question pouvant être resolue approximativement par la formule (II.) dans tous les cas de l très peu supérieur à α, ou de $\frac{\sqrt{(l^2-\beta^2)}}{\alpha}$ très peu différent

de l'unité, il est inutile de faire commencer la table à une très petite fraction de λ: car en prenant par exemple, $\alpha = 0{,}50.\lambda$, on a

$$\sqrt{(l^2-\beta^2)} = \sqrt{(2n.\lambda)} = 0{,}50525.\lambda, \qquad \frac{\sqrt{(l^2-\beta^2)}}{\alpha} = 1{,}01046.$$

Or ce dernier rapport reste encore assez près de l'unité, pour permettre de déterminer λ par la formule (II.), ou par cette autre, β étant quelconque:

$$\text{(II.)} \qquad 4\lambda^2 = \frac{\alpha^3}{6(\sqrt{(l^2-\beta^2)}-\alpha)},$$

puisque la plus grande quantité qu'on y néglige est le terme en $\frac{\alpha^4}{(2\lambda)^4} \times \frac{1}{2.3.4.5}$, qui pour $\alpha = 0{,}5.\lambda$ vaut à peine quelques cent-millièmes. Il est clair d'ailleurs que cette limite inférieure de α en fraction de λ, dépend du degré d'approximation qu'on veut obtenir dans les résultats. Quand une fois on a calculé le paramètre λ par l'une des formules (II.), ou par la table ainsi construite, on fera usage de la formule (III.) pour en déduire la plus grande flèche u ou l'ordonnée verticale du sommet. En la resolvant par rapport à cette dernière, on en tire:

$$u = \tfrac{1}{2} l \sqrt{\left(\frac{l^2-\beta^2+4\lambda^2}{l^2-\beta^2}\right)} + \tfrac{1}{2}\beta - \lambda,$$

ce qui suppose toujours que le second point de suspension B soit inférieur au premier A, et que u marque la distance verticale du sommet à l'horizontale passant par A. Dans le cas contraire il suffit de changer le signe de β dans la valeur de u. La table doit donner, à côté de la valeur du rapport $\sqrt{(l^2-\beta^2)}:\alpha$, celle $\sqrt{(l^2-\beta^2)} = m.\lambda$, partant $l^2-\beta^2 = m^2\lambda^2$, et il vient pour u:

$$\text{(V.)} \qquad u = \frac{l}{2m} \cdot \sqrt{(m^2+4)} - \lambda + \tfrac{1}{2}\beta;$$

et cette dernière formule est sans doute la plus expéditive dans le calcul de la flèche u. Enfin voici une dernière remarque qui nous parait encore utile.

En reprenant l'équation (I.) sous la forme

$$l^2-\beta^2 = 4\lambda^2 . \mathrm{Sin}^2\left(\frac{\alpha}{2\lambda}\right),$$

et posant $\frac{\alpha}{2\lambda} = \mu$, on la transforme en celle-ci:

$$\alpha = \sqrt{(l^2-\beta^2)} \cdot \frac{\mu}{\mathrm{Sin}\,\mu}.$$

En y considérant les quantités l, β, comme des données fixes ou arbitraires, on peut attribuer à μ des valeurs plus ou moins resserrées μ_1, μ_2, μ_3, ...

L'égalité précédente donnera les valeurs correspondantes de α: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ en parties de $\sqrt{(l^2-\beta^2)}$, savoir:

$$\alpha_1 = \sqrt{(l^2-\beta^2)}\cdot\frac{\mu_1}{\sin\mu_1}, \quad \alpha_2 = \sqrt{(l^2-\beta^2)}\cdot\frac{\mu_2}{\sin\mu_2}, \quad \text{etc.}$$

On formera une table à deux colonnes dont la première contient les valeurs de μ, et la seconde les coefficients correspondants de $\sqrt{(l^2-\beta^2)}$; ainsi l, β, α étant donnés en nombres, on divisera α par la valeur numérique du radical qui en résulte; on cherchera le quotient q_n dans la seconde colonne; et le nombre correspondant μ_n de la première colonne fera connaître le rapport actuel de $\frac{\alpha}{2\lambda}$, et parsuite λ. Enfin on pourrait aussi se borner à une seule table propre à donner les solutions numériques des divers cas particuliers compris dans les *questions* (2°. *et* 1°.) énoncées d'abord. La première colonne qu'il faudrait considérer comme exprimant le rapport $t:\lambda$, ou celui de $\alpha:\lambda$, renfermerait diverses valeurs de ce rapport plus ou moins resserrées; la seconde renfermerait les valeurs correspondantes de $u:\lambda$; la troisième les rapports $u:t$; la quatrième ferait connaître les valeurs $\sqrt{(l^2-\beta^2)}:\lambda$, correspondantes aux nombres de la première, considérée comme exprimant le nombre $\alpha:\lambda$; la cinquième donnerait les rapports de $\sqrt{(l^2-\beta^2)}:\alpha$; et selon qu'il s'agirait d'un cas particulier relatif à la *question* (1°. *ou* 2°.), on ferait usage des colonnes (1, 4, 5), ou de celles (1, 2, 3). Pour atteindre à ce but, il suffirait de prolonger encore quelque peu la table de Mr. *Eytelwein,* et d'y ajouter les quatrième et cinquième colonnes dont il s'agit, en suivant la marche qui a été indiquée d'abord.

§. III.

Remarques sur la tension dynamique des cordons.

Comme il s'agit une fois de cordons, il nous parait utile de présenter quelques observations, concernant leur tension dynamique:

„Lorsqu'un cheval traîne, dit *Poisson* (t. II. page 6) un fardeau sur „une route, et que le mouvement du système demeure uniforme, l'effort du „cheval, parallèlement à la route, est égal au poids décomposé suivant cette „direction, plus le frottement. Il est constant quand l'état de la route et son „inclinaison ne varient pas, si on le suppose transmis par le moyen de plu„sieurs cordons parallèles entr'eux et à la route, et l'effort total sera égal „à la somme des tensions de tous ces cordons. L'inclinaison et l'état de la „route restant les mêmes, si les efforts de l'animal augmentent, ou diminuent,

„le mouvement du système s'accélere ou se ralentit, sans que les tensions „éprouvent aucune variation."

Cette dernière assertion de l'auteur est inadmissible. En effet, pour fixer les idées, supposons qu'il n'y ait qu'un cordon. Soient F, l'effort exercé, Q le poids du fardeau, I l'inclinaison de la route à l'horizon, f le coefficient du frottement, ce qui donne pour le cas d'un mouvement uniforme:

$$F = Q.\sin I + f.Q.\cos I;$$

et la tension du cordon se mesurera indifférement par l'une ou l'autre des forces qui agissent à les deux extrêmités. Ce principe subsiste encore dans le cas du mouvement variable, et la tension T à chaque instant devra se mesurer indifféremment, soit par l'effort moteur F agissant à la première extrêmité A, soit par la résistance qui agit à la seconde extrêmité B. Soit dv l'accroissement momentané de vitesse pendant l'élément dt du temps t après lequel la vitesse acquise est ϑ, on aura évidemment l'équation

$$F = Q\sin I + f.Q\cos I + \frac{Q}{g}\cdot\frac{dv}{dt},$$

puisqu'aux deux forces $Q\sin I$ et $f.Q.\cos I$ s'ajoute maintenant une réaction d'inertie $\frac{Q}{g}\cdot\frac{dv}{dt}$; ce qui donne $T = F =$ etc.

Mais il est manifeste ainsi que la tension du cordon dans le cas d'un mouvement accéléré, est supérieure à celle qui a lieu dans le mouvement uniforme, ou dans le simple état de l'équilibre statique, tandis que celle du mouvement retardé est au contraire moindre; ce qui se conçoit encore une fois directement si l'on considère qu'alors la force d'inertie $\frac{Q}{g}\cdot\frac{dv}{dt}$ devient une quantité en elle-même négative. Quand on veut raisonner d'après le principe de *d'Alembert,* il faut avoir soin de reconnaître ce que l'on y nomme trop vaguement la force perdue. Or la force perdue est invariablement celle qui repond à la quantité de mouvement détruite en chaque instant par suite de la liaison des parties du système. Mais si le cordon était coupé pendant l'instant dt, le corps Q prendrait une vitesse descendante $g\sin I.dt$; donc puisqu'à l'état de liaison il prend l'accroissement ascendant dv, il s'ensuit que la vitesse perdue momentanément est $g\sin I.dt + dv$; ce qui repond à une quantité de mouvement détruite,

$$Q\sin I.dt + \frac{Q}{g}dv,$$

et à une force détruite

$$Q \sin I + \frac{Q}{g} \cdot \frac{dv}{dt};$$

et cela ramène à une valeur exacte de la tension pour le cas où l'on suppose le frottement nul. S'il fallait une fois tenir compte de cette dernière résistance, l'emploi de la méthode de *d'Alembert* offrirait un nouvel embarras, outre l'erreur à laquelle on s'expose en estimant inexactement une force perdue. Mais cette assertion de *Poisson* ne peut-être attribuée qu'à un moment d'oubli, parcequ'un peu plus loin l'auteur évalue exactement la tension des cordons, en traitant l'exemple du mouvement de deux corps pesants, posés sur deux plans inclinés de même hauteur, et liés entr'eux par un fil inextensible, passant sur une poulie de renvoi dont le centre se trouve au sommet commun des deux plans (Voir t. I. p. 657. fig. 81 et t. II. page 10). Toutefois cet exemple même donne encore lieu à quelques observations qui sont utiles dans le cas général où l'on voudra tenir compte de la force d'inertie de la poulie qui supporte le cordon. A cet effet je reprendrai le problème dans son entier.

Soient (Fig. 3.) h la hauteur commune des deux plans, l, l' leurs longueurs, mg, $m'g$ les poids des deux corps correspondants. Pour fixer les idées, on peut supposer que le poids $m.g$ qui s'appuie sur le plan $AC = l$, l'emporte sur le poids $m'.g$ qui s'appuie sur $BC = l'$, et qu'après le temps t, compté de l'origine du mouvement, le système a pris la position $GIKH$; que le corps mg a acquis la vitesse descendante v, tandis que le corps $m'g$ a acquis une vitesse égale mais ascendante sur son plan. Pendant l'instant dt qui succède au temps t, les deux masses m, m' gagnent les accroissements de quantité de mouvement $m\,dv$, $m'dv$; ce qui occasionne en G de G vers I une réaction d'inertie mesurée en grandeur et en direction par $-m \cdot \frac{dv}{dt}$, et au point H une réaction mesurée par $-m' \cdot \frac{dv}{dt}$. En second lieu, nous avons aux points G, H respectivement les forces actives $mg \cdot \frac{h}{l}$, et $-m'g \cdot \frac{h}{l'}$. En outre, pour un accroissement de vitesse momentané dv des deux poids, toute molécule $d\mu$ de la poulie, située à une distance λ de l'axe ou du centre de rotation C, prend un accroissement de quantité de vitesse $d\mu . dv \cdot \frac{\lambda}{R}$, et réagit par conséquent avec une force tangentielle

$$-\frac{dv}{dt} \cdot \frac{\lambda\, d\mu}{R}.$$

Ainsi son moment de réaction autour de l'axe en C, aura la valeur $-\frac{dv}{R.dt}\cdot\lambda^2 d\mu$, et la somme des moments des réactions de tous les éléments matériels de la poulie sera par conséquent:

$$-\frac{dv}{R.dt}\cdot S.\lambda^2 d\mu.$$

Et comme l'équilibre doit subsister entre les forces actives de toute espèce et les réactions d'inertie des diverses masses du système, par le moyen de l'axe fixe, il faut que la somme de leurs moments relatifs à l'axe, soit nulle; c'est ce qui donne l'équation

$$mg\cdot\frac{h}{l}\cdot R - m'g\cdot\frac{h}{l'}R - (m+m')\frac{dv}{dt}\cdot R - \frac{dv}{dt}\cdot\frac{S\lambda^2 d\mu}{R} = 0,$$

et en divisant tous les termes par R, et faisant remarquer que le rapport $S\lambda^2 d\mu : R^2$ doit équivaloir à une certaine masse réduite μ_1, ce qui revient à poser $S\lambda^2 d\mu : R^2 = \mu_1$, on obtient:

$$\frac{dv}{dt} = \left(mg\frac{h}{l} - m'g\cdot\frac{h}{l'}\right) : (m+m'+\mu_1);$$

ce qui fait connaître la vitesse, et ensuite l'espace décrit.

Mais c'est la question de la tension des cordons qui doit ici fixer notre attention. A cet effet je fais remarquer, qu'abstraction faite de son poids et de sa masse, comme quantités insensibles, le premier cordon GI doit, à l'état de mouvement, être soumis à ses extrêmités à deux forces égales et contraires, dont chacune exprime sa tension T. Or la force qui sollicite l'extrêmité G est manifestement la force relative $mg\cdot\frac{h}{l}$, diminuée de la réaction d'inertie de la masse m, puisque celle-ci a lieu de G vers I; ainsi l'on aura:

$$T = mg\cdot\frac{h}{l} - m\cdot\frac{dv}{dt},$$

et la valeur de T est ainsi connue, puisque l'on connait déjà $\frac{dv}{dt}$ par les données immédiates m, m', g, l, l', h, μ_1. De même, la force qui sollicite l'extrêmité H du second cordon KH à l'extrêmité, étant le poids relatif $m'g\cdot\frac{h}{l'}$, augmenté de la réaction d'inertie de m', on obtient sa tension T' par l'équation

$$T' = m'g\cdot\frac{h}{l'} + m'\cdot\frac{dv}{dt},$$

dans laquelle on n'a qu'à substituer la valeur de $\frac{dv}{dt}$ obtenue. En calculant ainsi T, T', on reconnaîtra aisément que la tension T du premier cordon est

supérieure à celle du second; mais ce fait était facile à prevoir sans calcul. En effet, outre les forces résistantes $m'\frac{dv}{dt}$, $m'g\cdot\frac{h}{l'}$, qui par le moyen de la poulie se transmettent en I, en sens contraire de la puissance relative, il y a les forces de réaction des molécules inertes de la poulie qui viennent ajouter un surcroît incessant de force résistante ψ; ce qui donne en I une résistance totale

$$(s.) \qquad m'g\cdot\frac{h}{l'}+m'\frac{dv}{dt}+\psi;$$

et c'est cette somme qui doit valoir la tension T' du premier cordon, ou la force $mg\frac{h}{l}-m\cdot\frac{dv}{dt}$. Pour vérifier cette manière de voir, il suffit d'évaluer convenablement la force ψ dûe aux réactions des molécules de la poulie. Or la molécule $d\mu$, située en un point quelconque de la circonférence $2\Pi.\lambda$, occasionne une réaction d'inertie $\frac{dv}{R.dt}.\lambda.d\mu$, pourvue d'un bras de levier λ, et qui équivaut à une force $d\psi$, en I, donnée par l'équation

$$d\psi=\left(\frac{dv}{dt}\right)\cdot\frac{\lambda^2.d\mu}{R^2},$$

d'où résulte:

$$\psi=\left(\frac{dv}{dt}\right)\cdot\frac{S\lambda^2.d\mu}{R^2}=\mu_1\cdot\left(\frac{dv}{dt}\right)\cdot$$

Ainsi la quantité ψ est l'équivalent de la réaction d'inertie d'une masse μ_1, censée concentrée au point de contact de la poulie avec le cordon GI. Ce qui confirme d'ailleurs ce moyen de recherche directe des tensions, c'est qu'en substituant la valeur de ψ dans la somme marquée (*s.*), et égalant le résultat à $mg\cdot\frac{h}{l}-m.\left(\frac{dv}{dt}\right)$, on retrouve une équation différentielle, identique à celle que l'on a trouvée d'abord par la voie directe du principe universel de l'équilibre entre les actions et les réactions. ***Ce principe est la vraie généralisation de la loi de la réaction, toujours égale et contraire à l'action, et on le remplacerait bien difficilement dans la mécanique appliquée par la méthode plus analytique d'Euler, de D'Alembert et de Laplace, laquelle est plus particulièrement propre aux applications de la mécanique céleste.*** C'est ce que je me propose de faire voir à une autre occasion.

Bruxelles, le 1. Fevrier 1853.

8.

Reduction der Bewegung eines schweren, um einen festen Punct rotirenden Revolutionskörpers auf die elliptischen Transcendenten.

(Von Herrn Dr. *C. Lottner,* Lehrer der Mathematik und Physik an der höheren Bürgerschule zu Lippstadt.

C. G. J. Jacobi hat in seiner berühmten Abhandlung im 39. Bande dieses Journals die Rotationsbewegung eines beliebigen Körpers um einen festen Punct, wenn keine beschleunigenden Kräfte darauf wirken, bestimmt; und zwar so, dafs alle zur Kenntnifs dieser Bewegung erforderlichen Gröfsen explicite durch die *Zeit* ausgedrückt sind. Er fand, dafs die Bewegung aus *zwei* periodischen Bewegungen zusammengesetzt sei, deren Perioden im Allgemeinen unter einander incommensurabel sind. Man erhält davon eine klare Vorstellung, wenn man, anstatt die x- und y-Axen in der unveränderlichen Ebene als fest anzunehmen, denselben in dieser Ebene eine gewisse gleichförmige rotatorische Bewegung giebt. Dann werden die *neun* Cosinus, welche die Richtung der Haupt-Axen des Körpers gegen diese beweglichen Axen bestimmen, zu periodischen Functionen der *Zeit.* Auf ganz ähnliche Weise läfst sich auch der Fall behandeln, wenn ein *schwerer* Revolutionskörper um einen Punct seiner Umdrehungs-Axe pendulirt. Diese Bewegung ist alsdann aus *drei* periodischen, im Allgemeinen unter einander incommensurabeln Bewegungen zusammengesetzt. Eine Einsicht in dieselben wird auf folgende Weise erlangt.

1) Man gebe, eben wie *Jacobi,* den in einer horizontalen Ebene befindlichen festen Axen der x und y eine gleichförmige Rotation in dieser Ebene, im Sinne der anfänglichen Bewegung des Körpers, d. h. man setze

$$x\cos\Psi(t-t_0)-y\sin\Psi(t-t_0) \text{ statt } x \text{ und}$$
$$y\cos\Psi(t-t_0)+x\sin\Psi(t-t_0) \text{ statt } y,$$

wo Ψ eine von der Zeit t unabhängige Constante ist. Nach Verlauf der Zeit $\frac{2\pi}{\Psi}$ werden so die Axen wieder an derselben Stelle sein.

2) Man gebe den Haupt-Axen (den Axen der x_1 und y_1) um die z_1-Axe (die Umdrehungs-Axe) eine zweite gleichförmige Rotation, d. h. man setze

$$x_1 \cos \Phi(t-t_0) + y_1 \sin \Phi(t-t_0) \text{ statt } x_1 \text{ und}$$
$$y_1 \cos \Phi(t-t_0) - x_1 \sin \Phi(t-t_0) \text{ statt } y_1,$$

wo Φ eine zweite Constante ist, von deren negativem oder positivem Werthe es abhangt, ob die Bewegung in demselben oder im entgegengesetztem Sinne wie die der x- und y-Axe geschieht. Nach Verlauf der Zeit $\frac{2\pi}{\Phi}$ werden die beiden Haupt-Axen relativ an derselben Stelle sein.

3) Nach diesen Annahmen werden die ***neun*** Coëfficienten, durch welche die Stellung der beiden rotatorisch beweglichen Haupt-Axen und der festen Haupt-Axe der z_1 gegen die ebenfalls beweglichen x- und y-Axen und die verticale z-Axe bestimmt wird, zu periodischen Functionen der ***Zeit;*** d. h. wenn man

$$x_1 = ax + by + cz,$$
$$y_1 = a'x + b'y + c'z,$$
$$z_1 = a''x + b''y + c''z$$

setzt, so sind $a, b, c, a', b', c', a'', b'', c''$ Functionen der ***Zeit,*** die eine gewisse, näher zu bestimmende Periode T haben.

Hieraus zeigt sich, dafs, ***wenn man die Positionen des beweglichen Körpers während einer begrenzten Zeit T kennt, alle zukünftigen und vergangenen Positionen leicht abgeleitet werden können.*** Es sei z. B. die Position zur Zeit t gegeben, und man soll die zur Zeit $t \pm iT$, (wo i irgend eine ganze Zahl ist) Statt findende Position angeben: so drehe man den Körper um die z-Axe (d. h. um die Richtung der ***Schwere***), um einen Winkel $i\psi T$; sodann drehe man ihn um die z_1-Axe (d. h. um seine Umdrehungs-Axe) um einen Winkel $-i\Phi T$: beide Drehungen mögen in demselben Sinne wie die anfängliche Bewegung des Körpers geschehen. Alsdann wird man die verlangte Stellung haben. Die entgegengesetzte Rotation ist anzuwenden, wenn die zu der Zeit $t - iT$ gehörige Position gesucht wird.

Bestimmung der *neun* Cosinus durch die Zeit, mittels der elliptischen Functionen.

Im Folgenden werden wir uns überall der Bezeichnungen von „***Poisson,*** Mécanique." (Tome II. §. 425—429) bedienen.

A und C seien die Trägheitsmomente in Bezug auf die x_1- und z_1-Axen.

M sei die Masse des Körpers, g die Schwere, $Mg = P$.

γ sei die Entfernung des Schwerpuncts von der $x_1 y_1$-Ebene;

n die Umdrehungsgeschwindigkeit parallel mit derselben Ebene;

l das Moment der Gröfsen der Bewegung in Bezug auf die verticale Axe der z;

h die bei Bestimmung der lebendigen Kraft vorkommende Constante.

α_1, α_2, α_3 seien die drei Wurzeln der cubischen Gleichung

$$(2APy\xi + Ah)(1-\xi^2) - (Cn\xi - l)^2 = 0;$$

wobei zu bemerken, dafs $-\alpha_3 > 1$ ist, und α_1 und α_2 zwischen -1 und $+1$ liegen.

k, der Modul aller vorkommenden elliptischen Functionen, sei $= \sqrt{\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_1-\alpha_3}}$,

$k' = \sqrt{\frac{\alpha_2-\alpha_3}{\alpha_1-\alpha_3}}$.

$$\sin^2 \mathrm{am}\, ia_1 = -\frac{\alpha_1-\alpha_3}{1-\alpha_1},\quad \sin^2 \mathrm{am}\,(ia_2+K) = \sin^2 \mathrm{coam}\, ia_2 = \frac{\alpha_1-\alpha_3}{1+\alpha_1},$$

$$\text{wo}\quad i = \sqrt{-1},\quad K = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\partial\varphi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}}$$

oder

$$a_2 = \int_0^{\sqrt{\frac{-(1+\alpha_3)}{\alpha_2-\alpha_3}}} \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^2)}\sqrt{(1-k^2x^2)}},\qquad a_1 = \int_0^{\sqrt{\frac{\alpha_1-\alpha_3}{1-\alpha_3}}} \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^2)}\sqrt{(1-k'^2x^2)}}.$$

$$m = \sqrt{\left(\frac{P\gamma}{2A}(\alpha_1-\alpha_3)\right)},\qquad m(t-t_0) = u.$$

H und Θ seien die von *Jacobi* eingeführten Transcendenten,

$H(i(a_1+a_2)+K)\,H(i(a_1-a_2)-K) = D,$

$\Theta(u-ia_1) = A',\quad \Theta(u+ia_1) = B',\quad \Theta(u-ia_2-K) = A'',$

$\Theta(u+ia_2+K) = B''$. Dann erhält man folgende

Tafel der *neun* Cosinus:

$$a = \frac{1}{2D}\,\frac{H^2 ia_1(B''^2+A''^2) - H^2(ia_2+K)(B'^2+A'^2)}{\Theta^2 u},$$

$$a' = \frac{1}{2iD}\,\frac{H^2 ia_1(B''^2-A''^2) - H^2(ia_2+K)(B'^2-A'^2)}{\Theta^2 u},$$

$$b = -\frac{1}{2iD}\,\frac{H^2 ia_1(B''^2-A''^2) + H^2(ia_2+K)(B'^2-A'^2)}{\Theta^2 u},$$

$$b' = \frac{1}{2D}\,\frac{H^2 ia_1(B''^2-A''^2) + H^2(ia_2+K)(B'^2+A'^2)}{\Theta^2 u},$$

$$c = -\frac{Hia_1 H(ia_2+K)}{D}\,\frac{B'B''-A'A''}{\Theta^2 u},$$

$$c' = -\frac{Hia_1 H(ia_2+K)}{iD}\cdot\frac{B'B''+A'A''}{\Theta^2 u},$$

$$a'' = \frac{Hia_1 H(ia_2+K)}{D}\cdot\frac{B'A''-A'B''}{\Theta^2 u},$$

$$b'' = \frac{Hia_1 H(ia_2+K)}{iD}\cdot\frac{B'A''+A'B''}{\Theta^2 u},$$

$$c'' = \frac{1}{D}\,\frac{H^2 ia_1 B''A''+H^2(ia_2+K)B'A'}{\Theta^2 u}.$$

Die Gröfsen Ψ und Φ, von denen die Bewegungen der Axen der x, y und der x_1, y_1 abhangen, ergeben sich durch die Formeln

$$\Psi = m\Big[\frac{\partial.\log Hia_1}{\partial a_1}+\frac{\partial.\log H(ia_2+K)}{\partial a_2}\Big],$$

$$\Phi = \frac{n(A-C)}{A}-m\Big[\frac{\partial.\log Hia_1}{\partial a_1}-\frac{\partial.\log H(ia_2+K)}{\partial a_2}\Big].$$

Beweis.

I.

Die neun Cosinus lassen sich bekanntlich, wie folgt, als Functionen dreier Winkel ϑ, ψ, φ ausdrücken:

$$a = \cos\vartheta\sin\psi\sin\varphi+\cos\psi\cos\varphi, \qquad a' = \cos\vartheta\cos\psi\sin\varphi-\sin\psi\cos\varphi,$$
$$a'' = -\sin\vartheta\sin\varphi,$$
$$b = \cos\vartheta\sin\psi\cos\varphi-\cos\psi\sin\varphi, \qquad b' = \cos\vartheta\cos\psi\sin\varphi+\sin\psi\sin\varphi,$$
$$b'' = -\sin\vartheta\cos\varphi,$$
$$c = \sin\vartheta\sin\psi, \qquad c' = \sin\vartheta\cos\psi,$$
$$c'' = \cos\vartheta.$$

Die *geometrische* Bedeutung von φ, ϑ, ψ möge übergangen werden, da sie von ***Euler***, ***Poisson*** und ***Jacobi*** genugsam dargethan ist. Die *dynamischen* Differentialgleichungen des Problems lauten bei ***Poisson*** am angeführten Orte wie folgt:

$$(1.)\quad \begin{cases} Cn\cos\vartheta - A\sin^2\vartheta\,\dfrac{\partial\psi}{\partial t} = l, \\ A\Big(\sin^2\vartheta\,\dfrac{\partial\psi^2}{\partial t^2}+\dfrac{\partial\vartheta^2}{\partial t^2}\Big) = 2P\gamma\cos\vartheta+h, \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial t} = n+\cos\vartheta\,\dfrac{\partial\psi}{\partial t}. \end{cases}$$

Die Elimination giebt hieraus, wenn $(2AP\gamma\cos\vartheta+Ah)\sin^2\vartheta-(Cn\cos\vartheta-l)^2$ durch R bezeichnet wird:

$$(2.)\quad t-t_0=\int\frac{A\sin\vartheta}{\sqrt{R}}\partial\vartheta,\qquad \psi-\psi_0=\int\frac{Cn\cos\vartheta-l}{\sin\vartheta}\cdot\frac{\partial\vartheta}{\sqrt{R}},$$
$$\varphi-\varphi_0=\frac{n(A-C)}{A}(t-t_0)+\int\frac{Cn-l\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\cdot\frac{\partial\vartheta}{\sqrt{R}}.$$

ψ_0 und φ_0 sind die zur Zeit t_0 Statt findenden Werthe von ψ und φ. Aus der ersten Gleichung ist ϑ als Function von t zu bestimmen, und dann geben die beiden andern Gleichungen ψ und φ als Functionen, zunächst von ϑ, mithin auch von t.

Man setze $\cos\vartheta=\xi$, so ergiebt sich:

$$t-t_0=-\int\frac{A\partial\xi}{\sqrt{[(2AP\gamma\xi+Ah)(1-\xi^2)-(Cn\xi-l)^2]}}=-\int\frac{A\partial\xi}{\sqrt{R}}.$$

Um dieses Integral auf die bekannte Form der elliptischen Functionen zu bringen, ist es nöthig, den Ausdruck dritter Ordnung unter der Wurzel in seine drei Factoren aufzulösen. Dieselben müssen alle ***reell*** sein. Um Dies darzuthun werde zunächst bemerkt, dafs R für ***reelle*** Werthe von ξ immer ***reell*** und ***stetig*** ist. Die Grenzen, zwischen welchen $\xi=\cos\vartheta$ liegen kann, so dafs für ϑ reelle Werthe Statt finden, sind $+1$ und -1; für diese Werthe von ξ wird der Ausdruck respective zu $-(Cn-l)^2$ und $-(Cn+l)^2$, also beidemal ***negativ***. Er mufs aber, während ξ sich im genannten Intervalle bewegt, jedenfalls eine Zeit lang ***positiv*** sein, denn sonst würde $\sqrt{R}$ und in Folge davon t, imaginär; was der Natur des Problems widerspricht. R mufs also, während ξ von -1 bis $+1$ wächst, zweimal durch Null gehen: also mufs die Gleichung $R=0$ zwei ***reelle*** Wurzeln haben, welche die Cosinus der gröfsten und kleinsten Werthe von ϑ ausdrücken. Daraus folgt von selbst, dafs die dritte Wurzel von $R=0$ ebenfalls ***reell*** sein mufs. Sie kann ferner nicht positiv und nicht gröfser als 1 sein. Denn dies könnte nur Statt finden, wenn R für positive Werthe von ξ, die gröfser als 1 sind, durch Null hindurch vom Negativen zum Positiven ginge. Dann müfste aber R nothwendigerweise zum viertenmale, durch Null hindurch, vom Positiven zum Negativen gehen, weil es für $\xi=+\infty$, $-\infty$ wird. Eine vierte Wurzel ist aber nicht möglich. Ferner kann die fragliche Wurzel nicht zwischen -1 und $+1$ liegen. Denn ginge R zum drittenmale für dieses Intervall von ξ durch Null, so müfste Dies ebenfalls noch einmal geschehen, weil R sowohl für $\xi=-1$ als für $\xi=+1$ ***negativ*** ist. Es bleibt daher nur übrig, dafs die dritte Wurzel ***negativ*** und ***gröfser als*** 1 sein mufs.

Um die drei Wurzeln aus den Coëfficienten wirklich darzustellen,

setze man:

$$\frac{Ah+C^2n^2}{2APγ}=3\mu_1,\qquad 1+\frac{Cnl}{APγ}=6\mu_2,\qquad \frac{Ah-l^2}{2APγ}=2\mu_3,$$

$$r=\mu_1^2+2\mu_2,\qquad \cos\chi=\frac{\mu_3-3\mu_1\mu_2-\mu_1^3}{\sqrt{r^3}}.$$

Dann erhält man für die cubische Gleichung

$$\xi^3+3\mu_1\xi^2-6\mu_2\xi-2\mu_3=0$$

die Wurzeln

$$(3.)\qquad \begin{cases}\xi_1= \quad 2\sqrt{r}\cos\frac{1}{3}x \quad -\mu_1=\alpha_1,\\ \xi_2=-2\sqrt{r}\cos\frac{1}{3}(\pi+x)-\mu_1=\alpha_2,\\ \xi_3=-2\sqrt{r}\cos\frac{1}{3}(\pi-x)-\mu_1=\alpha_3.\end{cases}$$

Da die Differenzen

$$\alpha_1-\alpha_2=4\sqrt{r}\cos\tfrac{1}{6}(\pi+2x)\cos\tfrac{1}{6}\pi,$$
$$\alpha_2-\alpha_3=4\sqrt{r}\sin\tfrac{1}{3}x\sin\tfrac{1}{3}\pi$$

immer positiv sind, weil x immer unter π liegend angenommen werden kann, also $\frac{1}{6}(\pi+2x)$ und $\frac{1}{3}x$ unter $\frac{1}{2}\pi$ liegt, so folgt, dafs α_3 die zuletzt besprochene Wurzel ist und $\xi=\cos\vartheta$ immer zwischen α_1 und α_2 liegen mufs, um reelle Werthe für $\sqrt{R}$ zu geben.

Um nun das elliptische Integral

$$t-t_0=-\sqrt{\frac{A}{2Pγ}}\cdot\int\frac{\partial\xi}{\sqrt{[-(\xi-\alpha_1)(\xi-\alpha_2)(\xi-\alpha_3)]}}$$

auf die Normalform zu bringen, setzt man bekanntlich

$$\frac{\alpha_1-\xi}{\alpha_1-\alpha_2}=z^2,\qquad k^2=\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_1-\alpha_3}=\frac{1-\sqrt{\frac{1}{3}}\operatorname{tg}\frac{1}{3}x}{1+\sqrt{\frac{1}{3}}\operatorname{tg}\frac{1}{2}x}.$$

Dies giebt

$$-\int\frac{\partial\xi}{\sqrt{[-(\xi-\alpha_1)(\xi-\alpha_2)(\xi-\alpha_3)]}}=\frac{2}{\sqrt{(\alpha_1-\alpha_3)}}\int\frac{\partial z}{\sqrt{(1-z^2)}\sqrt{(1-k^2z^2)}}.$$

Führt man zur Abkürzung $\sqrt{\left(\frac{Pγ}{2A}(\alpha_1-\alpha_3)\right)}=m$, $m(t-t_0)=u$ ein, so ergiebt sich:

$$(4.)\qquad \cos\vartheta=\alpha_1-(\alpha_1-\alpha_2)z^2=\alpha_1-(\alpha_1-\alpha_2)\sin^2\operatorname{am}u.$$

Mithin wäre ϑ explicite durch die ***Zeit*** ausgedrückt.

Es zeigt sich hieraus die *periodische* Natur von ϑ. Es bleibt $\sin^2\operatorname{am}u$ ungeändert, wenn zum Argumente die Gröfse $2K$ hinzukommt, also wenn t um $\frac{2K}{m}$ wächst. Nach Verlauf der Zeit $T=\frac{2K}{n}$ wird also die Umdrehungs-

Axe des Körpers ***denselben*** Abstand von der Verticalen haben. Wenn ϑ von seinem kleinsten bis zu seinem gröfsten Werthe wächst, d. h. wenn $\cos\vartheta$ von α_1 bis α_2 abnimmt, so wächst u von 0 bis K. Die Zeit also, in welcher ϑ dieses Intervall durchläuft, ist $\frac{K}{m} = \frac{1}{2}T$.

II.

Da $\frac{\partial\vartheta}{\sqrt{R}} = \frac{1}{mA}.\partial u$ ist, so hat man zur Bestimmung von ψ die Gleichung

$$\psi - \psi_0 = \frac{1}{mA}\int \frac{Cn\cos\vartheta - l}{\sin^2\vartheta}\cdot\partial u = \frac{1}{2mA}\int\left(\frac{Cn-l}{1-\cos\vartheta} - \frac{Cn+l}{1+\cos\vartheta}\right).\partial u,$$

oder nach (4.)

$$(5.)\quad (\psi-\psi_0)\,2mA = \frac{Cn-l}{1-\alpha_1}\cdot\int\frac{\partial u}{1+\frac{\alpha_1-\alpha_2}{1+\alpha_1}\sin^2\mathrm{am}\,u} - \frac{Cn+l}{1+\alpha_1}\cdot\int\frac{\partial u}{1-\frac{\alpha_1-\alpha_2}{1+\alpha_1}\sin^2\mathrm{am}\,u}.$$

$\frac{\alpha_1-\alpha_2}{1-\alpha_1}$ ist eine positive Gröfse; $\frac{\alpha_1-\alpha_2}{1+\alpha_1}$ ist ebenfalls positiv und <1, k^2 war gleich $\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_1-\alpha_3}$; da aber $-\alpha_3$ nach dem Vorhergehenden >1 ist, so ist $\frac{\alpha_1-\alpha_2}{1+\alpha_1} > k^2$ und <1. Man mufs demnach, um die vorstehenden Integrale auf die *Jacobi*sche Form der elliptischen Functionen dritter Gattung zu bringen, (S. Fund. nova §. 60. pag. 170),

$$(6.)\quad \begin{cases} \frac{\alpha_1-\alpha_2}{1-\alpha_1} = -k^2\sin^2\mathrm{am}\,ia_1 = -k^2\sin^2\varepsilon_1, \\ \frac{\alpha_1-\alpha_2}{1-\alpha_1} = k^2\sin^2\mathrm{am}\,(ia_2+K) = k^2\sin^2\mathrm{coam}\,ia_2 = k^2\sin^2\varepsilon_2 \end{cases}$$

setzen. Aus diesen Formeln ergeben sich leicht die folgenden:

$$(7.)\quad \begin{cases} \sin^2\varepsilon_1 = -\frac{\alpha_1-\alpha_3}{1-\alpha_1}, & \cos^2\varepsilon_1 = \frac{1-\alpha_3}{1-\alpha_1}, & \Delta^2\varepsilon_1 = \frac{1-\alpha_2}{1-\alpha_1}, \\ \sin^2\varepsilon_2 = \frac{\alpha_1-\alpha_3}{1+\alpha_1}, & \cos^2\varepsilon_2 = \frac{1+\alpha_3}{1+\alpha_1}, & \Delta^2\varepsilon_2 = \frac{1+\alpha_2}{1+\alpha_1}. \end{cases}$$

Nach Substitution der Ausdrücke (6.) in (5.) nimmt letztere Gleichung folgende Gestalt an:

$$(8.)\quad (\psi-\psi_0)\,2mA = \frac{2(Cn\alpha_1-l)}{1-\alpha_1^2} + \frac{(Cn-l)\sin\varepsilon_1}{(1-\alpha_1)\cos\varepsilon_1\Delta\varepsilon_1}\cdot\int\frac{k^2\sin\varepsilon_1\cos\varepsilon_1\Delta\varepsilon_1\sin^2\mathrm{am}\,u\,\partial u}{1-k^2\sin^2\varepsilon_1\sin^2\mathrm{am}\,u}$$
$$-\frac{(Cn+l)\sin\varepsilon_2}{(1+\alpha_1)\cos\varepsilon_2\Delta\varepsilon_2}\cdot\int\frac{k^2\sin\varepsilon_2\cos\varepsilon_2\Delta\varepsilon_2\sin^2\mathrm{am}\,u\,\partial u}{1-k^2\sin^2\varepsilon_2\sin^2\mathrm{am}\,u}.$$

Es ist aber

$$\frac{\sin\varepsilon_1}{(1-\alpha_1)\cos\varepsilon_1\,\Delta\varepsilon_1} = \frac{\sqrt{(\alpha_1-\alpha_3)}}{\sqrt{[-(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)(1-\alpha_3)]}},$$

$$\frac{\sin\varepsilon_2}{(1+\alpha_1)\cos\varepsilon_2\,\Delta\varepsilon_2} = \frac{\sqrt{(\alpha_1-\alpha_3)}}{\sqrt{[(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)(1+\alpha_3)]}}.$$

Berücksichtigt man ferner den Werth von m und macht von der *Jacobi*schen Bezeichnung Gebrauch, so verwandelt sich (8.) in:

$$(9.)\quad \psi-\psi_0 = \frac{Cn\alpha_1-l}{1-\alpha_1^2}\cdot\frac{u}{mA} + \frac{Cn-l}{\sqrt{(2APy)}\sqrt{[-(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)(1-\alpha_3)]}}\Pi(u,ia_1) - \frac{Cn+l}{\sqrt{(2APy)}\sqrt{[(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)(1+\alpha_3)]}}\cdot\Pi(u,ia_2+K).$$

Die Gröfsen

$\sqrt{(2APy)}\sqrt{[-(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)(1-\alpha_3)]}$ und $\sqrt{(2APy)}\sqrt{[(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)(1+\alpha_3)]}$ erhält man, wenn man in $\sqrt{R}$ statt ξ respective $+1$ und -1 setzt. In diesen Fällen wird die Wurzelgröfse zu $i(Cn-l)$ und $-i(Cn+l)$; also ist das Resultat:

$$\psi-\psi_0 = \frac{Cn\alpha_1-l}{1-\alpha_1^2}\cdot\frac{u}{mA} + \frac{1}{i}\Pi(u,ia_1) + \frac{1}{i}\Pi(u,ia_2+K).$$

Nach der Formel der „Fundamenta 52. S. 146"

$$\Pi(u,a) = \frac{u\partial.\log\Theta a}{\partial a} + \tfrac{1}{2}\log\frac{\Theta(u-a)}{\Theta(u+a)}$$

läfst sich die Umwandlung

$$(10.)\quad \psi-\psi_0 = \frac{Cn\alpha_1-l}{1-\alpha_1^2}\cdot\frac{u}{mA} - \left(\frac{\partial\log\Theta ia_1}{\partial a_1} + \frac{\partial.\log\Theta(ia_2+K)}{\partial a_2}\right)u + \frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u-ia_2-K)\Theta(u-ia_1)}{\Theta(u+ia_2+K)\Theta(u+ia_1)}$$

machen, und es mufs noch das Glied $\frac{Cn\alpha_1-l}{1-\alpha_1^2}$ näher bestimmt werden. Bezeichnet man die Wurzelgröfsen in (9.) mit R_1 und R_{-1}, so ist

$$-2il = \sqrt{(2APy)}(R_1+R_{-1}),\quad 2iCn = \sqrt{(2APy)}(R_1-R_{-1}),$$

$$2i(Cn\alpha_1-l) = \sqrt{(2APy)}\{(1+\alpha_1)R_1+(1-\alpha_1)R_{-1}\},$$

$$\frac{2i(Cn\alpha_1-l)}{(1-\alpha_1^2)\sqrt{(2APy)}\sqrt{(\alpha_1-\alpha_3)}} = \frac{1}{\sqrt{(\alpha_1-\alpha_3)}}\cdot\left\{\frac{R_1}{1-\alpha_1}+\frac{R_{-1}}{1+\alpha_1}\right\}$$

$$= \frac{\cos\mathrm{am}\,ia_1\,\Delta\mathrm{am}\,ia_1}{\sin\mathrm{am}\,ia_1} + \frac{\cos\mathrm{am}\,(ia_2+K)\,\Delta\mathrm{am}\,(ia_2+K)}{\sin\mathrm{am}\,(ia_2+K)}.$$

Es ist

$$\frac{\cos\mathrm{am}\,a\,\Delta\mathrm{am}\,a}{\sin\mathrm{am}\,a} = \frac{\partial.\log\sin\mathrm{am}\,a}{\partial a} = \frac{\partial\log\frac{Ha}{\Theta a}}{\partial a},$$

folglich

$$\frac{Cn\alpha_1 - l}{1-\alpha_1^2}\cdot\frac{u}{mA} = -\left[\frac{\partial(\log Hia_1 - \log\Theta ia_1)}{\partial a_1} + \frac{\partial[\log H(ia_2+K) - \Theta(ia_2+K)]}{\partial a_1}\right]u.$$

Addirt man dieses Glied zu dem andern in u multiplicirten in (10.), so heben sich die Θ Functionen weg. Man setze hierauf zur Abkürzung:

$$m\left(\frac{\partial.\log Hia_1}{\partial a_1} + \frac{\partial.\log H(ia_2+K)}{\partial a_2}\right) = \Psi, \qquad \psi - \psi_0 + \Psi(t-t_0) = \psi',$$

so erhält man:

$$(11.) \qquad \psi' = \frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u-ia_1)\Theta(u-ia_2-K)}{\Theta(u+ia_1)\Theta(u+ia_2+K)}.$$

Hieraus zeigt sich, dafs der Winkel ψ aus einem der Zeit *proportionalen* und einem *periodischen* Gliede besteht. Nimmt man also, wie in der Einleitung bemerkt, an, dafs die Axe der x und y nicht fest sei, sondern eine der Zeit proportionale Umdrehungsbewegung habe, so dafs sie in der Zeit t den Winkel ψt beschreibt, so läfst sich in die neuen Cosinus statt des Winkels ψ der Winkel ψ' einführen.

Wenn u um $2K$, oder t um $\frac{2K}{m} = T$ wächst, so vermindert sich ψ um $\frac{2K}{m}\cdot\Psi$ oder um $T.\Psi$, da die Gröfse unter dem log denselben Werth behält. ψ' hat also eine Periode von der Weite T.

Aus der Gleichung (11.) ergiebt sich leicht:

$$e^{i\psi'} = \sqrt{\frac{\Theta(u-ia_1)\Theta(u-ia_2-K)}{\Theta(u+ia_1)\Theta(u+ia_2+K)}},$$

$$\cos\psi' = +\frac{\Theta(u+ia_1)\Theta(u+ia_2+K)+\Theta(u-ia_1)\Theta(u-ia_2-K)}{2\sqrt{N}},$$

$$\sin\psi' = -\frac{\Theta(u+ia_1)\Theta(u+ia_2+K)-\Theta(u-ia_1)\Theta(u-ia_2-K)}{2\sqrt{N}},$$

wenn

$$N = \Theta(u+ia_1)\Theta(u-ia_1)\Theta(u+ia_2+K)\Theta(u-ia_2-K) \text{ ist.}$$

III.

Man kann auch, mehrerer Gleichmäfsigkeit wegen, mittels der in (7.) gegebenen Werthe der α, den $\cos\vartheta$ durch die Θ Functionen ausdrücken. Es ergiebt sich:

$$\alpha_1 = \frac{\sin^2\varepsilon_1+\sin^2\varepsilon_2}{\sin^2\varepsilon_1-\sin^2\varepsilon_2}, \quad 1+\alpha_1 = \frac{2\sin^2\varepsilon_1}{\sin^2\varepsilon_1-\sin^2\varepsilon_2} = \frac{2H^2ia_1\,\Theta^2(ia_2+K)}{H^2ia_1\,\Theta^2(ia_2+K)-\Theta^2ia_1\,H^2(ia_2+K)},$$

$$1-\alpha_1 = -\frac{2\sin^2\varepsilon_2}{\sin^2\varepsilon_1-\sin^2\varepsilon_2} = -\frac{2H^2(ia_2+K)\Theta^2ia_1}{H^2ia_1\Theta^2(ia_2+K)-\Theta^2ia_1H^2(ia_2+K)}.$$

Nach der Formel

$$H(u+v)H(u-v) = \frac{H^2u\Theta v - \Theta^2uH^2v}{\Theta^20}$$

(21. S. 175 der „Fund.") lassen sich diese Ausdrücke auch folgendermafsen schreiben:

$$(12.)\quad \begin{cases} 1+\alpha_1 = \dfrac{2H^2ia_1\Theta^2(ia_2+K)}{\Theta^20H\{i(a_1+a_2)+K\}H\{i(a_1-a_2)-K\}}, \\ 1-\alpha_1 = -\dfrac{2H^2(ia_2+K)\Theta^2ia_1}{\Theta^20H\{i(a_1+a_2)+K\}H\{i(a_1-a_2)-K\}}. \end{cases}$$

Ferner

$$\cos\vartheta = \alpha_1-(\alpha_1-\alpha_2)\sin^2\mathrm{am}\,u = \frac{\sin^2\varepsilon_1+\sin^2\varepsilon_2}{\sin^2\varepsilon_1-\sin^2\varepsilon_2} - \frac{2k^2\sin^2\varepsilon_1\sin^2\varepsilon_2}{\sin^2\varepsilon_1-\sin^2\varepsilon_2}\sin^2\mathrm{am}\,u$$
$$= \frac{\sin^2\varepsilon_1(1-k^2\sin^2\varepsilon_2\sin^2\mathrm{am}\,u)+\sin^2\varepsilon_2(1-k^2\sin^2\varepsilon_1\sin^2\mathrm{am}\,u)}{\sin^2\varepsilon_1-\sin^2\varepsilon_2}.$$

Durch Anwendung der Formel

$$\Theta(u+a)\Theta(u-a) = \left(\frac{\Theta u\Theta a}{\Theta 0}\right)^2.(1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,a\sin^2\mathrm{am}\,u)$$

(3. S. 152 der „Fund.") erhält man hieraus:

$$(13.)\quad c'' = \cos\vartheta$$
$$= \frac{1}{H\{i(a_1+a_2)+K\}H\{i(a_1-a_2)-K\}}\Big[\frac{H^2ia_1\Theta(u+ia_2+K)\Theta(u-ia_2-K)}{\Theta^2u}$$
$$+\frac{H^2(ia_2+K)\Theta(u+ia_1)\Theta(u-ia_1)}{\Theta^2u}\Big].$$

Um die Coëfficienten c und c' zu bestimmen, mufs auch $\sin\vartheta$ durch die Θ Functionen ausgedrückt werden. Man erhält

$$\sin^2\vartheta = (1-\cos\vartheta)(1+\cos\vartheta) = (1-\alpha_1^2)(1-k^2\sin^2\varepsilon_1\sin^2\mathrm{am}\,u)(1-k^2\sin^2\varepsilon_2\sin^2\mathrm{am}\,u)$$
$$= (1-\alpha_1^2)\frac{\Theta^40N}{\Theta^2ia_1\Theta^2(ia_2+K)\Theta^4u},\ \text{nach der oben citirten Formel:}$$
$$= -\frac{4\sin^2\varepsilon_1\sin^2\varepsilon_2}{(\sin^2\varepsilon_1-\sin^2\varepsilon_2)^2}\cdot\frac{\Theta^40N}{\Theta^2ia_1\Theta^2(ia_2+K)\Theta^4u},$$

folglich, mit Benutzung von (12.):

$$(14.)\quad \sin\vartheta = \frac{2iHia_1H(ia_2+K)}{H\{i(a_1+a_2)+K\}H\{i(a_1-a_2)-K\}}\cdot\frac{\sqrt{N}}{\Theta^2u}.$$

Durch Multiplication von (11. und 14.) erhält man für die Werthe von c und c':

$$(15.)\quad \begin{cases} c = \sin\vartheta\sin\psi' = -\dfrac{Hia_1 H(ia_2+K)}{H\{i(a_1+a_2)+K\}H\{i(a_1-a_2)-K\}} \\ \qquad\qquad \times\dfrac{\Theta(u+ia_1)\Theta(u+ia_2+K)-\Theta(u-ia_1)\Theta(u-ia_2-K)}{\Theta^2 u}, \\ c' = \sin\vartheta\cos\psi' = -\dfrac{iHia_1 H(ia_2+K)}{H\{i(a_1+a_2)+K\}H\{i(a_1-a_2)-K\}} \\ \qquad\qquad \times\dfrac{\Theta(u+ia_1)\Theta(u+ia_2+K)+\Theta(u-ia_1)\Theta(u-ia_2-K)}{\Theta^2 u}. \end{cases}$$

IV.

Wir wenden uns nun zur Bestimmung des Winkels φ. Derselbe war durch folgende Gleichung gegeben:

$$\varphi-\varphi_0 = \frac{n(A-C)}{A}(t-t_0)+\int\frac{Cn-l\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\cdot\frac{\partial\vartheta}{\sqrt{R}}.$$

Nach einigen Umformungen, die denen in (II.) vollkommen analog sind, nimmt die Gleichung die Gestalt

$$(16.)\quad \varphi-\varphi_0 = \frac{n(A-C)}{mA}\cdot u+\frac{1}{2mA}\int\left(\frac{Cn+l}{1+\cos\vartheta}+\frac{Cn-l}{1-\cos\vartheta}\right)\partial u,$$

oder

$$\varphi-\varphi_0 = \frac{n(A-C)u}{mA}+\frac{Cn-l\alpha_1}{(1-\alpha_1^2)mA}\cdot u+\frac{1}{i}\Pi(u,ia_1)-\frac{1}{i}\Pi(u,ia_2+K)$$

an, so dafs also der Werth von φ, in Hinsicht des Gliedes welches aus elliptischen Functionen dritter Gattung besteht, nur durch das mittlere Zeichen von dem Werthe von ψ sich unterscheidet. Es folgt weiter:

$$(17.)\quad \varphi-\varphi_0 = \left[\frac{n(A-C)}{mA}+\frac{Cn-l\alpha_1}{(1-\alpha_1^2)mA}-\frac{\partial.\log\Theta ia_1}{\partial a_1}+\frac{\partial.\log\Theta(ia_2+K)}{\partial a_2}\right]u + \frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u-ia_1)\Theta(u+ia_2+K)}{\Theta(u+ia_2)\Theta(u-ia_2+K)}.$$

Durch eine ähnliche Rechnung wie in (III.) findet man ferner:

$$(18.)\quad \begin{cases} \dfrac{Cn-l\alpha_1}{(1-\alpha_1^2)mA} = \dfrac{\cos\mathrm{am}\,ia_1\,\Delta\mathrm{am}\,ia_1}{i\sin\mathrm{am}\,ia_1}-\dfrac{\cos\mathrm{am}\,(ia_2+K)\,\Delta\mathrm{am}\,(ia_2+K)}{i\sin\mathrm{am}\,(ia_2+K)} \\ \qquad\qquad = -\dfrac{\partial\log\dfrac{Hia_1}{\Theta ia_1}}{\partial a_1}+\dfrac{\partial.\log\dfrac{H(ia_2+K)}{\Theta(ia_2+K)}}{\partial a_2}, \\ \dfrac{Cn}{mA} = \dfrac{R_1-R_{-1}}{i\sqrt{(\alpha_1-\alpha_3)}} = \dfrac{\cos\mathrm{am}\,ia_1\,\Delta\mathrm{am}ia_1}{i\sin\mathrm{am}\,ia_1}(1-\alpha_1)-\dfrac{\cos\mathrm{am}(ia_2+K)\Delta\mathrm{am}(ia_2+K)}{i\sin\mathrm{am}\,(ia_2+K)}. \end{cases}$$

Nach einigen Verwandlungen erhält man n ebenfalls durch die elliptischen Functionen folgendermafsen ausgedrückt:

$$(19.)\quad \frac{Cn}{mA} = \frac{2}{\Theta^2 0\, H\{i(a_1+a_2)+K\}\, H\{i(a_1-a_2)-K\}}\Big[H^2(ia_2+K)\,\Theta^2 ia_1 \frac{\partial.\log\frac{Hia_1}{\Theta ia_1}}{\partial a_1} + H^2 ia_1\,\Theta^2(ia_2+K)\cdot\frac{\partial.\log\frac{H(ia_2+K)}{\Theta(ia_2+K)}}{\partial a_2}\Big].$$

Man setze nun die gefundenen Werthe in (17.), behalte aber, um Weitläufigkeit zu vermeiden, die Bezeichnung $\frac{n}{mA}$ bei. Dann ergiebt sich:

$$(20.)\quad \varphi-\varphi_0 = \Big[\frac{n(A-C)}{mA} - \frac{\partial\log Hia_1}{\partial a_1} + \frac{\partial\log H(ia_2+K)}{\partial a_2}\Big]u + \frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u-ia_1)\Theta(u+ia_2+K)}{\Theta(u+ia_1)\Theta(u+ia_2+K)}.$$

Bezeichnet man die Gröfse in den eckigen Klammern mit $\frac{\Phi}{m}$, so ist

$$(21.)\quad \varphi-\varphi_0 = \Phi(t-t_0) + \frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u-ia_1)\Theta(u+ia_2+K)}{\Theta(u+ia_1)\Theta(u-ia_2-K)}.$$

Wenn u um $2K$, oder t um $\frac{2K}{m} = T$ wächst, so ist φ um ΦT gewachsen, denn der log hat seinen Werth wieder erlangt. φ ist ein in der x_1, y_1-Ebene gelegener Winkel und wird vom Durchschnitte dieser und der x, y-Ebene bis zur x_1-Axe gezählt. Nimmt man also, wie in der Einleitung gesagt, an, dafs die Haupt-Axen der x_1 und y_1 in Bezug auf den Körper eine der Zeit proportionale Umdrehungsbewegung haben, so dafs sie während der Zeit t den Winkel ΦT beschreiben, so läfst sich in die Ausdrücke der neun Cosinus, die dann die Richtungen der beweglichen beiden Haupt-Axen der x_1 und y_1 und der im Körper festen Haupt-Axe der z_1 gegen die ebenfalls rotatorisch bewegten Axen der x, y, z bestimmen, statt des Winkels φ der Winkel

$$\varphi' = \varphi - \varphi_0 - \Phi(t-t_0)$$

einführen. Es findet sich leicht:

$$(22.)\quad \begin{cases} e^{i\varphi'} = \sqrt{\dfrac{\Theta(u-ia_1)\Theta(u+ia_2+K)}{\Theta(u+ia_1)\Theta(u-ia_2-K)}}, \\ \cos\varphi' = \dfrac{\Theta(u-ia_1)\Theta(u+ia_2+K)+\Theta(u+ia_1)\Theta(u-ia_2-K)}{2\sqrt{N}}, \\ \sin\varphi' = -\dfrac{\Theta(u-ia_1)\Theta(u+ia_2+K)-\Theta(u+ia_1)\Theta(u-ia_2-K)}{2i\sqrt{N}}. \end{cases}$$

Die Cosinus a'' und b'' lassen sich daraus folgendermafsen bestimmen:

$$(23.)\quad \begin{cases} a'' = -\sin\vartheta\sin\varphi' = \dfrac{Hia_1 H(ia_2+K)}{H\{i(a_1+a_2)+K\}H\{i(a_1-a_2)-K\}} \\ \qquad \times \dfrac{\Theta(u+ia_1)\Theta(u-ia_2-K)-\Theta(u-ia_1)\Theta(u+ia_2+K)}{\Theta^2 u}, \\ b'' = -\sin\vartheta\cos\varphi' = -\dfrac{iHia_1 H(ia_2+K)}{H\{i(a_1+a_2)+K\}H\{i(a_1-a_2)-K\}} \\ \qquad \times \dfrac{\Theta(u+ia_1)\Theta(u-ia_2-K)+\Theta(u-ia_1)\Theta(u+ia_2+K)}{\Theta^2 u}. \end{cases}$$

Um die Werthe der vier noch übrigen Cosinus zu finden, bemerke man, dafs nach einigen leichten Umformungen,

$$(24.)\quad \begin{cases} 4a = +(1-\cos\vartheta)(e^{i(\varphi'+\psi')}+e^{-i(\varphi'+\psi')})+(1+\cos\vartheta)(e^{i(\varphi'-\psi')}+e^{-i(\varphi'-\psi')}), \\ 4ia' = -(1-\cos\vartheta)(e^{i(\varphi'+\psi')}-e^{-i(\varphi'+\psi')})+(1+\cos\vartheta)(e^{i(\varphi'-\psi')}-e^{-i(\varphi'-\psi')}), \\ 4ib' = -(1-\cos\vartheta)(e^{i(\varphi'+\psi')}-e^{-i(\varphi'+\psi')})-(1+\cos\vartheta)(e^{i(\varphi'-\psi')}-e^{-i(\varphi'-\psi')}), \\ 4b' = -(1-\cos\vartheta)(e^{i(\varphi'+\psi')}+e^{-i(\varphi'+\psi')})+(1+\cos\vartheta)(e^{i(\varphi'-\psi')}+e^{-i(\varphi'-\psi')}) \end{cases}$$

ist. Die Werthe der Exponentialgröfsen ergeben sich aus (II. 7. und IV. 22.). Mit den in der Einleitung erwähnten Abkürzungen werden die obigen Ausdrücke folgende Form annehmen:

$$4a = +(1-\cos\vartheta)\cdot\frac{B'^2+A'^2}{A'B'}+(1+\cos\vartheta)\cdot\frac{B''^2+A''^2}{A''B''},$$

$$4ia' = +(1-\cos\vartheta)\cdot\frac{B'^2-A'^2}{A'B'}+(1+\cos\vartheta)\cdot\frac{B''^2-A''^2}{A''B''},$$

$$4ib = +(1-\cos\vartheta)\cdot\frac{B'^2-A'^2}{A'B'}-(1+\cos\vartheta)\cdot\frac{B''^2-A''^2}{A''B''},$$

$$4b' = -(1-\cos\vartheta)\cdot\frac{B'^2+A'^2}{A'B'}+(1+\cos\vartheta)\cdot\frac{B''^2+A''^2}{A''B''}.$$

Nach frühern Formeln ist

$$1-\cos\vartheta = 1-\alpha_1+(\alpha_1-\alpha_2)\sin^2\mathrm{am}\,u = (1-\alpha_1)(1-k^2\sin^2\varepsilon_1\sin^2\mathrm{am}\,u)$$
$$= -\frac{2H^2(ia_2+K)}{H\{i(a_1+a_2)+K\}H\{i(a_1-a_2)-K\}}\cdot\frac{A'B'}{\Theta^2 u},$$

$$1+\cos\vartheta = 1+\alpha_1-(\alpha_1-\alpha_2)\sin^2\mathrm{am}\,u = (1+\alpha_1)(1-k^2\sin^2\varepsilon_2\sin^2\mathrm{am}\,u)$$
$$= +\frac{2H^2 ia_1}{H\{i(a_1+a_2)+K\}H\{i(a_1-a_2)-K\}}\cdot\frac{A''B''}{\Theta^2 u}.$$

Durch Substitution dieser Werthe, und indem man

$$H\{i(a_1+a_2)+K\}H\{i(a_1-a_2)-K\} = D$$

setzt, erhält man, als Endresultat, für die vier Cosinus:

$$a = +\frac{1}{2D}\Big\{H^2 ia_1 \frac{\Theta^2(u+ia_2+K)+\Theta^2(u-ia_2-K)}{\Theta^2 u} - H^2(ia_2+K)\cdot\frac{\Theta^2(u+ia_1)+\Theta^2(u-ia_1)}{\Theta^2 u}\Big\},$$

$$a' = +\frac{1}{2iD}\Big\{H^2 ia_1 \frac{\Theta^2(u+ia_2+K)-\Theta^2(u-ia_2-K)}{\Theta^2 u} - H^2(ia_2+K)\cdot\frac{\Theta^2(u+ia_1)-\Theta^2(u-ia_1)}{\Theta^2 u}\Big\},$$

$$b = -\frac{1}{2iD}\Big\{H^2 ia_1 \frac{\Theta^2(u+ia_2+K)-\Theta^2(u-ia_2-K)}{\Theta^2 u} + H^2(ia_2+K)\cdot\frac{\Theta^2(u+ia_1)-\Theta^2(u+ia_1)}{\Theta^2 u}\Big\},$$

$$b' = +\frac{1}{2D}\Big\{H^2 ia_1 \frac{\Theta^2(u+ia_2+K)+\Theta^2(u-ia_2-K)}{\Theta^2 u} + H^2(ia_2+K)\cdot\frac{\Theta^2(u+ia_1)+\Theta^2(u-ia_1)}{\Theta^2 u}\Big\}.$$

V.

Es bliebe noch übrig, die ***Geschwindigkeiten*** des Körpers um die x_1 und y_1-Axe, die ***Poisson*** mit p und q bezeichnet, auszudrücken. Die Geschwindigkeit um die z_1-Axe r ist bekanntlich durch die Formel

$$r = Cn$$

gegeben. Von den drei Gröfsen p, q, r hangt die Winkelgeschwindigkeit um die augenblickliche Umdrehungs-Axe $w = \sqrt{(p^2+q^2+r^2)}$ und die Lage dieser Axe ab.

Die Gleichungen, aus denen diese Gröfsen zu nehmen sind, heifsen

$$(25.)\quad \begin{cases} A\sin\vartheta(p\sin\varphi+q\cos\varphi) = Cn\cos\vartheta - l, \\ A(p^2+q^2) = 2P\gamma\cos\vartheta + h. \end{cases}$$

Man erhält daraus:

$$(26.)\quad \begin{cases} p = \dfrac{Cn\cos\vartheta-l}{A\sin\vartheta}\cdot\sin\varphi \pm \dfrac{\cos\varphi}{A\sin\vartheta}\sqrt{[(2AP\gamma\cos\vartheta+Ah)\sin^2\vartheta-(Cn\cos\vartheta-l)^2]}, \\ q = \dfrac{Cn\cos\vartheta-l}{A\sin\vartheta}\cdot\cos\varphi \mp \dfrac{\sin\varphi}{A\sin\vartheta}\sqrt{[(2AP\gamma\cos\vartheta+Ah)\sin^2\vartheta-(Cn\cos\vartheta-l)^2]}. \end{cases}$$

Es handelt sich darum, $\frac{Cn\cos\vartheta-l}{A\sin\vartheta}$ und $\frac{\sqrt{\ldots\ldots}}{A\sin\vartheta}$ durch die Θ und H Functionen auszudrücken. Aus dem Frühern geht hervor, dafs die Wurzelgröfse

$$= \sqrt{(2AP\gamma)}\sqrt{[-(\xi-\alpha_1)(\xi-\alpha_2)(\xi-\alpha_3)]}$$
$$= \sqrt{(2AP\gamma)}(\alpha_1-\alpha_2)\sqrt{(\alpha_1-\alpha_3)}\sin\mathrm{am}\,u\cos\mathrm{am}\,u\,\Delta\,\mathrm{am}\,u$$

ist. Ferner findet man

$$(\alpha_1-\alpha_2)\sin\mathrm{am}\,u\cos\mathrm{am}\,u\,\Delta\mathrm{am}\,u=\frac{2H^2(ia_2+K)H^2ia_1}{D}\cdot k'\frac{Hu\,H(K-u)\,\Theta(K-u)}{\Theta^3 u};$$

also folgt, mit Berücksichtigung des Werths von $\sin\vartheta$, aus (III.):

$$(27.)\qquad \frac{\sqrt{\ldots.}}{A\sin\vartheta}=\frac{2mk'}{i}\cdot\frac{Hia_1\,H(ia_2+K)\,Hu\,H(K-u)\,\Theta(K-u)}{\Theta u\sqrt{N}}.$$

Die Umformungen von Cn und $-l$ sind in (II.) gegeben. Es folgt daraus:

$$Cn\cos\vartheta-l=\frac{\sqrt{(2APy)}}{2i}(R_1(1+\cos\vartheta)+R_{-1}(1-\cos\vartheta));$$

und da $R_1=(1-\alpha_1)\sqrt{(\alpha_1-\alpha_3)}\frac{\Delta\varepsilon_1\cos\varepsilon}{\sin\varepsilon_1}$ und $R_{-1}=(1+\alpha_1)\sqrt{(\alpha_1-\alpha_3)}\frac{\Delta\varepsilon_2\cos\varepsilon_2}{\sin\varepsilon_2}$,

$$\frac{1+\cos\vartheta}{\sin\vartheta}=+\frac{1}{i}\cdot\frac{Hia_1}{H(ia_2+K)}\cdot\frac{A''B''}{\sqrt{N}},$$

$$\frac{1-\cos\vartheta}{\sin\vartheta}=-\frac{1}{i}\cdot\frac{H(ia_2+K)}{Hia_1}\cdot\frac{A'B'}{\sqrt{N}}$$

ist, so folgt:

$$\frac{Cn\cos\vartheta-l}{A\sin\vartheta}$$

$$=\frac{m}{i\sqrt{N}}\left\{(1-\alpha_1)\frac{\Delta\varepsilon_1\cos\varepsilon_1}{i\sin\varepsilon_1}\cdot\frac{Hia_1}{H(ia_2+K)}\cdot A''B''-(1+\alpha_1)\frac{\Delta\varepsilon_3\cos\varepsilon_2}{i\sin\varepsilon_2}\cdot\frac{H(ia_2+K)}{Hia_1}\cdot A'B'\right\}$$

oder:

$$(28.)\qquad \frac{Cn\cos\vartheta-l}{A\sin\vartheta}=\frac{2m}{i\sqrt{N}}\cdot\frac{Hia_1\,H(ia_2+K)}{\Theta^2 0\,D}\left\{\Theta^2 ia_1\frac{\partial.\log\frac{Hia_1}{\Theta ia_1}}{\partial a_1}\cdot A''B''\right.$$

$$\left.+\Theta^2(ia_2+K)\frac{\partial.\log\frac{H(ia_2+K)}{\Theta(ia_2+K)}}{\partial a_2}\cdot A'B'\right\}.$$

Die Einsetzung der Ausdrücke (27. und 28.) in die Formeln (26.) scheinen aber kein elegantes Resultat zu liefern, weshalb die weitere Rechnung übergangen werden mag.

Lippstadt, im October 1853.

9.

Über die Bewegung des Raumpendels mit Rücksicht auf die Rotation der Erde.

(Von Herrn *W. Dumas,* Schulamts-Candidaten, früher Mitglied des mathematisch-physicalischen Seminars zu Königsberg in Preufsen.)

(Fortsetzung der Abhandlung Nr. 4. in diesem Bande.)

VII.

Bei der weitern Entwicklung der Gleichungen (6.) für die Variation der Constanten, werde ich mich nicht der eben gefundenen Coordinatenformeln (31.) bedienen, sondern von den frühern (15 *b*.) ausgehen, welche mit einigen Abkürzungen in folgender Form sich schreiben lassen

$$(35.)\quad \begin{cases} x = \mp r\lambda.\tfrac{1}{2}.(e^{i\psi}\overset{+}{P}_1\overset{+}{P}_2 + e^{-i\psi}\overset{-}{P}_1\overset{-}{P}_2), \\ y = \pm r\lambda.\dfrac{1}{2i}.(e^{i\psi}\overset{+}{P}_1\overset{+}{P}_2 - e^{-i\psi}\overset{-}{P}_1\overset{-}{P}_2), \\ z = r\lambda.\tfrac{1}{2}.(\overset{+}{P}_1\overset{-}{P}_1 - \overset{+}{P}_2\overset{-}{P}_2), \\ \text{während} \\ 1 = \lambda.\tfrac{1}{2}.(\overset{+}{P}_1\overset{+}{P}_1 + \overset{-}{P}_2\overset{-}{P}_2) \text{ ist.} \end{cases}$$

Hier bezeichnen:

$$\overset{+}{P}_1 \ldots \overset{-}{P}_1 \ldots \overset{+}{P}_2 \ldots \overset{-}{P}_2$$

resp. die FF.:

$$P(u, K+ia_1) \ldots P(u, K-ia_1) \ldots P(u, ia_2) \ldots P(u, -ia_2)$$

und es ist

$$\psi = \Phi.u + \varphi_0.$$

In ähnlicher Weise werde ich schreiben:

$$\overset{+}{Z}_1 \ldots \overset{-}{Z}_1 \ldots \overset{+}{Z}_2 \ldots \overset{-}{Z}_2$$

statt resp.

$$Z(u+K+ia_1) \ldots Z(u+K-ia_1) \ldots Z(u+ia_2) \ldots Z(u-ia_2),$$

und

$$Y_1 \ldots Y_2, \quad Y_1' \ldots Y_2', \quad Y_1'' \ldots \text{ etc.}$$

statt

$$Y(K+ia_1) \ldots Yia_2, \quad Y'(K+ia_1) \ldots Y'ia_2, \quad Y''(K+ia_1) \ldots,$$

welche letzten Gröfsen identisch mit resp.
$-Y(K-ia_1)\cdots-Y(-ia_2)$, $+Y'(K-ia_1)\cdots+Y'(-ia_2)$, $-Y''(K-ia_1)\ldots$
sind, die aus ihnen durch Verwandlung von $+i$ in $-i$ entspringen.

Zwischen diesen Gröfsen Y finden, zufolge der Bedingungsgleichung zwischen den Wurzeln a, b, c der cubischen Gleichung, mehrere Relationen Statt. Es ist nämlich (nach 27.):

$$Y_1'' = \frac{2\,\mathrm{cn}(K+ia_1)\,\mathrm{dn}(K+ia_1)}{\mathrm{sn}^3(K+ia_1)} = \pm 2\sqrt{\frac{-(1+a)(1+b)(1+c)}{(a-c)^3}},$$

$$Y_2'' = \frac{2\,\mathrm{cn}\,ia_2\,\mathrm{dn}\,ia_2}{\mathrm{sn}^3\,ia_2} = \mp 2\sqrt{\frac{(1-a)(1-b)(1-c)}{(a-c)^3}},$$

mithin nach den Gleichungen (7.)

$$(36\,a.) \qquad Y_1'' + Y_2'' = 0.$$

Ferner erhält man aus (27 *b*.) durch Substitution von $K+ia_1$ und ia_2 statt u, und durch Subtraction der Resultate:

$$(36\,b.) \qquad Y_1''' - Y_2''' = 6(Y_2'-Y_1')(Y_2'+Y_1'+2\mu_2).$$

Eben so aus (27 *c*.), mit Rücksicht auf die eben gefundene Gleichung (36 *a*.):

$$(36\,c.) \qquad Y_1^{\mathrm{IV}} + Y_2^{\mathrm{IV}} = -12(Y_1'Y_1'' + Y_2'Y_2'') = 12Y_1''.(Y_2'-Y_1'), \text{ etc.};$$

welche Gleichungen häufige Anwendung finden werden.

Um nun die Gröfsen $U^{(xy)}$, $U^{(xz)}$ (6 *a*.) durch die ***Zeit*** auszudrücken, mufs man die Coordinaten nach der ***Zeit*** und nach den Constanten φ_0, h, l differentiiren. Da aber die beiden letzten Constanten in den obigen Formeln nicht explicite vorkommen, differentiire man diese zunächst nach den Constanten m, Φ, a_1, a_2 und $\varkappa^2$, die allein von h und l abhängig sind; oder vielmehr, statt nach $\varkappa^2$, vortheilhafter nach $\log q$, der durch p bezeichnet werden soll, indem die Differentialquotienten der Functionen Θu, Hu, also auch Pu, nach p genommen, einfachere Formen haben, als die nach $\varkappa^2$ genommenen.

Mit Rücksicht auf die angegebene Bezeichnung geben diese Differentiationen folgende Resultate:

$$(37\,a.) \quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \mp mr\lambda.\tfrac{1}{2}.\{e^{i\psi}\overset{+}{P}_1\overset{+}{P}_2(\overset{+}{Z}_1+\overset{+}{Z}_2-2Zu+i\Phi) \\ \qquad\qquad + e^{-i\psi}\overset{-}{P}_1\overset{-}{P}_2(\overset{-}{Z}_1+\overset{-}{Z}_2-2Zu-i\Phi)\}, \\ \dfrac{dy}{dt} = \mp mr\lambda.\tfrac{1}{2}i.\{e^{i\psi}\overset{+}{P}_1\overset{+}{P}_2(\overset{+}{Z}_1+\overset{+}{Z}_2-2Zu+i\Phi) \\ \qquad\qquad - e^{-i\psi}\overset{-}{P}_1\overset{-}{P}_2(\overset{-}{Z}_1+\overset{-}{Z}_2-2Zu-i\Phi)\}, \\ \dfrac{dz}{dt} = mr\lambda.\tfrac{1}{2}.\{\overset{+}{P}_1\overset{-}{P}_1(\overset{+}{Z}_1+\overset{-}{Z}_1-2Zu) \\ \qquad\qquad - \overset{+}{P}_2\overset{-}{P}_2(\overset{+}{Z}_2+\overset{-}{Z}_2-2Zu)\}, \end{cases}$$

$$(37\,b.)\quad \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial \varphi_0} = +y, \\ \frac{\partial y}{\partial \varphi_0} = -x, \\ \frac{\partial z}{\partial \varphi_0} = 0, \end{cases}$$

$$(37\,c.)\quad \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial m} = \frac{1}{m}(t-t_0)\cdot\frac{dx}{dt}, \\ \frac{\partial y}{\partial m} = \frac{1}{m}(t-t_0)\cdot\frac{dy}{dt}, \\ \frac{\partial z}{\partial m} = \frac{1}{m}(t-t_0)\cdot\frac{dz}{dt}, \end{cases}$$

$$(37\,d.)\quad \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial \Phi} = +u.y, \\ \frac{\partial y}{\partial \Phi} = -u.x, \\ \frac{\partial z}{\partial \Phi} = 0, \end{cases}$$

$$(37\,e.)\quad \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial a_1} = \mp r\lambda.\tfrac{1}{2}i.\{e^{i\psi}\overset{+}{P}_1\overset{+}{P}_2(\overset{+}{Z}_1-Y_1)-e^{-i\psi}\bar{P}_1\bar{P}_2(\bar{Z}_1+Y_1)\}+x\cdot\frac{\partial\log\lambda}{\partial a_1}, \\ \frac{\partial y}{\partial a_1} = \pm r\lambda.\tfrac{1}{2}.\{e^{i\psi}\overset{+}{P}_1\overset{+}{P}_2(\overset{+}{Z}_1-Y_1)+e^{-i\psi}\bar{P}_1\bar{P}_2(\bar{Z}_1+Y_1)\}+y\cdot\frac{\partial\log\lambda}{\partial a_1}, \\ \frac{\partial z}{\partial a_1} = r\lambda.\tfrac{1}{2}i\ \overset{+}{P}_1\bar{P}_1(\overset{+}{Z}_1-\bar{Z}_1-2Y_1)+z\cdot\frac{\partial\log\lambda}{\partial a_1}. \end{cases}$$

Die Differentiale nach a_2 lassen sich aus denen nach a_1 mittels Vertauschung von $K+ia_1$ mit ia_2 ableiten, indem dadurch da_1 und da_2, $\overset{+}{P}_1$ und $\overset{+}{P}_2$, $\bar{P}_1$ und $-\bar{P}_2$, λ und $-\lambda$, x und $-x$, y und $-y$, z und $-z$, $\overset{+}{Z}_1$ und $\overset{+}{Z}_2$, $\bar{Z}_1$ und $\bar{Z}_2$ in einander übergehen.

Um die Differentiale nach p zu erhalten, bediene ich mich der bekannten Formel, welche die Differentiation der Θ Functionen nach p auf eine solche nach u zurückführt, nämlich der Formel

$$\frac{\partial\Theta(u,p)}{\partial p} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 Z'K.u\frac{\partial\Theta u}{\partial u} - \tfrac{1}{4}\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2\cdot\frac{\partial^2\Theta u}{\partial u^2},$$

wo $Z'K=\frac{\partial Zu}{\partial u}$ für $u=K$ also $Z'K=\varkappa'^2-\frac{E}{K}$ ist. Statt Θ kann man hier auch $\Theta(u+K)$, Hu, $H(u+K)$ setzen. Bezeichnet man daher, analog mit

den Abkürzungen der P, Z, Y:

$$\Theta(u+K+ia_1)\ldots\Theta(u+K-ia_1)\ldots\Theta(u+ia_2)\ldots\Theta(u-ia_2)$$

durch

$$\overset{+}{\Theta}_1\ldots\overset{-}{\Theta}_1\ldots\overset{+}{\Theta}_2\ldots\overset{-}{\Theta}_2$$

und

$$\frac{\partial^2\Theta(u+K+ia_1)}{\partial u^2}\ldots\frac{\partial^2\overset{-}{\Theta}_1}{\partial u^2}\ldots\frac{\partial^2\overset{+}{\Theta}_2}{\partial u^2}\ldots\frac{\partial^2\overset{-}{\Theta}_2}{\partial u^2}$$

durch

$$\overset{+}{\Theta}''_1\ldots\overset{-}{\Theta}''_1\ldots\overset{+}{\Theta}''_2\ldots\overset{-}{\Theta}''_2,$$

so ergiebt sich, nach einigen leichten Reductionen:

(37 *f.*)

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial p} &= A_x+\tfrac{1}{2}\Big(\frac{2K}{\pi}\Big)^2 Z'K.u\frac{\partial x}{\partial u}\\
&\quad+\tfrac{1}{2}i\Big(\frac{2K}{\pi}\Big)^2\Big\{(Y_1-ia_1Z'K)\frac{\partial x}{\partial a_1}+(Y_2-ia_2Z'K)\frac{\partial x}{\partial a_2}\Big\}\\
&\quad-\tfrac{1}{2}\Big(\frac{2K}{\pi}\Big)^2(2Y'_1+2Y'_2+3\mu_2).x-\tfrac{1}{2}\Big(\frac{2K}{\pi}\Big)^2 Z'K.u.\Phi.y,\\
\frac{\partial y}{\partial p} &= A_y+\tfrac{1}{2}\Big(\frac{2K}{\pi}\Big)^2 Z'K.u\frac{\partial y}{\partial u}\\
&\quad+\tfrac{1}{2}i\Big(\frac{2K}{\pi}\Big)^2\Big\{(Y_1-ia_1Z'K)\frac{\partial y}{\partial a_1}+(Y_2-ia_2Z'K)\frac{\partial y}{\partial a_2}\Big\}\\
&\quad-\tfrac{1}{2}\Big(\frac{2K}{\pi}\Big)^2(2Y'_1+2Y'_2+3\mu_2).y+\tfrac{1}{2}\Big(\frac{2K}{\pi}\Big)^2 Z'K.u.\Phi.x,\\
\frac{\partial z}{\partial p} &= A_z+\tfrac{1}{2}\Big(\frac{2K}{\pi}\Big)^2 Z'K.u\frac{\partial z}{\partial u}\\
&\quad+\tfrac{1}{2}i\Big(\frac{2K}{\pi}\Big)^2\Big\{(Y_1-ia_1Z'K)\frac{\partial z}{\partial a_1}+(Y_2-ia_2Z'K)\frac{\partial z}{\partial a_2}\Big\}\\
&\quad-\tfrac{1}{2}\Big(\frac{2K}{\pi}\Big)^3(2Y'_1+2Y'_2+3\mu_2).z,
\end{aligned}\right.$$

wo die ersten Glieder rechts folgende Werthe haben:

$$\begin{aligned}
A_x &= \pm\tfrac{1}{2}r\lambda.\tfrac{1}{4}\Big(\frac{2K}{\pi}\Big)^2\cdot\Big\{e^{i\psi}.\overset{+}{P}_1\overset{+}{P}_2.\Big[\Big(\frac{\overset{+}{\Theta}''_1}{\Theta_1}-2\overset{+}{Z}_1Y_1-Y'_1+Y_1Y_1\Big)\\
&\quad+\Big(\frac{\overset{+}{\Theta}''_2}{\Theta_2}-2\overset{+}{Z}_2Y_2Y'_2+Y_2Y_2\Big)-2\frac{\Theta''u}{\Theta u}\Big]\\
&\quad+e^{-i\psi}.\overset{-}{P}_1\overset{-}{P}_2.\Big[\Big(\frac{\overset{-}{\Theta}''_1}{\Theta_1}+2\overset{-}{Z}_1Y_1-Y'_1+Y_1Y_1\Big)\\
&\quad+\Big(\frac{\overset{-}{\Theta}''_2}{\Theta_2}+2\overset{-}{Z}_2Y_2-Y'_2+Y_2Y_2\Big)-2\frac{\Theta''u}{\Theta u}\Big]\Big\},
\end{aligned}$$

$$(37\,f.)\quad \begin{cases} A_y = \pm\tfrac{1}{2} r\lambda \cdot \tfrac{1}{4}\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \cdot \Big\{ e^{i\psi} \cdot \overset{+}{P}_1 \overset{+}{P}_2 \cdot \Big[\Big(\frac{\overset{+}{\Theta}''_1}{\Theta_1} - 2\overset{+}{Z}_1 Y_1 - Y_1' + Y_1 Y_1 \Big) \\ \quad + \Big(\frac{\overset{+}{\Theta}''_2}{\Theta_2} - 2\overset{+}{Z}_2 Y_2 - Y_2' + Y_2 Y_2 \Big) - 2\,\frac{\Theta'' u}{\Theta u} \Big] \\ \quad - e^{-i\psi} \bar{P}_1 \bar{P}_2 \Big[\Big(\frac{\bar{\Theta}''_1}{\Theta_1} + 2\bar{Z}_1 Y_1 - Y_1' + Y_1 Y_1 \Big) \\ \quad + \Big(\frac{\bar{\Theta}''_2}{\Theta_2} + 2\bar{Z}_2 Y_2 - Y_2' + Y_2 Y_2 \Big) - 2\,\frac{\Theta'' u}{\Theta u} \Big] \Big\}, \\ A_z = \tfrac{1}{2} r\lambda \cdot \tfrac{1}{4}\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \cdot \Big\{ \overset{+}{P}_1 \bar{P}_1 \Big[\Big(\frac{\overset{+}{\Theta}''_1}{\Theta_1} - 2\overset{+}{Z}_1 Y_1 - Y_1' + Y_1 Y_1 \Big) \\ \quad + \Big(\frac{\bar{\Theta}''_1}{\Theta_1} + 2\bar{Z}_1 Y_1 - Y_1' + Y_1 Y_1 \Big) - 2\,\frac{\Theta'' u}{\Theta u} \Big] \\ \quad - \overset{+}{P}_2 \bar{P}_2 \Big[\Big(\frac{\overset{+}{\Theta}''_2}{\Theta_2} - 2\overset{+}{Z}_2 Y_2 - Y_2' + Y_2 Y_2 \Big) \\ \quad + \Big(\frac{\bar{\Theta}''_2}{\Theta_2} + 2\bar{Z}_2 Y_2 - Y_2' + Y_2 Y_2 \Big) - 2\,\frac{\Theta'' u}{\Theta u} \Big] \Big\}. \end{cases}$$

Aus den Differentialquotienten nach m, Φ, a_1, a_2, p finden sich die nach l und h, wenn man aus den Relationen zwischen jenen und diesen Constanten die partiellen Abgeleiteten $\frac{\partial m}{\partial h}$, $\frac{\partial m}{\partial l}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial h}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial l}$, etc. bestimmt, und dann die Gleichungen

$$\frac{\partial x}{\partial h} = \frac{\partial x}{\partial m}\cdot\frac{\partial m}{\partial h} + \frac{\partial x}{\partial \Phi}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial h} + \frac{\partial x}{\partial a_1}\cdot\frac{\partial a_1}{\partial h} + \cdots \text{ etc.}$$

aufstellt. Setzt man die so gefundenen Werthe von $\frac{\partial x}{\partial h}$, $\frac{\partial y}{\partial h}$, $\frac{\partial z}{\partial h}$, $\frac{\partial x}{\partial l}$, etc. in die Gröfsen

$$(38.)\quad \begin{cases} U_i^{(x,y)} = \frac{\partial y}{\partial i}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} - \frac{\partial x}{\partial i}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}, \\ U_i^{(x,z)} = \frac{\partial z}{\partial i}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} - \frac{\partial x}{\partial i}\cdot\frac{\partial z}{\partial t}, \end{cases}$$

wo statt i resp. h und l zu setzen ist, so mufs man nothwendig das Gleiche erhalten, wie wenn man statt i resp. m, Φ, a_1, a_2, p setzt, und aus den so entstehenden $U_m^{(x,y)}$, $U_\Phi^{(x,y)}$, ... $U_m^{(x,z)}$, $U_\Phi^{(x,z)}$, ... die gesuchten U_l und U_h durch die Gleichungen

$$(39.)\quad \begin{cases} U_l^{(x,y)} = U_m^{(x,y)} \dfrac{\partial m}{\partial l} + U_\Phi^{(x,y)} \dfrac{\partial \Phi}{\partial l} + \cdots, \\ U_l^{(x,z)} = U_m^{(x,z)} \dfrac{\partial m}{\partial l} + U_\Phi^{(x,z)} \dfrac{\partial \Phi}{\partial l} + \cdots \text{ etc.} \end{cases}$$

ableitet. Dies ist der Weg, der hier eingeschlagen werden soll.

Die Resultate der Substitutionen der Differentialquotienten aus (37.), zunächst in die erste der Gleichungen (38.), sind folgende:

$$(40.)\quad \begin{cases} 1)\ U_{\varphi_0}^{(x,y)} = -\tfrac{1}{2} r^2 \lambda^2 m . \overset{+}{P}_1 \overset{+}{P}_2 \overset{-}{P}_1 \overset{-}{P}_2 . \{\overset{+}{Z}_1 + \overset{+}{Z}_2 + \overset{-}{Z}_1 + \overset{-}{Z}_2 - 4Zu\}, \\ 2)\ U_m^{(x,y)} = 0, \\ 3)\ U_\Phi^{(x,y)} = -\tfrac{1}{2} r^2 \lambda^2 m . u . \overset{+}{P}_1 \overset{+}{P}_2 \overset{-}{P}_1 \overset{-}{P}_2 . \{\overset{+}{Z}_1 + \overset{+}{Z}_2 + \overset{-}{Z}_1 + \overset{-}{Z}_2 - 4Zu\}, \\ 4)\ U_{a_1}^{(x,y)} = -\tfrac{1}{2} r^2 \lambda^2 m . \overset{+}{P}_1 \overset{+}{P}_2 \overset{-}{P}_1 \overset{-}{P}_2 . \{(\overset{+}{Z}_1 + \overset{+}{Z}_2 + i\Phi - 2Zu)(\overset{-}{Z}_1 + Y_1) \\ \qquad + (\overset{-}{Z}_1 + \overset{-}{Z}_2 - i\Phi - 2Zu)(\overset{+}{Z}_1 - Y_1)\} + \dfrac{\partial \log \lambda}{\partial a_1}\left(y \dfrac{\partial x}{\partial t} - x \dfrac{\partial y}{\partial t}\right), \\ 5)\ U_{a_2}^{(x,y)} = -\tfrac{1}{2} r^2 \lambda^2 m . \overset{+}{P}_1 \overset{+}{P}_2 \overset{-}{P}_1 \overset{-}{P}_2 . \{(\overset{+}{Z}_1 + \overset{+}{Z}_2 + i\Phi - 2Zu)(\overset{-}{Z}_2 + Y_2) \\ \qquad + (\overset{-}{Z}_1 + \overset{-}{Z}_2 - i\Phi - 2Zu)(\overset{+}{Z}_2 - Y_2)\} + \dfrac{\partial \log \lambda}{\partial a_2}\left(y \dfrac{\partial x}{\partial t} - x \dfrac{\partial y}{\partial t}\right), \\ 6)\ U_p^{(x,y)} = +\tfrac{1}{2} i r^2 \lambda^2 m . \overset{+}{P}_1 \overset{+}{P}_2 \overset{-}{P}_1 \overset{-}{P}_2 . \tfrac{1}{4}\left(\dfrac{2K}{\pi}\right)^2 \times \\ \qquad \times \left\{ \begin{array}{l} (\overset{+}{Z}_1 + \overset{+}{Z}_2 + i\Phi - 2Zu)\left[\dfrac{\overset{-}{\Theta}_1''}{\overset{-}{\Theta}_1} + 2\overset{-}{Z}_1 Y_1 - Y_1' + Y_1 Y_1 + \dfrac{\overset{-}{\Theta}_2''}{\overset{-}{\Theta}_2}\right. \\ \qquad\qquad \left. + 2\overset{-}{Z}_2 Y_2 - Y_2' + Y_2 Y_2 - 2\dfrac{\Theta'' u}{\Theta u}\right] \\ -(\overset{-}{Z}_1 + \overset{-}{Z}_2 - i\Phi - 2Zu)\left[\dfrac{\overset{+}{\Theta}_1''}{\overset{+}{\Theta}_1} - 2\overset{+}{Z}_1 Y_1 - Y_1' + Y_1 Y_1 + \dfrac{\overset{+}{\Theta}_2''}{\overset{-}{\Theta}_2}\right. \\ \qquad\qquad \left. - 2\overset{+}{Z}_2 Y_2 - Y_2' + Y_2 Y_2 - 2\dfrac{\Theta'' u}{\Theta u}\right] \end{array} \right\} \\ \qquad + \tfrac{1}{2} i \left(\dfrac{2K}{\pi}\right)^2 (Y_1 - i a_1 Z' K) U_{a_1}^{(x,y)} + \tfrac{1}{2} i \left(\dfrac{2K}{\pi}\right)^2 (Y_2 - i a_2 Z' K) U_{a_2}^{(x,y)} \\ \qquad - \tfrac{1}{2}\left(\dfrac{2K}{\pi}\right)^2 Z' K \Phi . U_\Phi^{(x,y)} - \tfrac{1}{2}\left(\dfrac{2K}{\pi}\right)^2 (2Y_1' + 2Y_2' + 3\mu_2)\left(y \dfrac{\partial x}{\partial t} - x \dfrac{\partial y}{\partial t}\right), \end{cases}$$

während die hier vorkommende Gröfse $y \dfrac{\partial x}{\partial t} - x \dfrac{\partial y}{\partial t}$ durch:

$$7)\ \left(y \frac{dx}{dt} - x \frac{dy}{dt}\right) = -\tfrac{1}{2} i r^2 \lambda^2 . \overset{+}{P}_1 \overset{+}{P}_2 \overset{-}{P}_1 \overset{-}{P}_2 . \{\overset{+}{Z}_1 + \overset{+}{Z}_2 - \overset{-}{Z}_1 - \overset{-}{Z}_2 + 2i\Phi\}$$

ausgedrückt wird: ein Ausdruck, der sich, wie bekannt, auf die Constante l reduciren mufs.

Man sieht leicht, dafs die Seiten rechts der Gleichungen (40.) sämmtlich den Factor

$$\overset{+}{P}_1 . \overset{+}{P}_2 . \overset{-}{P}_1 . \overset{-}{P}_2$$

haben. Sie lassen sich daher aus diesem, durch Differentiation nach einzuführenden Entwicklungsgröfsen ableiten. Zu dem Ende setze man

$$(41.)\quad \begin{cases} U = -P(u, K+ia_1+v) . P(u, -K-ia+v_1) . P(u, -ia_2+v_2) . P(u, -ia_2+v_3), \\ V = U . Zu = U \cdot \dfrac{\Theta' u}{\Theta u}, \\ W = U . \dfrac{\Theta'' u}{\Theta u}. \end{cases}$$

Aus diesen drei Gröfsen erhält man durch Differentiation nach den v, und darauf nach Annulirung derselben, sämmtliche $U^{(x,y)}$, und zwar die Glieder mit dem Factor Zu aus V, die mit dem Factor $\frac{\Theta'' u}{\Theta u}$ aus W, die übrigen aus U selbst. So gehen die Gleichungen (40.) in die folgenden über:

$$(42.)\quad \begin{cases} 1)\ U_{\varphi_0}^{(x,y)} = -\tfrac{1}{2} r^2 \lambda^2 m \left\{ \dfrac{\partial U}{\partial v} + \dfrac{\partial U}{\partial v_2} + \dfrac{\partial U}{\partial v_1} + \dfrac{\partial U}{\partial v_3} - 4V \right\}, \\ 2)\ U_{\Phi}^{(x,y)} = -\tfrac{1}{2} r^2 \lambda^2 m . u . U_{\varphi_0}^{(x,y)}, \\ 3)\ U_{m}^{(x,y)} = 0, \\ 4)\ U_{a_1}^{(x,y)} = -\tfrac{1}{2} r^2 \lambda^2 m . \left\{ \left(\dfrac{\partial^2 U}{\partial v \partial v_1} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial v_2 \partial v_1} - \dfrac{2\partial V}{\partial v_1} \right) \right. \\ \qquad \left. + \left(\dfrac{\partial^2 U}{\partial v_1 \partial v} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial v_3 \partial v} - \dfrac{2\partial V}{\partial v} \right) \right\} + \dfrac{\partial \log \lambda}{\partial a_1} \cdot \left(y \dfrac{\partial x}{\partial t} - x \dfrac{\partial y}{\partial t} \right) \\ 5)\ U_{a_2}^{(x,y)} = -\tfrac{1}{2} r^2 \lambda^2 m . \left\{ \left(\dfrac{\partial^2 U}{\partial v_2 \partial v_3} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial v \partial v_3} - \dfrac{2\partial V}{\partial v_3} \right) \right. \\ \qquad \left. + \left(\dfrac{\partial^2 U}{\partial v_3 \partial v_2} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial v \partial v_2} - \dfrac{2\partial V}{\partial v_2} \right) \right\} + \dfrac{\partial \log \lambda}{\partial a_2} \left(y \dfrac{\partial x}{\partial t} - x \dfrac{\partial y}{\partial t} \right), \\ 6)\ U_{p}^{(x,y)} = \tfrac{1}{2} i r^2 \lambda^2 m . \tfrac{1}{4} \left(\dfrac{2K}{\pi} \right)^2 \cdot \left\{ \begin{array}{l} \left(\dfrac{\partial^3 U}{\partial v \partial v_1^2} + \dfrac{\partial^3 U}{\partial v_2 \partial v_1^2} - \dfrac{2\partial^2 V}{\partial v_1^2} - \dfrac{2\partial W}{\partial v} \right) \\ + \left(\dfrac{\partial^3 U}{\partial v_2 . \partial v_3^2} + \dfrac{\partial^3 U}{\partial v \partial v_3^2} - \dfrac{2\partial^2 V}{\partial v_3^2} - \dfrac{2\partial W}{\partial v_2} \right) \\ - \left(\dfrac{\partial^3 U}{\partial v_1 \partial v^2} + \dfrac{\partial^3 U}{\partial v_3 \partial v^2} - \dfrac{2\partial^2 V}{\partial v^2} - \dfrac{2\partial W}{\partial v_1} \right) \\ - \left(\dfrac{\partial^3 U}{\partial v_3 \partial v_2^2} + \dfrac{\partial^3 U}{\partial v_1 \partial v_2^2} - \dfrac{2\partial^2 V}{\partial v_2^2} - \dfrac{2\partial W}{\partial v_3} \right) \end{array} \right\} \\ \quad + \tfrac{1}{2} i \left(\dfrac{2K}{\pi} \right)^2 . \left\{ (Y_1 - ia_1 Z'K) U_{a_1}^{(x,y)} + (Y_2 - ia_2 Z'K) U_{a_2}^{(x,y)} \right\} \\ \quad - \tfrac{1}{2} \left(\dfrac{2K}{\pi} \right)^2 . Z'K . \Phi U_{\Phi}^{(x,y)} - \tfrac{1}{2} \left(\dfrac{2K}{\pi} \right)^2 (2Y_2' + 2Y_1' + 3\mu_2) . \left(y \dfrac{\partial x}{\partial t} - x \dfrac{\partial y}{\partial t} \right), \\ 7)\ y \dfrac{dx}{dt} - x \dfrac{dy}{dt} = -\tfrac{1}{2} i r^2 \lambda^2 m . \left\{ \dfrac{\partial U}{\partial v} + \dfrac{\partial U}{\partial v_2} - \dfrac{\partial U}{\partial v_1} - \dfrac{\partial U}{\partial v_3} \right\}. \end{cases}$$

Die Gröfsen U, V, W sind durch die vierte und fünfte der Gleichungen (23.) gegeben. U erhält man geradezu aus der vierten Gleichung, indem man nur, weil nach Nullsetzung der v die Summe der Parameter verschwindet, Q statt P einzuführen hat. V und W ergeben sich aus der fünften Gleichung, wenn man sie mit $\frac{Hv_5}{H'0}$ multiplicirt, nach dem Parameter v_5 einmal oder zweimal differentiirt, und denselben darauf verschwinden läfst. Denn es ist offenbar

$$\frac{\partial^h(P(u,v_1)P(u,v_2)\dots P(u,v_4)).P(u,v_5)\cdot\frac{Hv_5}{H'0}}{\partial v_5^h}=\frac{\partial^h(P(u,v_1)\dots P(u,v_4))\cdot\frac{\Theta u+v_5}{\Theta u}}{\partial v_5^h}$$

$$=P(u,v_1)\dots\ P(u,v_4)\cdot\frac{\Theta^{(h)}(u+v_5)}{\Theta u}.$$

Durch die Multiplication mit Hv_5 werden zugleich die in den Coëfficienten der Gleichung (23, 5) vorkommenden Gröfsen $\frac{\Pi^{(h)}}{\Pi}$ *endlich,* da dieselben im Nenner den Factor Hv_5 haben. Bezeichnet man das Product Π für die fünf Argumente v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 für den Augenblick durch $\Pi 5$, dasselbe für die vier Argumente v_1, v_2, v_3, v_4 durch $\Pi 4$, so ergiebt sich:

$$\begin{aligned}
\Pi 5 &= \Pi 4.Hv_5,\\
\Pi' 5 &= \Pi' 4.Hv_5+\Pi 4.H'v_5,\\
\Pi'' 5 &= \Pi'' 4.Hv_5+2\Pi' 4.H'v_5+\Pi 4.H''v_5,\\
\Pi''' 5 &= \Pi''' 4.Hv_5+3\Pi'' 4.H'v_5+3\Pi' 4.H''v_5+\Pi 4.\Pi'''v_5.
\end{aligned}$$

Durch Substitution dieser Werthe erhält man

$$\begin{aligned}
P(u,v_1)P(u,v_2)\dots P(u,v_4)\cdot\frac{\Theta(u+v_5)}{\Theta h}&=\tfrac{1}{24}P^{\mathrm{IV}}\cdot\frac{Hv_5}{H'0}-\tfrac{1}{6}P'''\cdot\left(\frac{\Pi' 4}{\Pi 4}\cdot\frac{Hv_5}{H'0}+\frac{H'v_5}{H'0}\right)\\
&+\tfrac{1}{4}P''\cdot\left(\frac{\Pi'' 4}{\Pi}\cdot\frac{Hv_5}{H'0}+2\frac{\Pi' 4}{\Pi 4}\cdot\frac{H'v_5}{H'0}+\frac{H''v_5}{H'0}+5\mu_2\frac{H'v_5}{H'0}\right)\\
&+\tfrac{1}{6}P'\cdot\left\{\left(\frac{\Pi''' 4}{\Pi 4}\cdot\frac{H'v_5}{H'0}+3\frac{\Pi'' 4}{\Pi 4}\cdot\frac{H'v_5}{H'0}+3\frac{\Pi' 4}{\Pi 4}\cdot\frac{H''v_5}{H'0}+\frac{H'''v_5}{H'0}\right)\right.\\
&\qquad\left.+15\mu_2\left(\frac{\Pi' 4}{\Pi 4}\cdot\frac{Hv_5}{H'0}+\frac{H'v_5}{H'0}\right)\right\}\\
&+\tfrac{1}{24}P\cdot\left\{\left(\frac{\Pi^{\mathrm{IV}} 4}{\Pi 4}\cdot\frac{Hv_5}{H'0}+4\frac{\Pi''' 4}{\Pi 4}\cdot\frac{H'v_5}{H'0}+6\frac{\Pi'' 4}{\Pi 4}\cdot\frac{H''v_5}{H'0}+4\frac{\Pi' 4}{\Pi}\cdot\frac{H'''v_5}{H'0}+\frac{H^{\mathrm{IV}}v_5}{H'0}\right)\right.\\
&\qquad\left.+30\mu_2\left(\frac{\Pi'' 4}{\Pi 4}\cdot\frac{Hv_5}{H'0}+2\frac{\Pi' 4}{\Pi 4}\cdot\frac{H'v_5}{H'0}+\frac{H''v_5}{H'0}\right)+(60\mu_2^2+5\mu_4)\frac{Hv_5}{H'0}\right\}.
\end{aligned}$$

Rechts kommt die Gröfse v_5 in P nur additiv mit $v_1+v_2+v_3+v_4$ verbunden und in den H Functionen isolirt vor. Bezeichnet man die Summe

$v_1 + v_2 + v_3 + v_4$ zur Abkürzung mit ε, so kann man die Differentiation der P nach v_5 mit der nach ε vertauschen. Dann wird sich beispielsweise das zweite Differential nach v_5 wie folgt zusammensetzen: Erstlich, aus den durch zweimalige Differentiation der P nach ε entspringenden Gliedern; zweitens, aus solchen, in welchen P einmal nach ε und die Coëfficienten einmal nach v_5 differentiirt sind, doppelt genommen; drittens, aus solchen, in denen die Coëfficienten zweimal nach v_5 differentiirt sind. Erwägt man also noch, dafs für $v_5 = 0$ die Gröfsen Hv_5, $H''v_5$, $H^{IV}0\,v_5$ verschwinden, so erhält man für dieses zweite Differential:

$$P(u,v_1)\ldots P(u,v_4)\cdot\frac{\Theta''u}{\Theta u} = \Big[-\tfrac{1}{6}\frac{\partial^2 P'''}{\partial\varepsilon^2} + \tfrac{1}{4}\frac{\partial^2 P''}{\partial\varepsilon^2}\cdot 2\frac{\Pi' 4}{\Pi 4} - \tfrac{1}{6}\frac{\partial^2 P'}{\partial\varepsilon^2}\Big(3\frac{\Pi'' 4}{\Pi 4} + \frac{H'''0}{H'0}\Big) + \tfrac{1}{24}\frac{\partial^2 P}{\partial\varepsilon^2}\Big(4\frac{\Pi''' 4}{\Pi 4} + 4\frac{\Pi' 4}{\Pi 4}\Big(\frac{H'''0}{H'0} + 15\mu_2\Big)\Big)\Big]$$

$$+ 2\Big[\tfrac{1}{24}\frac{\partial P^{IV}}{\partial\varepsilon} - \tfrac{1}{6}\frac{\partial P'''}{\partial\varepsilon}\cdot\frac{\Pi' 4}{\Pi 4} + \tfrac{1}{4}\frac{\partial P''}{\partial\varepsilon}\cdot\Big(\frac{\Pi'' 4}{\Pi 4} + \frac{H'''0}{H'0}\Big) - \tfrac{1}{6}\frac{\partial P'}{\partial\varepsilon}\Big(\frac{\Pi''' 4}{\Pi 4} + 3\frac{\Pi' 4}{\Pi 4}\cdot\frac{H'''0}{H'0} + 15\mu_2\frac{\Pi' 4}{\Pi 4}\Big) + \tfrac{1}{24}\frac{\partial P}{\partial\varepsilon}\Big(\frac{\Pi^{IV} 4}{\Pi 4} + 6\frac{\Pi'' 4}{\Pi}\cdot\Big(\frac{H'''0}{H'0} + 5\mu_2\Big) + \Big(\frac{H^V 0}{H'0} + 30\mu_2\frac{H'''0}{H'0} + 60\mu_2^2 + 5\mu_4\Big)\Big)\Big]$$

$$+\Big[-\tfrac{1}{6}P'''\cdot\frac{H'''0}{H'0} + \tfrac{1}{4}P''\cdot\Big(2\frac{\Pi' 4}{\Pi 4} + 5\mu_2\Big)\frac{H'''0}{H'0} - \tfrac{1}{6}P'\cdot\Big(\Big(3\frac{\Pi'' 4}{\Pi 4} + 15\mu_2\Big)\frac{H'''0}{H'0} + \frac{H^V 0}{H'0}\Big) + \tfrac{1}{24}P\cdot\Big(\Big(4\frac{\Pi''' 4}{\Pi 4} + 60\mu_2\frac{\Pi' 4}{\Pi 4}\Big)\frac{H'''0}{H'0} + 4\frac{\Pi' 4}{\Pi 4}\cdot\frac{H^V 0}{H'0}\Big)\Big].$$

Hier hat man nun noch die Gröfsen $\frac{H'''0}{H'0}$ und $\frac{H^V 0}{H'0}$ mittels der Gleichung (26.) durch μ_2 und μ_4 auszudrücken, und für den vorliegenden Fall P durch Q zu ersetzen. Auf solche Weise findet man für U, V, W folgende Werthe:

$$(43.)\quad \begin{cases} U = \frac{1}{6}Q''' - \frac{1}{2}\frac{\Pi'}{\Pi}\cdot Q'' + \frac{1}{2}\Big(\frac{\Pi''}{\Pi} + 4\mu_2\Big)Q' - \frac{1}{6}\Big(\frac{\Pi'''}{\Pi} + 12\mu_2\frac{\Pi'}{\Pi}\Big)Q - G, \\ V = \frac{1}{6}\frac{\partial Q'''}{\partial\varepsilon} - \frac{1}{2}\frac{\Pi'}{\Pi}\cdot\frac{\partial Q''}{\partial\varepsilon} + \frac{1}{2}\Big(\frac{\Pi''}{\Pi} + 4\mu_2\Big)\frac{\partial Q'}{\partial\varepsilon} - \frac{1}{6}\Big(\frac{\Pi'''}{\Pi} + 12\mu_2\frac{\Pi'}{\Pi}\Big)\frac{\partial Q}{\partial\varepsilon} \\ \qquad - \frac{1}{24}Q^{IV} + \frac{1}{6}\frac{\Pi'}{\Pi}Q''' - \frac{1}{4}\Big(\frac{\Pi''}{\Pi} + 2\mu_2\Big)Q'' + \frac{1}{6}\Big(\frac{\Pi'''}{\Pi} + 6\mu_2\frac{\Pi'}{\Pi}\Big)Q' \\ \qquad\qquad - \frac{1}{24}\Big(\frac{\Pi^{IV}}{\Pi} + 12\mu_2\frac{\Pi''}{\Pi}\Big)Q - H, \end{cases}$$

$$(43.)\quad \begin{cases} W = \frac{1}{6}\frac{\partial^2 Q'''}{\partial\varepsilon^2} - \frac{1}{2}\frac{\Pi'}{\Pi}\cdot\frac{\partial^2 Q''}{\partial\varepsilon^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\Pi''}{\Pi} + 4\mu_2\right)\frac{\partial^2 Q'}{\partial\varepsilon^2} - \frac{1}{6}\left(\frac{\Pi'''}{\Pi} + 12\mu_2\frac{\Pi'}{\Pi}\right)\frac{\partial^2 Q}{\partial\varepsilon^2} \\ \quad - \frac{1}{12}\frac{\partial Q^{IV}}{\partial\varepsilon} + \frac{1}{3}\frac{\Pi'}{\Pi}\cdot\frac{\partial Q'''}{\partial\varepsilon} - \frac{1}{2}\left(\frac{\Pi''}{\Pi} + 2\mu_2\right)\frac{\partial Q''}{\partial\varepsilon} + \frac{1}{3}\left(\frac{\Pi'''}{\Pi} + 6\mu_2\frac{\Pi'}{\Pi}\right)\frac{\partial Q'}{\partial\varepsilon} \\ \quad - \frac{1}{12}\left(\frac{\Pi^{IV}}{\Pi} + 12\mu_2\frac{\Pi''}{\Pi}\right)\frac{\partial Q}{\partial\varepsilon} - \frac{1}{2}\mu_2 Q''' + \frac{3}{2}\mu_2\frac{\Pi'}{\Pi}Q'' \\ \quad - \frac{3}{2}\left(\mu_2\frac{\Pi''}{\Pi} + \frac{5}{9}(\mu_4 + 3\mu_2^2)\right)Q' + \frac{1}{2}\left(\mu_2\frac{\Pi'''}{\Pi} + \frac{5}{3}(\mu_4 + 3\mu_2^2)\frac{\Pi'}{\Pi}\right)Q - I. \end{cases}$$

Hier sind

$$Q = Q(u, \varepsilon), \qquad \varepsilon = v + v_1 + v_2 + v_3.$$

Ferner sind die drei constanten Glieder G, H, I:

$$(44.)\quad \begin{cases} G = \frac{1}{6}\left(\frac{\Pi'''}{\Pi} + 12\mu_2\frac{\Pi'}{\Pi}\right)E, \\ H = \frac{1}{6}\left(\frac{\Pi'''}{\Pi} + 12\mu_2\frac{\Pi'}{\Pi}\right)\frac{\partial E}{\partial\varepsilon} + \frac{1}{24}\left(\frac{\Pi^{IV}}{\Pi} + 12\mu_2\frac{\Pi''}{\Pi}\right)E, \\ I = \frac{1}{6}\left(\frac{\Pi'''}{\Pi} + 12\mu_2\frac{\Pi'}{\Pi}\right)\frac{\partial^2 E}{\partial\varepsilon^2} + \frac{1}{12}\left(\frac{\Pi^{IV}}{\Pi} + 12\mu_2\frac{\Pi''}{\Pi}\right)\frac{\partial E}{\partial\varepsilon} \\ \qquad - \frac{1}{2}\left(\mu_2\frac{\Pi'''}{\Pi} + \frac{5}{3}(\mu_4 + 3\mu_2^2)\frac{\Pi'}{\Pi}\right)E, \end{cases}$$

wo zur Abkürzung

$$E = \frac{\frac{\pi}{2K}}{\sin\left(\frac{\pi\varepsilon}{2K}\right)} = P(u, \varepsilon) - Q(u, \varepsilon)$$

gesetzt ist. Endlich ist durch Π die Gröfse $\Pi 4$ mit den Argumenten $+K+ia_1+v$, $-K-ia_1+v_1$, $+ia_2+v_2$, $-ia_2+v_3$ bezeichnet, so dafs also:

$$\Pi = \text{Lim.}\{H(K+ia_1+v+w)\,H(-K-ia_1+v_1+w)\,H(ia_2+v_2+w)\,H(-ia_2+v_3+w)\}_{\text{für } w=0};$$

wo w die Entwickelungsgröfse für Π', Π'', etc. ist.

Die Gröfsen G, H, I müssen auch für $\varepsilon = 0$ *endlich* bleiben, da alle übrigen Glieder der Gleichungen (43.) es sind. Für G ist Dies schon nach den Gleichungen (24.) klar; H und I dagegen bilden zu der dritten dieser Gleichungen eine Ergänzung, wie sie sich für jede derselben aus den Entwickelungen der Producte $P(u, v_1)P(u, v_2)\ldots P(u, v_n)\times\frac{\Theta^{(h)}u}{\Theta u}$ finden lassen.

Um die Gröfsen $U^{(x,y)}$ zu finden, ist es nicht nöthig, die Gröfsen U, V, W nach den Parametern v zu differentiiren und sie dann gleich 0 zu setzen. Jede solche Differentiation wird, wie vorhin die nach v_5, Glieder

geben, welche aus der Differentiation der Q entspringen, andere, die sowohl die Q, als die in den Coëfficienten enthaltenen Π variiren; endlich solche, die nur aus diesen letzten abgeleitet sind. Die Differentiation der Q kann stets durch eine solche nach ε ausgedrückt werden.

Diejenige der Π läfst sich ebenfalls in folgender Art leicht ausführen. Es ist beispielsweise:

$$(1.) \qquad \frac{\partial \Pi}{\partial v} = \Pi . Y(K + ia_1 + v + w),$$

$$(2.) \qquad \frac{\partial\left(\frac{\Pi'}{\Pi}\right)}{\partial v} = \frac{\Pi \frac{\partial \Pi'}{\partial v} - \Pi' \frac{\partial \Pi}{\partial v}}{\Pi\Pi},$$

also, mit Vertauschung der Reihenfolge der Differentiationen nach w und v:

$$= \frac{\Pi \frac{\partial\left(\frac{\partial \Pi}{\partial v}\right)}{\partial w} - \Pi'\left(\frac{\partial \Pi}{\partial v}\right)}{\Pi\Pi}$$

und wegen (1.)

$$= \frac{\Pi . \frac{\partial}{\partial w}(\Pi . Y(K + ia_1 + v + w)) - \Pi' \Pi . Y(K + ia_1 + v + w)}{\Pi\Pi}$$

$$= \frac{\partial Y(K + ia_1 + v + w)}{\partial w}.$$

Eben so

$$(3.) \qquad \frac{\partial\left(\frac{\Pi''}{\Pi}\right)}{\partial w} = \frac{\Pi \frac{\partial^2}{\partial w^2}(\Pi . Y(K + ia_1 + v + w) - \Pi'' \Pi . Y(K + ia_1 + v + w)}{\Pi\Pi}$$

$$= \frac{\partial^2 Y(K + ia_1 + v + w)}{\partial w^2} + 2 . \frac{\Pi'}{\Pi} . \frac{\partial Y(K + ia_1 + v + w)}{\partial w}.$$

Für $v = v_1 = v_2 = v_3 = w = 0$ geben mithin (2. und 3.):

$$(4.) \qquad \frac{\partial\left(\frac{\Pi'}{\Pi}\right)}{\partial v} = Y' . (K + ia_1) = Y_1',$$

$$(5.) \qquad \frac{\partial\left(\frac{\Pi''}{\Pi}\right)}{\partial v} = Y_1'' + 2 Y_1' . \frac{\Pi'}{\Pi}.$$

Und eben so findet sich:

$$(6.) \qquad \frac{\partial\left(\frac{\Pi'''}{\Pi}\right)}{\partial v} = Y_1''' + 3 Y_1'' \frac{\Pi'}{\Pi} + 3 Y_1' \frac{\Pi''}{\Pi},$$

$$(7.)\quad \frac{\partial\left(\frac{\Pi'''}{\Pi}\right)}{\partial v_1} = Y_1''' - 3Y_1''\frac{\Pi'}{\Pi} + 3Y_1'\frac{\Pi''}{\Pi},$$

$$(8.)\quad \frac{\partial\left(\frac{\Pi^{IV}}{\Pi}\right)}{\partial v_3} = -Y_2^{IV} + 4Y_2'''\frac{\Pi'}{\Pi} - 6Y_2''\frac{\Pi''}{\Pi} + 4Y_2'\frac{\Pi'''}{\Pi}$$

etc.

und durch mehrmalige Differentiation erhält man aus diesen ersten Differentialen:
Aus (5.):

$$(9.)\quad \frac{\partial^2\left(\frac{\Pi''}{\Pi}\right)}{\partial v^2} = \frac{\partial Y''(K+ia_1+v)}{\partial v} + 2\frac{\Pi'}{\Pi}\cdot\frac{\partial Y'(K+ia_1+v)}{\partial v}$$

$$+2Y'(K+ia_1+v)\cdot\frac{\partial\left(\frac{\Pi'}{\Pi}\right)}{\partial v} = Y_1''' + 2\frac{\Pi'}{\Pi}\cdot Y_1'' + 2Y_1'Y_1',$$

$$(10.)\quad \frac{\partial^2\left(\frac{\Pi''}{\Pi}\right)}{\partial v\,\partial v_3} = 2Y_1'\frac{\partial\left(\frac{\Pi'}{\Pi}\right)}{\partial v_3} = 2Y_1'Y_2'.$$

Aus (7.):

$$(11.)\quad \frac{\partial^2\left(\frac{\Pi'''}{\Pi}\right)}{\partial v_1\,\partial v_2} = -3Y_1''\frac{\partial\left(\frac{\Pi'}{\Pi}\right)}{\partial v_2} + 3Y_1'\frac{\partial\left(\frac{\Pi''}{\Pi}\right)}{\partial v_2}$$

$$= -3Y_1''Y_2' + 3Y_1'\left(Y_2'' + 2Y_2'\frac{\Pi'}{\Pi}\right)$$

etc. etc.

Aufserdem ist zu bemerken, dafs man Glieder wie $\frac{\partial U}{\partial v} - \frac{\partial U}{\partial v_1}$ oder $\frac{\partial^2 U}{\partial v\,\partial v_1} + \frac{\partial^2 U}{\partial v_2\,\partial v_1}$ etc. in eines zusammenziehen kann, indem man resp. $v_1 = -v$ oder $v_2 = +v$ setzt, wodurch die angeführten beiden Gröfsen in resp. $\frac{\partial U}{\partial v}$ und $\frac{\partial^2 U}{\partial v\,\partial v_1}$ übergehen. Dies hat einen besondern Vortheil für die Differentiation der Q; denn da in diesen nur die Summe der v enthalten ist, so ist z. B. $\frac{\partial Q}{\partial v} - \frac{\partial Q}{\partial v_1} = 0$, $\frac{\partial^2 Q'}{\partial v\,\partial v_1} + \frac{\partial^2 Q'}{\partial v_2\,\partial v_1} = 2\frac{\partial^2 Q'}{\partial v\,\partial v_1} = 2\frac{\partial^2 Q'}{\partial \varepsilon^2}$. Was endlich die Werthe der Gröfsen $\frac{\Pi'}{\Pi}$, $\frac{\Pi''}{\Pi}$, etc. selbst nach Annullirung der v betrifft, so geben die Gleichungen (28.) durch Substitution von resp. $\mp K \mp ia_1$, $\mp ia_2$ an Stelle der darin vorkommenden v:

$$(45.)\quad \begin{cases} \dfrac{\Pi'}{\Pi} = SYv = 0, \quad \dfrac{\Pi''}{\Pi} = SY'v + \dfrac{\Pi'}{\Pi}\cdot SYv = 2(Y_1' + Y_2'), \\ \dfrac{\Pi'''}{\Pi} = SY''v + 2\dfrac{\Pi'}{\Pi}\cdot SY'v + \dfrac{\Pi''}{\Pi}\cdot SYv = 0, \\ \dfrac{\Pi^{IV}}{\Pi} = SY'''v + 3\dfrac{\Pi'}{\Pi}\cdot SY''v + 3\dfrac{\Pi''}{\Pi}\cdot SY'v + \dfrac{\Pi'''}{\Pi}\cdot SYv \\ \qquad = 2(Y_1''' + Y_2''') + 12(Y_2' + Y_1')^2, \end{cases}$$

so dafs also nach Ausführung der im Vorhergehenden auseinandergesetzten Differentiationen alle in Π' oder Π''' multiplicirten Glieder wegfallen.

Hiernach lassen sich nun alle nöthigen Differentiationen bis auf die der constanten Glieder G, H, I, welche eine besondere Behandlung erfordern, ohne Schwierigkeit ausführen.

Um zunächst $U_{\varphi_0}^{(x,y)}$ zu finden, hat man:

$$\frac{\partial U}{\partial v} + \frac{\partial U}{\partial v_1} + \frac{\partial U}{\partial v_2} + \frac{\partial U}{\partial v_3} = 4\left\{\tfrac{1}{6}\cdot\frac{\partial Q'''}{\partial \varepsilon} - \tfrac{1}{2}\frac{\Pi'}{\Pi}\frac{\partial Q''}{\partial \varepsilon} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\Pi''}{\Pi} + 4\mu_2\right)\frac{\partial Q'}{\partial \varepsilon}\right.$$
$$\left. -\tfrac{1}{6}\left(\frac{\Pi'''}{\Pi} + 12\mu_2\frac{\Pi'}{\Pi}\right)\frac{\partial Q}{\partial \varepsilon}\right\} - \tfrac{1}{2}\left(\frac{\Pi''}{\Pi} - \left(\frac{\Pi'}{\Pi}\right)^2\right)Q'' + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\Pi'''}{\Pi} - \frac{\Pi''\Pi'}{\Pi^2}\right)Q'$$
$$-\tfrac{1}{6}\left(\frac{\Pi^{IV}}{\Pi} + 12\mu_2\frac{\Pi''}{\Pi} - \left(\frac{\Pi'''}{\Pi} + 12\mu_2\frac{\Pi'}{\Pi}\right)\frac{\Pi'}{\Pi}\right)\cdot Q - \frac{\partial G}{\partial w}.$$

Die zweite Zeile ist hier aus der ersten durch Differentiation der Coëfficienten nach w abgeleitet, da die Gröfsen Π die v einzeln, additiv mit w verbunden, enthalten. Läfst man die in Π' und Π''' multiplicirten Glieder weg, so ergiebt sich

$$\frac{\partial U}{\partial v} + \frac{\partial U}{\partial v_1} + \frac{\partial U}{\partial v_2} + \frac{\partial U}{\partial v_3} = 4\left\{\tfrac{1}{6}\frac{\partial Q'''}{\partial \varepsilon} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\Pi''}{\Pi} + 4\mu_2\right)\frac{\partial Q'}{\partial \varepsilon}\right\}$$
$$-\tfrac{1}{2}\frac{\Pi''}{\Pi}\cdot Q'' - \tfrac{1}{6}\left(\frac{\Pi^{IV}}{\Pi} + 12\mu_2\frac{\Pi''}{\Pi}\right)Q - \frac{\partial G}{\partial w}.$$

Hierzu kommt nach (43.), ebenfalls mit Weglassung der für sich verschwindenden Glieder:

$$-4V = -4\left\{\tfrac{1}{6}\frac{\partial Q'''}{\partial \varepsilon} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\Pi''}{\Pi} + 4\mu_2\right)\frac{\partial Q'}{\partial \varepsilon}\right\} + 4H$$
$$+\tfrac{1}{6}Q^{IV} + \left(\frac{\Pi''}{\Pi} + 2\mu_2\right)Q'' + \tfrac{1}{6}\left(\frac{\Pi^{IV}}{\Pi} + 12\mu_2\frac{\Pi''}{\Pi}\right)Q;$$

also durch Addition (nach 42.):

$$U_{\varphi_0}^{(x,y)} = -\tfrac{1}{12}r^2\lambda^2 m\cdot\left\{Q^{IV} + 3\left(\frac{\Pi''}{\Pi} + 4\mu_2\right)Q''\right\} - \tfrac{1}{2}r^2\lambda^2 m.\left(4H - \frac{\partial G}{\partial w}\right).$$

Aber nach (44.) erhält man, wenn man erwägt, dafs, da $\frac{\partial G}{\partial w}$ nur für $S\frac{\partial G}{\partial v}$ geschrieben wurde, auch in E für v, v_1, etc. $v+w$, v_1+w, etc. zu schreiben ist:

$$-\frac{\partial G}{\partial w} = -\tfrac{4}{6}\left(\frac{\Pi'''}{\Pi}+12\mu_2\frac{\Pi'}{\Pi}\right)\cdot\frac{\partial E}{\partial \varepsilon}-\tfrac{1}{6}\left(\left(\frac{\Pi^{IV}}{\Pi}+12\mu_2\frac{\Pi''}{\Pi}\right)-\left(\frac{\Pi'''}{\Pi}+12\mu_2\frac{\Pi'}{\Pi}\right)\frac{\Pi'}{\Pi}\right)E$$

$$+4H = \tfrac{4}{6}\left(\frac{\Pi'''}{\Pi}+12\mu_2\frac{\Pi'}{\Pi}\right)\frac{\partial E}{\partial \varepsilon}+\tfrac{1}{6}\left(\frac{\Pi^{IV}}{\Pi}+12\mu_2\frac{\Pi''}{\Pi}\right).E,$$

folglich

$$4H-\frac{\partial G}{\partial w} = \tfrac{1}{6}\cdot\left(\frac{\Pi'''}{\Pi}+12\mu_2\frac{\Pi'}{\Pi}\right)E\cdot\frac{\Pi'}{\Pi} = G\cdot\frac{\Pi'}{\Pi};$$

und da G für $w=v=v_1=$ etc. $=0$ *endlich* bleibt, $\frac{\Pi'}{\Pi}$ aber verschwindet, so ist:

$$4H-\frac{\partial G}{\partial w} = 0,$$

mithin wenn man statt $\frac{\Pi''}{\Pi}$ in $U_{\varphi_0}^{(x,y)}$ seinen Werth aus (45.) setzt:

$$(46,1.)\qquad U_{\varphi_0}^{(x,y)} = -\tfrac{1}{12}r^2\lambda^2 m.\{Q^{IV}+6(Y_2'+Y_1'+2\mu_2)Q''\}.$$

Durch Multiplication mit u folgt hieraus:

$$(46,2.)\qquad U_{\Phi}^{(x,y)} = -\tfrac{1}{12}r^2\lambda^2 m.u\{Q^{IV}+6(Y_2'+Y_1'+2\mu_2)Q''\}.$$

Ich behandle nun zuerst die Gröfse $y\frac{dx}{dt}-x\frac{dy}{dt}$ (nach (42, 7.)). Nach dem oben gegebenen Algorithmus für die Ausführung der Differentiationen erhält man

$$\frac{\partial U}{\partial v}-\frac{\partial U}{\partial v_1} = Y_1''Q'-Y_1''\frac{\Pi'}{\Pi}\cdot Q-\frac{\partial G}{\partial v}+\frac{\partial G}{\partial v_1},$$

$$\frac{\partial U}{\partial v_2}-\frac{\partial U}{\partial v_3} = Y_2''Q'-Y_2''\frac{\Pi'}{\Pi}\cdot Q-\frac{\partial G}{\partial v_2}+\frac{\partial G}{\partial v_3}.$$

Aus der Summe fällt (wegen der Gleichung 36 *a.*) Q ganz heraus, und es wird also in der That

$$(46,3.)\qquad y\frac{dx}{dt}-x\frac{dy}{dt} = +\tfrac{1}{2}r^2\lambda^2 m.i\left\{\frac{\partial G}{\partial v}-\frac{\partial G}{\partial v_1}+\frac{\partial G}{\partial v_2}-\frac{\partial G}{\partial v_3}\right\} = \text{Const.}$$

Etwas mehr Rechnung erfordern die noch übrigen Gröfsen $U_{a_1}^{(x,y)}$, $U_{a_2}^{(x,y)}$ und $U_p^{(x,y)}$. Zur Bestimmung der ersten findet man:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial v \partial v_1} + \frac{\partial^2 U}{\partial v_2 \partial v_1} =$$

$$\tfrac{1}{3}\frac{\partial^2 Q'''}{\partial \varepsilon^2} - \frac{\Pi'}{\Pi}\cdot\frac{\partial^2 Q''}{\partial \varepsilon^2} + \left(\frac{\Pi''}{\Pi} + 4\mu_2\right)\frac{\partial^2 Q'}{\partial \varepsilon^2} - \left(\frac{\Pi'''}{\Pi} + 12\mu_2\frac{\Pi'}{\Pi}\right)\frac{\partial^2 Q}{\partial \varepsilon^2} - \frac{\partial^2 G}{\partial v \partial v_1} - \frac{\partial^2 G}{\partial v_2 \partial v_1}$$

$$-\tfrac{1}{2}(Y_1' + Y_2')\frac{\partial Q''}{\partial \varepsilon} + (Y_1' + Y_2')\frac{\Pi'}{\Pi}\cdot\frac{\partial Q'}{\partial \varepsilon} - \tfrac{1}{6}\left\{(Y_1''' + Y_2''') + 3(Y_1' + Y_2')\left(\frac{\Pi''}{\Pi} + 4\mu_2\right)\right\}\frac{\partial Q}{\partial \varepsilon}$$

$$-Y_1'\frac{\partial Q''}{\partial \varepsilon} - \left\{-Y_1'' + 2Y_1'\frac{\Pi'}{\Pi}\right\}\frac{\partial Q'}{\partial \varepsilon} - \tfrac{1}{3}\left\{Y_1''' - 3Y_1''\frac{\Pi'}{\Pi} + 3Y_1'\left(\frac{\Pi''}{\Pi} + 4\mu_2\right)\right\}\frac{\partial Q}{\partial \varepsilon}$$

$$+(Y_1' + Y_2')Y_1' Q' - \tfrac{1}{6}\left\{3(Y_1' + Y_2')\left(-Y_1'' + 2Y_1'\frac{\Pi'}{\Pi}\right)\right\} Q,$$

$$-2\frac{\partial V}{\partial v_1} =$$

$$-\tfrac{1}{3}\frac{\partial^2 Q'''}{\partial \varepsilon^2} + \frac{\Pi'}{\Pi}\frac{\partial^2 Q''}{\partial \varepsilon^2} - \left(\frac{\Pi''}{\Pi} + 4\mu_2\right)\frac{\partial^2 Q'}{\partial \varepsilon^2} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{\Pi'''}{\Pi} + 12\mu_2\frac{\Pi'}{\Pi}\right)\frac{\partial^2 Q}{\partial \varepsilon^2} + 2\frac{\partial H}{\partial v_1}$$

$$+Y_1'\frac{\partial Q''}{\partial \varepsilon} - \left\{-Y_1'' + 2Y_1'\frac{\Pi'}{\Pi}\right\}\frac{\partial Q'}{\partial \varepsilon} + \tfrac{1}{3}\left\{Y_1''' - 3Y_1''\frac{\Pi'}{\Pi} + 3Y_1'\left(\frac{\Pi''}{\Pi} + 4\mu_2\right)\right\}\frac{\partial Q}{\partial \varepsilon}$$

$$+\tfrac{1}{12}\frac{\partial Q^{IV}}{\partial \varepsilon} - \tfrac{1}{3}\frac{\Pi'}{\Pi}\cdot\frac{\partial Q'''}{\partial \varepsilon} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\Pi''}{\Pi} + 2\mu_2\right)\frac{\partial Q''}{\partial \varepsilon} - \tfrac{1}{3}\left(\frac{\Pi'''}{\Pi} + 6\mu_2\frac{\Pi'}{\Pi}\right)\frac{\partial Q'}{\partial \varepsilon}$$

$$+\tfrac{1}{12}\left(\frac{\Pi^{IV}}{\Pi} + 12\mu_2\frac{\Pi''}{\Pi}\right)\frac{\partial Q}{\partial \varepsilon}$$

$$-\tfrac{1}{3}Y_1' Q''' + \tfrac{1}{2}\left\{-Y_1'' + 2Y_1'\frac{\Pi'}{\Pi}\right\} Q'' - \tfrac{1}{3}\left\{Y_1''' - 3Y_1''\frac{\Pi'}{\Pi} + 3Y_1'\left(\frac{\Pi''}{\Pi} + 2\mu_2\right)\right\} Q'$$

$$+\tfrac{1}{12}\left\{-Y_1^{IV} + 4Y_1'''\frac{\Pi'}{\Pi} - 6Y_1''\left(\frac{\Pi''}{\Pi} + 2\mu_2\right) + 4Y_1'\left(\frac{\Pi'''}{\Pi} + 6\mu_2\frac{\Pi'}{\Pi}\right)\right\} Q.$$

Zu der Summe dieser Reihen soll nach (42, 4.) die Summe derjenigen Glieder addirt werden, welche durch Vertauschung von $+i$ mit $-i$ entstehen. Man lasse daher in der Summe die Glieder weg, welche sich erstlich gegen einander aufheben, wie die 1te, 3te, 5te und 6te Zeile; zweitens, die, welche in Π' und Π''' multiplicirt sind (die nicht sogleich weggelassen sind, weil immer die folgenden Zeilen aus den vorhergehenden abgeleitet sind); drittens, die imaginären, wie Y_1'' und Y_1^{IV}. Dann bleiben von den obigen 8 Zeilen folgende Glieder übrig:

$$+\tfrac{1}{12}\frac{\partial Q^{IV}}{\partial \varepsilon} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\Pi''}{\Pi} + 2\mu_2 - Y_1' - Y_2'\right)\frac{\partial Q''}{\partial \varepsilon}$$

$$+\tfrac{1}{12}\left\{\frac{\Pi^{IV}}{\Pi} + 12\mu_2\frac{\Pi''}{\Pi} - 6(Y_1' + Y_2')\left(\frac{\Pi''}{\Pi} + 4\mu_2\right) - 2(Y_1''' + Y_2''')\right\}\frac{\partial Q}{\partial \varepsilon}$$

$$-\tfrac{1}{3}Y_1' Q''' - \tfrac{1}{3}\left\{Y_1''' + 3Y_1'\left(\frac{\Pi''}{\Pi} + 2\mu_2 - Y_1' - Y_2'\right)\right\} Q' - \frac{\partial^2 G}{\partial v \partial v_1} - \frac{\partial^2 G}{\partial v_2 \partial v_1} + 2\frac{\partial H}{\partial v_1}.$$

Setzt man für $\frac{\Pi''}{\Pi}$ und $\frac{\Pi^{IV}}{\Pi}$ ihre Werthe aus (45.), so wird der Coëfficient von $\frac{\partial Q}{\partial \varepsilon}$ identisch 0. Ferner verdoppeln sich die variabeln Glieder durch die Addition der durch Vertauschung von $+i$ und $-i$ entstehenden, und zu den Constanten treten drei ähnliche hinzu, in welchen v_1 und v_3 mit v und v_2 vertauscht sind. Erwägt man dann noch, dafs

$$\frac{\partial \log \lambda}{\partial a_1} = -\frac{\partial \log (Y_2' - Y_1')}{\partial a_1} = \frac{i Y_1''}{Y_2' - Y_1'}$$

ist, so ergiebt sich endlich:

$$\begin{aligned} U_{a_1}^{(x,y)} = & -\tfrac{1}{12} r^2 \lambda^2 m \left\{ \frac{\partial Q^{IV}}{\partial \varepsilon} + 6 (Y_2' + Y_1' + 2\mu_2) \frac{\partial Q''}{\partial \varepsilon} \right\} \\ & + \tfrac{1}{3} r^2 \lambda^2 m \{ Y_1' . Q''' + (Y_1''' + 3 (Y_2' + Y_1' + 2\mu_2)) Q' \} \\ & + \tfrac{1}{2} r^2 \lambda^2 m \left\{ \left(\frac{\partial^2 G}{\partial v \partial v_1} + \frac{\partial^2 G}{\partial v_2 \partial v_1} - 2 \frac{\partial H}{\partial v_1} \right) + \left(\frac{\partial^2 G}{\partial v_1 \partial v} + \frac{\partial^2 G}{\partial v_3 \partial v} - 2 \frac{\partial H}{\partial v} \right) \right. \\ & \left. - \left(\frac{Y_1''}{Y_2' - Y_1'} \right) \cdot \left(\frac{\partial G}{\partial v} + \frac{\partial G}{\partial v_2} - \frac{\partial G}{\partial v_1} - \frac{\partial G}{\partial v_3} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Bezeichnet man die Constante zur Abkürzung mit C_{a_1}, und die durch Vertauschung von a_1 und a_2 entstehende mit C_{a_2}, indem man durch diese Vertauschung $U_{a_2}^{(x,y)}$ aus $U_{a_1}^{(x,y)}$ erhält, setzt also:

$$\begin{aligned} (47, 1.) \quad C_{a_1} = & -2 \frac{\partial^2 G}{\partial v \partial v_1} - 2 \frac{\partial^2 G}{\partial v_2 \partial v_1} + 4 \frac{\partial^2 H}{\partial v_1} - 2 \frac{\partial^2 G}{\partial v_1 \partial v} - 2 \frac{\partial^2 G}{\partial v_3 \partial v} + 4 \frac{\partial H}{\partial v} \\ & + \left(\frac{2 Y_1''}{Y_2' - Y_1'} \right) \cdot \left(\frac{\partial G}{\partial v} + \frac{\partial G}{\partial v_2} - \frac{\partial G}{\partial v_1} - \frac{\partial G}{\partial v_3} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (47, 2.) \quad C_{a_2} = & -2 \frac{\partial^2 G}{\partial v_2 \partial v_3} - 2 \frac{\partial^2 G}{\partial v \partial v_3} + 4 \frac{\partial H}{\partial v_3} - 2 \frac{\partial^2 G}{\partial v_3 \partial v_2} - 2 \frac{\partial^2 G}{\partial v_1 \partial v_2} + 4 \frac{\partial H}{\partial v_2} \\ & + \left(\frac{2 Y_2''}{Y_1' - Y_2'} \right) \cdot \left(\frac{\partial G}{\partial v_2} + \frac{\partial G}{\partial v} - \frac{\partial G}{\partial v_3} - \frac{\partial G}{\partial v_1} \right), \end{aligned}$$

so erhält man:

$$\begin{aligned} (46, 4.) \quad U_{a_1}^{(x,y)} = & -\tfrac{1}{12} r^2 \lambda^2 m \left\{ \frac{\partial Q^{IV}}{\partial \varepsilon} + 6 (Y_2' + Y_1' + 2\mu_2) \frac{\partial Q''}{\partial \varepsilon} \right\} \\ & + \tfrac{1}{3} r^2 \lambda^2 m \{ Y_1' Q''' + (Y_1''' + 3 (Y_1' + Y_2' + 2\mu_2) Y_1') Q' \} - \tfrac{1}{4} r^2 \lambda^2 m C_{a_1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (46, 5.) \quad U_{a_2}^{(x,y)} = & -\tfrac{1}{12} r^2 \lambda^2 m \left\{ \frac{\partial Q^{IV}}{\partial \varepsilon} + 6 (Y_2' + Y_1' + 2\mu_2) \frac{\partial Q''}{\partial \varepsilon} \right\} \\ & + \tfrac{1}{3} r^2 \lambda^2 m \{ Y_2' Q''' + (Y_2''' + 3 (Y_1' + Y_2' + 2\mu_2) Y_2') Q' \} - \tfrac{1}{4} r^2 \lambda^2 m C_{a_2}. \end{aligned}$$

Auf ganz gleiche Art läfst sich die Rechnung für die letzte Gröfse $U_p^{(x,y)}$ ausführen; es genügt daher die Angabe blofs des Resultats, in welchem zur Abkürzung

$$(47,3.)\quad C_p = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2Y_1''}\left\{\left(-\frac{\partial^3 G}{\partial v\,\partial v_1^2}-\frac{\partial^3 G}{\partial v_2\,\partial v_1^2}+2\frac{\partial^2 H}{\partial v_1^2}+2\frac{\partial I}{\partial v}\right)\right. \\ \left.+\left(-\frac{\partial^3 G}{\partial v_2\,\partial v_3^2}-\frac{\partial^3 G}{\partial v\,\partial v_3^2}+2\frac{\partial^2 H}{\partial v_3^2}+2\frac{\partial I}{\partial v_2}\right)\right\} \\ +\frac{1}{2Y_2''}\left\{\left(-\frac{\partial^3 G}{\partial v_1\,\partial v^2}-\frac{\partial^3 G}{\partial v_2\,\partial v^2}+2\frac{\partial^2 H}{\partial v^2}+2\frac{\partial I}{\partial v_1}\right)\right. \\ \left.+\left(-\frac{\partial^3 G}{\partial v_3\,\partial v_2^2}-\frac{\partial^3 G}{\partial v_1\,\partial v_2^2}+2\frac{\partial^2 H}{\partial v_2^2}+2\frac{\partial I}{\partial v_3}\right)\right\} \\ -\frac{1}{Y_1''}(2Y_2'+2Y_1'+3\mu_2)\cdot\left(\frac{\partial G}{\partial v}+\frac{\partial G}{\partial v_2}-\frac{\partial G}{\partial v_1}-\frac{\partial G}{\partial v_3}\right) \end{Bmatrix}$$

gesetzt ist. Das Resultat ist:

$$(46,7.)\quad U_p^{(x,y)} = \tfrac{1}{2}i\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2\{(Y_1-ia_1Z'K)\,U_{a_1}^{(x,y)}+(Y_2-ia_2Z'K)\,U_{a_2}^{(x,y)}\}$$

$$-\tfrac{1}{2}\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 Z'K.\Phi.U_\Phi^{(x,y)}+\tfrac{1}{2}r^2\lambda^2 m.\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 iY_1''(Y_2'-Y_1').Q'+\tfrac{1}{4}r^2\lambda^2 m.\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2.iY_1''.C_p.$$

Die Constanten l (46, 3.), C_{a_1}, C_{a_2}, C_p zeigen sich in diesen Gleichungen sämmtlich in der Form $\frac{0}{0}$. Um sie davon zu befreien, erwäge man, dafs

$$E = \frac{\frac{2\pi}{K}}{\sin\left(\frac{\pi\varepsilon}{2K}\right)} = \frac{1}{\varepsilon}\left\{1+\tfrac{1}{6}\varepsilon^2\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2+\tfrac{7}{360}\varepsilon^4\left(\frac{\pi}{2K}\right)^4+\cdots\right\},$$

$$\frac{\partial E}{\partial\varepsilon} = -\frac{1}{\varepsilon^2}\left\{1-\tfrac{1}{6}\varepsilon^2\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2-\tfrac{7}{120}\varepsilon^4\left(\frac{\pi}{2K}\right)^4+\cdots\right\},$$

$$\frac{\partial E}{\partial\varepsilon^2} = \frac{2}{\varepsilon^3}\left\{1+\tfrac{7}{120}\varepsilon^4\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2+\cdots\right\}$$

ist. Setzt man daher für den Augenblick:

$$(48.)\quad \begin{cases} 1) & \tfrac{1}{6}\left\{\frac{\Pi'''}{\Pi}+12\mu_2\frac{\Pi'}{\Pi}\right\} = A, \\ 2) & \tfrac{1}{24}\left\{\frac{\Pi^{IV}}{\Pi}+12\mu_2\frac{\Pi''}{\Pi}\right\} = B, \\ 3) & \tfrac{1}{2}\left\{\mu_2\frac{\Pi'''}{\Pi}+\tfrac{5}{3}(\mu_4+3\mu_2^2)\frac{\Pi'}{\Pi}\right\} = C, \end{cases}$$

so folgt aus den Gleichungen (45.), durch Multiplication mit resp. ε, ε^2, ε^3:

$$(49.)\quad \begin{cases} 1)\quad G.\varepsilon = A + \frac{1}{6}\varepsilon^2 A\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2 + \frac{7}{360}\varepsilon^4 A\left(\frac{\pi}{2K}\right)^4 + \cdots \\ 2)\quad H.\varepsilon^2 = \begin{cases} -A + \frac{1}{6}\varepsilon^2 A\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2 + \frac{7}{120}\varepsilon^4 A\left(\frac{\pi}{2K}\right)^4 + \cdots \\ +B\varepsilon + \frac{1}{6}\varepsilon^3 B\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2 + \frac{7}{360}\varepsilon^5 B\left(\frac{\pi}{2K}\right)^4 + \cdots \end{cases} \\ 3)\quad I.\varepsilon^3 = \begin{cases} 2A + \frac{7}{60}\varepsilon^4 A\left(\frac{\pi}{2K}\right)^4 + \cdots \\ -2B\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon^3 B\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2 + \frac{7}{60}\varepsilon^4 B\left(\frac{\pi}{2K}\right)^4 + \cdots \\ -C\varepsilon^2 - \frac{1}{6}\varepsilon^4 C\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2 - \cdots \end{cases} \end{cases}$$

Um nun zunächst aus der Gleichung (46, 3.) die Constante l zu finden, differentiire man die erste dieser Gleichungen zweimal nach v. Dieses giebt

$$\varepsilon\cdot\frac{\partial^2 G}{\partial v^2} + 2\frac{\partial G}{\partial v} = \frac{\partial^2 A}{\partial v^2} + \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2\cdot\left\{2A + 4\varepsilon\frac{\partial A}{\partial v} + \varepsilon^2\frac{\partial^2 A}{\partial v^2}\right\} + \cdots$$

Nun bleiben die Gröfsen G und A auch für $\varepsilon = 0$ ***endlich***, und es mufs daher, wenn man nach den Differentiationen die v verschwinden läfst,

$$2\frac{\partial G}{\partial v} = \frac{\partial^2 A}{\partial v^2} + \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2 . A$$

sein, und da für $\varepsilon = 0$ zugleich $A = 0$ ist, so ergiebt sich aus (46, 3)

$$y\frac{dx}{dt} - x\frac{dy}{dt} = \tfrac{1}{2}r^2\lambda^2 m\,.\,\tfrac{1}{2}i\left\{\frac{\partial^2 A}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial v_2^2} - \frac{\partial^2 A}{\partial v_1^2} - \frac{\partial^2 A}{\partial v_3^2}\right\}.$$

Aber aus (48, 1.) folgt durch Differentiation nach v:

$$6\frac{\partial A}{\partial v} = Y_1''' + 3Y_1''\frac{\Pi'}{\Pi} + 3Y_1'\left(\frac{\Pi''}{\Pi} + 4\mu_2\right)$$

$$6\frac{\partial^2 A}{\partial v^2} = Y_1^{IV} + \left(3Y_1'''\frac{\Pi'}{\Pi} + 3Y_1''Y_1'\right) + \left(3Y_1''\left(\frac{\Pi''}{\Pi} + 4\mu_2\right) + 3Y_1'\left(Y_1'' + 2Y_1'\frac{\Pi'}{\Pi}\right)\right)$$

$$= Y_1^{IV} + 6Y_1''Y_1' + 3Y_1''\left(\frac{\Pi''}{\Pi} + 4\mu_2\right).$$

Addirt man hierzu die analoge Gröfse $\frac{\partial^2 A}{\partial v_2^2}$, so fällt das letzte Glied (nach 36, a.) heraus, und da die beiden ersten Glieder durch Subtraction der durch Änderung von $+i$ in $-i$ entspringenden Gröfsen $\frac{\partial^2 A}{\partial v_1^2}$ und $\frac{\partial^2 A}{\partial v_3^2}$ verdoppelt werden, so erhält man:

$$y\frac{dx}{dt} - x\frac{dy}{dt} = \tfrac{1}{2}r^2\lambda^2 m\cdot\tfrac{1}{6}i\left\{(Y_1^{IV} + Y_2^{IV}) + 6(Y_1''Y_1' + Y_2''Y_2')\right\}$$

oder, mit Rücksicht auf die Gleichungen (36.):

$$y\frac{dx}{dt}-x\frac{dy}{dt} = \tfrac{1}{2}r^2\lambda^2 m.iY_1''.(Y_2'-Y_1');$$

ein Ausdruck, dessen Übereinstimmung mit den Constanten l leicht zu sehen ist.

Differentiirt man ferner die Gleichung (49, 1.) dreimal nach v, und dann zweimal nach v, einmal nach v_1, so ergiebt sich, nach Weglassung der in ε multiplicirten Glieder:

$$3\frac{\partial^2 G}{\partial v^2} = \frac{\partial^3 A}{\partial v^3}+\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2\frac{\partial A}{\partial v}$$

$$2\frac{\partial^2 G}{\partial v\partial v_1}+\frac{\partial^2 G}{\partial v^2} = \frac{\partial^3 A}{\partial v^2\partial v_1}+\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2\left(\tfrac{2}{3}\frac{\partial A}{\partial v}+\tfrac{1}{3}\frac{\partial A}{\partial v_1}\right).$$

Aus diesen Gleichungen $\frac{\partial^2 G}{\partial v^2}$ eliminirt, erhält man

$$6\frac{\partial^2 G}{\partial v\partial v_1} = -\frac{\partial^3 A}{\partial v^3}+3\frac{\partial^3 A}{\partial v^2.\partial v_1}+\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2\left(\frac{\partial A}{\partial v}+\frac{\partial A}{\partial v_1}\right)$$

und v_1 in v_3 verwandelt:

$$6\frac{\partial^2 G}{\partial v\partial v_3} = -\frac{\partial^3 A}{\partial v^3}+3\frac{\partial^3 A}{\partial v^2\partial v_3}+\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2\left(\frac{\partial A}{\partial v}+\frac{\partial A}{\partial v_3}\right).$$

Die Gleichung (49, 2.) dreimal nach v differentiirt, giebt:

$$6\frac{\partial H}{\partial v} = -\frac{\partial^3 A}{\partial v^3}+3\frac{\partial^2 B}{\partial v^2}+\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2\left(\frac{\partial A}{\partial v}+B\right)$$

und daraus folgt in Verbindung mit den vorhergehenden Gleichungen:

$$-2\frac{\partial^2 G}{\partial v\partial v_1}-2\frac{\partial^2 G}{\partial v\partial v_3}+4\frac{\partial H}{\partial v}$$

$$= \left\{-\frac{\partial^3 A}{\partial v^2\partial v_1}-\frac{\partial^3 A}{\partial v^2\partial v_3}+2\frac{\partial^2 B}{\partial v^2}\right\}+\tfrac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2\left\{-\frac{\partial A}{\partial v_1}-\frac{\partial A}{\partial v_3}+2B\right\}.$$

Man sieht leicht, dafs das letzte Glied dieser Gleichung verschwindet. Daher geht die Gleichung (47, 1.) in folgende über:

$$C_{a_1} = \left\{-\frac{\partial^3 A}{\partial v^2\partial v_1}-\frac{\partial^3 A}{\partial v^2\partial v_3}+2\frac{\partial^2 B}{\partial v^2}\right\}+\left\{-\frac{\partial^3 A}{\partial v_1^2\partial v}-\frac{\partial^3 A}{\partial v_1^2\partial v_2}+2\frac{\partial^2 B}{\partial v_1^2}\right\}$$
$$+\left(\frac{Y_1''}{Y_2'-Y_1'}\right)\left\{\frac{\partial^2 A}{\partial v^2}+\frac{\partial^2 A}{\partial v_2^2}-\frac{\partial^2 A}{\partial v_1^2}-\frac{\partial^2 A}{\partial v_3^2}\right\}.$$

Nun ist oben schon

$$6\frac{\partial^2 A}{\partial v^2} = Y_1^{IV}+6Y_1''Y_1'+3Y_1''\left(\frac{\Pi''}{\Pi}+4\mu_2\right)+3(Y_1'''+2Y_1'Y_1')\frac{\Pi'}{\Pi}$$

gefunden. Hieraus folgt durch Differentiation nach v_1, nach Weglassung der dann in Π' multiplicirten Glieder:

$$6\frac{\partial^3 A}{\partial v^2 \partial v_1} = -3Y_1''Y_1'' + 3(Y_1''' + 2Y_1'Y_1').Y_1'.$$

Ebenso nach v_3:

$$6\frac{\partial^3 A}{\partial v^2 \partial v_3} = -3Y_1''Y_2'' + 3(Y_1''' + 2Y_1'Y_1').Y_2'.$$

Ferner ist:

$$24\frac{\partial B}{\partial v} = Y_1^{\text{IV}} + 4Y_1'''.\frac{\Pi'}{\Pi} + 6Y_1''\left(\frac{\Pi''}{\Pi} + 2\mu_2\right) + 4Y_1'\left(\frac{\Pi'''}{\Pi} + 6\mu_2\frac{\Pi'}{\Pi}\right),$$

$$24\frac{\partial^2 B}{\partial v^2} = Y_1^{\text{V}} + 4Y_1'''Y_1' + 6\left(Y_1'''\left(\frac{\Pi''}{\Pi} + 2\mu_2\right) + Y_1''Y_1''\right)$$
$$+ 4Y_1'\left(Y_1''' + 3Y_1'\left(\frac{\Pi''}{\Pi} + 2\mu_2\right)\right),$$

welche Gleichung sich wegen der aus (27, *d.*) entspringenden

$$0 = Y_1^{\text{V}} + 12Y_1'''Y_1' + 12\mu_2 Y_1''' + 12Y_1''Y_1''$$

auf folgende vereinfacht, in welcher zugleich statt $\frac{\Pi''}{\Pi}$ sein Werth $2(Y_2' + Y_1')$ gesetzt ist:

$$24\frac{\partial^2 B}{\partial v^2} = -4Y_1'''Y_1' + 24\mu_2 Y_1'Y_1' + 12(Y_1''' + 2Y_1'Y_1')(Y_2' + Y_1') - 6Y_1''Y_1''.$$

Hiernach erhält man:

$$24\frac{\partial^2 B}{\partial v^2} - 12\frac{\partial^3 A}{\partial v^2 \partial v_1} - 12\frac{\partial^3 A}{\partial v^2 \partial v_3}$$
$$= -4Y_1'''Y_1' + 24\mu_2 Y_1'Y_1' + 6(Y_1''' + 2Y_1'Y_1')(Y_2' + Y_1') - 6Y_1''Y_1'',$$

oder da nach (27, *c.*)

$$0 = -2Y_1'''Y_1' - 24\mu_2 Y_1'Y_1' - 12Y_1'Y_1'Y_1' + 2\varkappa_4 Y_1'$$

ist, so ergiebt sich einfacher:

$$24\frac{\partial^2 B}{\partial v^2} - 12\frac{\partial^3 A}{\partial v^2 \partial v_1} - 12\frac{\partial^3 A}{\partial v^2 \partial v_3} = 6Y_2'(Y_1''' + 2Y_1'Y_1') + 2\varkappa_4 Y_1' - 6Y_1''Y_1''.$$

Durch Addition der entsprechenden Glieder, welche $-i$ statt $+i$ enthalten, verdoppelt sich die Seite rechts dieser Gleichung, und wenn man dann noch berücksichtigt, dafs nach dem oben gegebenen Werthe von ℓ,

$$\frac{Y_1''}{Y_2' - Y_1'}.\left\{\frac{\partial^2 A}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial v_2^2} - \frac{\partial^2 A}{\partial v_1^2} - \frac{\partial^2 A}{\partial v_3^2}\right\} = 2Y_1''Y_1''$$

ist, so ergiebt sich endlich:

$$(50,1.)\qquad C_{a_1} = Y_2'(Y_1''' + 2Y_1'Y_1') + \tfrac{1}{3}\varkappa_4 Y_1' + Y_1''Y_1''$$

und hieraus durch Vertauschung von a_1 mit a_2:

$$(50,2.)\qquad C_{a_2} = Y_2'(Y_2''' + 2Y_2'Y_2') + \tfrac{1}{3}\varkappa_4 Y_2' + Y_2''Y_2''.$$

Nach derselben Methode läfst sich die Gleichung (47, 3.) für C_p behandeln. Das Resultat der Rechnung ist:

$$(50,3.)\qquad C_p = Y_2'Y_2' - Y_1'Y_1'.$$

Hiermit sind die Gröfsen $U^{(x,y)}$, die sich auf die Constanten φ_0, Φ, m, a_1, a_2 und p beziehen, vollständig als Functionen der *Zeit* und dieser Constanten ausgedrückt, und wie leicht zu sehen, zugleich in Reihen nach den Sinus und Cosinus der Vielfachen der *Zeit* entwickelt. Ich gehe daher jetzt zu der Entwickelung der entsprechenden Gröfsen $U^{(x,z)}$ über; werde aber, da die Methode dieselbe ist, nur kurz den Gang der Rechnung und die Resultate angeben.

Zunächst erhält man aus den Differentialformeln (37.) folgende den Gleichungen (40.) analoge Ausdrücke:

$$(51.)\quad \begin{cases} 1)\ U_{\varphi_0}^{(x,y)} = \pm\tfrac{1}{4} i r^2 \lambda^2 m.\{e^{i\psi}(\overset{+}{P}_1\overset{+}{P}_1\overset{+}{P}_2\overset{-}{P}_1[\overset{+}{Z}_1 + \overset{-}{Z}_1 - 2Zu] \\ \qquad\qquad - \overset{+}{P}_2\overset{+}{P}_2\overset{+}{P}_1\overset{-}{P}_2[\overset{+}{Z}_2 + \overset{-}{Z}_2 - 2Zu]) \\ \quad - e^{-i\psi}(\overset{-}{P}_1\overset{-}{P}_1\overset{-}{P}_2\overset{+}{P}_1(\overset{+}{Z}_1 + \overset{-}{Z}_1 - 2Zu) - \overset{-}{P}_2\overset{-}{P}_2\overset{-}{P}_1\overset{+}{P}_2(\overset{+}{Z}_2 + \overset{-}{Z}_2 - 2Zu))\}, \\ 2)\ U_{\Phi}^{(x,z)} = u.U_{\varphi_0}^{(x,z)}, \\ 3)\ U_m^{(x,z)} = 0, \\ 4)\ U_{a_1}^{(x,z)} = \pm\tfrac{1}{4} i r^2 \lambda^2 m. \left\{ \begin{array}{r} e^{i\psi}\ (\overset{+}{P}_1\overset{+}{P}_1\overset{+}{P}_2\overset{-}{P}_1[(\overset{+}{Z}_1 - Y_1)(\overset{+}{Z}_1 + \overset{-}{Z}_1 - 2Zu) \\ -(\overset{+}{Z}_1 + \overset{+}{Z}_2 + i\Phi - 2Zu)(\overset{+}{Z}_1 - \overset{-}{Z}_1 - 2Y_1)] \\ -\overset{+}{P}_1\overset{+}{P}_2\overset{+}{P}_2\overset{-}{P}_2[(\overset{+}{Z}_1 - Y_1)(\overset{+}{Z}_2 + \overset{-}{Z}_2 - 2Zu)]) \\ -e^{-i\psi}(\overset{-}{P}_1\overset{-}{P}_1\overset{-}{P}_2\overset{+}{P}_1[(\overset{-}{Z}_1 + Y_1)(\overset{+}{Z}_1 + \overset{-}{Z}_1 - 2Zu) \\ +(\overset{-}{Z}_1 + \overset{-}{Z}_2 - i\Phi - 2Zu)(\overset{+}{Z}_1 - \overset{-}{Z}_1 - 2Y_1)] \\ -\overset{-}{P}_1\overset{-}{P}_2\overset{-}{P}_2\overset{+}{P}_2[(\overset{-}{Z}_1 + Y_1)(\overset{+}{Z}_2 + \overset{-}{Z}_2 - 2Zu)]) \end{array} \right\} \\ \qquad + \frac{\partial \log \lambda}{\partial a_1}.\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right), \end{cases}$$

$$
(51.)\quad \begin{cases}
5)\ U_{a_2}^{(x,z)} \text{ folgt aus } U_{a_1}^{(x,z)} \text{ durch die oft erwähnte Vertauschung,}\\
6)\ U_p^{(x,z)} = \tfrac{1}{2}i\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2.\{(Y_1 - ia_1 Z'K)\,U_{a_1}^{(x,z)} + (Y_2 - ia_2 Z'K)\,U_{a_2}^{(x,z)}\}\\
\quad -\tfrac{1}{2}\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 Z'K.\Phi.U_\Phi^{(x,z)} - \tfrac{1}{2}\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 (2Y_2' + 2Y_1' + 3\mu_2)\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right)\\
\quad \mp\tfrac{1}{4}r^2\lambda^2 m.\tfrac{1}{4}\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2.\Big\{ + e^{i\psi}.\Big\{ + \overset{+}{P}_1\overset{+}{P}_1\overset{+}{P}_2\overset{-}{P}_1\Big[(\overset{+}{Z}_1 + \overset{-}{Z}_1 - 2Zu)\Big(\frac{\overset{+}{\Theta}_1''}{\Theta_1} - 2\overset{+}{Z}_1 Y_1 - Y_1' + Y_1 Y_1\\
\quad + \frac{\overset{+}{\Theta}_2''}{\Theta_2} - 2\overset{+}{Z}_2 Y_2 - Y_2' + Y_2 Y_2 - 2\frac{\Theta'' u}{\Theta u}\Big)\\
\quad - (\overset{+}{Z}_1 + \overset{+}{Z}_2 + i\Phi - 2Zu)\Big(\frac{\overset{+}{\Theta}_1''}{\Theta_1} - 2\overset{+}{Z}_1 Y_1 - Y_1' + Y_1 Y_1\\
\quad + \frac{\overset{-}{\Theta}_1''}{\Theta_1} + 2\overset{-}{Z}_1 Y_1 - Y_1' + Y_1 Y_1\Big)\Big]\Big\},\\
\quad - \overset{+}{P}_2\overset{+}{P}_2\overset{+}{P}_1\overset{-}{P}_2 \text{ [multiplicirt in die aus dem Factor}\\
\quad \text{von } \overset{+}{P}_1\overset{+}{P}_1\overset{+}{P}_2\overset{-}{P}_1 \text{ durch Vertauschung von 1}\\
\quad \text{mit 2 entstehende Gröfse]}\Big\}\\
\quad + e^{-i\psi}.\{\text{multiplicirt in die aus dem Factor von } e^{+i\psi} \text{ durch}\\
\quad \text{Verwandlung von } +i \text{ in } -i \text{ entstehende Gröfse}\}\Big\},\\
7)\ \left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right)\\
\quad = \mp\tfrac{1}{4}r^2\lambda^2 m.\{e^{i\psi}(\overset{+}{P}_1\overset{+}{P}_1\overset{+}{P}_2\overset{-}{P}_1(\overset{-}{Z}_1 - \overset{+}{Z}_2 - i\Phi) - \overset{+}{P}_2\overset{+}{P}_2\overset{+}{P}_1\overset{-}{P}_2(\overset{-}{Z}_2 - \overset{+}{Z}_1 - i\Phi))\\
\quad + e^{-i\psi}(\overset{-}{P}_1\overset{-}{P}_1\overset{-}{P}_2\overset{+}{P}_1(\overset{+}{Z}_1 - \overset{-}{Z}_2 + i\Phi) - \overset{-}{P}_2\overset{-}{P}_2\overset{-}{P}_1\overset{+}{P}_2(\overset{+}{Z}_2 - \overset{-}{Z}_1 + i\Phi))\}.
\end{cases}
$$

In allen diesen Ausdrücken lassen sich einige Glieder unterscheiden, aus welchen die übrigen durch die oft gebrauchten Vertauschungen entstehen, und welche alle den Factor $\overset{+}{P}_1\overset{+}{P}_1\overset{+}{P}_2\overset{-}{P}_1$ enthalten. Demnach setze man zu ihrer Entwickelung:

$$
(52.)\quad \begin{cases} U = -P(u, K + ia_1 + v)\,P(u, -K - ia_1 + v_1)\,P(u, ia_2 + v_2)\,P(u, K + ia_1),\\ V = U.\dfrac{\Theta' u}{\Theta u},\\ W = U.\dfrac{\Theta'' u}{\Theta u}, \end{cases}
$$

die natürlich nicht mit den früher so bezeichneten Functionen zu verwechseln sind. Sie werden durch Differentialquotienten von

$$P = P(u, K + ia_1 + ia_2 + \varepsilon),$$

wo $\varepsilon = v + v_1 + v_2$ ist, mittels derselben Gleichungen (43.) bestimmt, in welchen nur Q in P zu verwandeln und die constanten Glieder G, H, I wegzulassen sind. Die Gröfse Π hat dann die Bedeutung

$$\Pi = H(K + ia_1 + v + w)\, H(-K - ia_1 + v_1 + w)\, H(ia_2 + v_2 + w)\, H(K + ia_1 + w).$$

Und für die Differentiationen von $\frac{\Pi'}{\Pi}$, $\frac{\Pi''}{\Pi}$ etc., eben so für die von U, V, W selbst, gilt alles früher von den analogen Gröfsen Gesagte.

Durch U, V, W lassen sich nun die Gleichungen (51.) in folgender Gestalt ausdrücken:

(53.)

$$\begin{cases}
1)\ U_{\varphi_0}^{(x,z)} = \pm\tfrac{1}{4} i r^2 \lambda^2 m . \Big\{ e^{i\psi} \Big[\Big(\dfrac{\partial U}{\partial v} + \dfrac{\partial U}{\partial v_1} - 2V \Big) + \begin{pmatrix} \text{der entsprechenden} \\ \text{Gröfse mit } a_2 \text{ st. } a_1 \end{pmatrix} \Big] \\
\qquad\qquad - e^{-i\psi} [\text{der conjugirt-imaginären Gröfse}] \Big\}, \\
2)\ U_{\Phi}^{(x,z)} = u . U_{\varphi_0}^{(x,z)}, \\
3)\ U_{m}^{(x,z)} = 0, \\
4)\ U_{a_1}^{(x,z)} = \pm\tfrac{1}{4} i r^2 \lambda^2 m . \Big\{ e^{i\psi} \Big[\Big(\dfrac{\partial^2 U}{\partial v \partial v_1} - \dfrac{\partial^2 U}{\partial v_2 \partial v} \Big) + \Big(\dfrac{\partial^2 U}{\partial v \partial v_1} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial v_2 \partial v_1} \Big) \\
\qquad - 2\dfrac{\partial V}{\partial v_1} + \Big[\begin{pmatrix} \text{ein Glied, welches durch Ver-} \\ \text{tauschung von } a_2 \text{ mit } a_1 \text{ aus} \\ \Big(\dfrac{\partial^2 U}{\partial v_2 \partial v} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial v_2 \partial v_1} - 2\dfrac{\partial V}{\partial v_2} \Big) \\ \text{entsteht} \end{pmatrix} \Big] \Big] - e^{-i\psi} . \begin{bmatrix} \text{der conjugirten imagi-} \\ \text{nären Gröfse} \end{bmatrix} \Big\} \\
\qquad\qquad + \dfrac{\partial \log \lambda}{\partial a_1} . \Big(z \dfrac{dx}{dt} - x \dfrac{dz}{dt} \Big), \\
5)\ U_{a}^{(x,z)} \text{ folgt aus } U_{a_1}^{(x,z)}, \\
6)\ U_{p}^{(x,z)} = \tfrac{1}{2} i \Big(\dfrac{2K}{\pi} \Big)^2 \{ (Y_1 - ia_1 Z' K)\, U_{a_1}^{(x,z)} + (Y_2 - ia_2 Z' K)\, U_{a_2}^{(x,z)} \} \\
\qquad - \tfrac{1}{2} \Big(\dfrac{2K}{\pi} \Big)^2 Z' K . \Phi . U_{\Phi}^{(x,z)} - \tfrac{1}{2} \Big(\dfrac{2K}{\pi} \Big)^2 . (2Y_2' + 2Y_1' + 3\mu_2) \Big(z \dfrac{dx}{dt} - x \dfrac{dz}{dt} \Big), \\
\mp\tfrac{1}{4} r^2 \lambda^2 m . \tfrac{1}{4} \Big(\dfrac{2K}{\pi} \Big)^2 . \Big\{ e^{i\psi} \Big(\Big[\dfrac{\partial^3 U}{\partial v^2 \partial v_1} - \dfrac{\partial^3 U}{\partial v^2 \partial v_2} + \dfrac{\partial^3 U}{\partial v_2^2 \partial v} + \dfrac{\partial^3 U}{\partial v_2^2 \partial v_1} - \dfrac{\partial^3 U}{\partial v_1^2 \partial v} \\
\qquad - \dfrac{\partial^3 U}{\partial v_1^2 \partial v_2} - 2\dfrac{\partial^2 V}{\partial v_2^2} + 2\dfrac{\partial^2 V}{\partial v_1^2} - 2\dfrac{\partial W}{\partial v_1} + 2\dfrac{\partial W}{\partial v_2} \Big] \\
\qquad + \begin{bmatrix} \text{die analogen Glieder} \\ \text{mit } a_2 \text{ statt } a_1 \end{bmatrix} \Big) \\
\qquad + e^{-i\psi} (\text{die analoge Gröfse mit } -i \text{ statt } +i) \Big\}, \\
7)\ z \dfrac{dx}{dt} - x \dfrac{dz}{dt} = \pm\tfrac{1}{4} r^2 \lambda^2 m . \Big\{ e^{i\psi} \Big(\Big[\dfrac{\partial U}{\partial v_1} - \dfrac{\partial U}{\partial v_2} \Big] + [a_2 \text{ st. } a_1 \text{ zu setzen}] \Big) \\
\qquad + e^{-i\psi} ([-i \text{ st. } +i] + [-i \text{ st. } +i]) \Big\}.
\end{cases}$$

Ich werde nur für die erste und letzte dieser Gröfsen die Rechnung ausführen, und von den andern die Resultate angeben.

Zunächst ergiebt sich für U_{φ_0}:

$$\frac{\partial U}{\partial v}+\frac{\partial U}{\partial v_1} = \tfrac{1}{3}\frac{\partial P'''}{\partial \varepsilon}-\frac{\Pi'}{\Pi}\cdot\frac{\partial P''}{\partial \varepsilon}+\Big(\frac{\Pi''}{\Pi}+4\mu_2\Big)\cdot\frac{\partial P'}{\partial \varepsilon}-\tfrac{1}{3}\Big(\frac{\Pi'''}{\Pi}+12\mu_2\frac{\Pi'}{\Pi}\Big)\frac{\partial P}{\partial \varepsilon}$$
$$-\tfrac{1}{2}(Y_1'+Y_1')P''+\tfrac{1}{2}\Big((Y_1''-Y_1'')+2(Y_1'+Y_1')\frac{\Pi'}{\Pi}\Big)P'-\tfrac{1}{6}\Big((Y_1'''+Y_1''')+3(Y_1''-Y_1'')\frac{\Pi'}{\Pi}$$
$$+3(Y_1'+Y_1')\Big(\frac{\Pi''}{\Pi}+4\mu_2\Big)\Big)P,$$

$$-2V = -\tfrac{1}{3}\frac{\partial P'''}{\partial \varepsilon}+\frac{\Pi'}{\Pi}\cdot\frac{\partial P''}{\partial \varepsilon}-\Big(\frac{\Pi''}{\Pi}+4\mu_2\Big)\frac{\partial P'}{\partial \varepsilon}+\tfrac{1}{3}\Big(\frac{\Pi'''}{\Pi}+12\mu_2\frac{\Pi'}{\Pi}\Big)\frac{\partial P}{\partial \varepsilon}$$
$$+\tfrac{1}{12}P^{\mathrm{IV}}-\tfrac{1}{3}\frac{\Pi'}{\Pi}P'''+\tfrac{1}{2}\Big(\frac{\Pi''}{\Pi}+2\mu_2\Big)P''-\tfrac{1}{3}\Big(\frac{\Pi'''}{\Pi}+6\mu_2\frac{\Pi'}{\Pi}\Big)P'$$
$$+\tfrac{1}{12}\Big(\frac{\Pi^{\mathrm{IV}}}{\Pi}+12\mu_2\frac{\Pi''}{\Pi}\Big)P,$$

also durch Addition:

$$(\#)\qquad \frac{\partial U}{\partial v}+\frac{\partial U}{\partial v_1}-2V = \tfrac{1}{12}P^{\mathrm{IV}}-\tfrac{1}{3}\frac{\Pi'}{\Pi}P'''+\tfrac{1}{2}\Big(\frac{\Pi''}{\Pi}+2\mu_2-2Y_1'\Big)P''$$
$$-\tfrac{1}{3}\Big(\frac{\Pi'''}{\Pi}+6\mu_2\frac{\Pi'}{\Pi}-6Y_1'\frac{\Pi'}{\Pi}\Big)P'+\tfrac{1}{12}\Big(\frac{\Pi^{\mathrm{IV}}}{\Pi}+12(\mu_2-Y_1')\frac{\Pi''}{\Pi}-4Y_1'''-48\mu_2Y_1'\Big)P.$$

Verwandelt man a_1 in a_2, so ändert auch Π seinen Werth. Zerlegt man das Product Π in zwei Factoren, deren einer die Argumente $K+ia_1+w$ und ia_2+w, der andere die Argumente $K+ia_1+w$ und $-K-ia_1+w$ enthält, und bezeichnet den ersten mit $\Pi 2$, so erhält man, da die Gröfsen $\frac{\Pi'}{\Pi}$, $\frac{\Pi''}{\Pi}$, $\frac{\Pi'''}{\Pi}$, $\frac{\Pi^{\mathrm{IV}}}{\Pi}$, bezogen auf den zweiten Factor, die Werthe resp. 0, $2Y_1'$, 0, $2Y_1'''+12Y_1'Y_1'$ (nach 28.) haben:

$$(54.)\qquad \begin{cases} \dfrac{\Pi'}{\Pi} = \dfrac{\Pi' 2}{\Pi 2}, \\ \dfrac{\Pi''}{\Pi} = \dfrac{\Pi'' 2}{\Pi 2}+2Y_1', \\ \dfrac{\Pi'''}{\Pi} = \dfrac{\Pi''' 2}{\Pi 2}+2Y_1'.3\dfrac{\Pi' 2}{\Pi 2}, \\ \dfrac{\Pi^{\mathrm{IV}}}{\Pi} = \dfrac{\Pi^{\mathrm{IV}} 2}{\Pi}+2Y_1'.6\dfrac{\Pi'' 2}{\Pi 2}+2Y_1'''+12Y_1'Y_1'. \end{cases}$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichung (#), so ergiebt sich:

$$(\#)\quad \frac{\partial U}{\partial v}+\frac{\partial U}{\partial v_1}-2V = \tfrac{1}{12}P^{IV}-\tfrac{1}{3}\frac{\Pi'2}{\Pi 2}P'''+\tfrac{1}{2}\left(\frac{\Pi''2}{\Pi 2}+2\mu_2\right)P''$$
$$-\tfrac{1}{3}\left(\frac{\Pi'''2}{\Pi 2}+6\mu_2\frac{\Pi'2}{\Pi 2}\right)P'+\tfrac{1}{12}\left(\frac{\Pi^{IV}2}{\Pi 2}+12\mu_2\frac{\Pi''2}{\Pi 2}-2Y_1'''-12Y_1'Y_1'-24\mu_2 Y_1'\right)P.$$

$\Pi 2$ ändert sich nun nicht, wenn a_1 in a_2 übergeht; eben so wenig ändern sich die letzten Glieder des Coëfficienten von P, die nach (27, *b.*) nur eine Function von K, nämlich K_4 sind. Daher verdoppelt sich die Seite rechts der Gleichung durch Addition der entsprechenden Glieder mit a_2 statt a_1.

Aus den Gleichungen (28.) folgt für $\Pi 2$:

$$(55.)\quad \begin{cases} \dfrac{\Pi'2}{\Pi 2} = (Y_1+Y_2), \\ \dfrac{\Pi''2}{\Pi 2} = (Y_1+Y_2)^2+(Y_1'+Y_2'), \\ \dfrac{\Pi'''2}{\Pi 2} = (Y_1+Y_2)^3+3(Y_1'+Y_2').(Y_1+Y_2), \\ \dfrac{\Pi^{IV}2}{\Pi 2} = (Y_1+Y_2)^4+6(Y_1'+Y_2').(Y_1+Y_2)^2+(Y_1'''+Y_2''')+3(Y_1'+Y_2')^2. \end{cases}$$

Nach Substitution dieser Werthe, in welchen man statt Y_1+Y_2 auch $-i\Phi$ schreiben kann, geht die Gleichung (#) in folgende über:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial v}+\frac{\partial U}{\partial v_1}-2V\right) = \tfrac{1}{12}\{P^{IV}+4.i\Phi.P'''+6.i^2\Phi^2.P''+4i^3\Phi^3.P'+i^4\Phi^4.P\}$$
$$+\tfrac{1}{2}(Y_1'+Y_2'+2\mu_2).\{P''+2.i\Phi.P'+i^2\Phi^2.P\}$$
$$-\tfrac{1}{4}(Y_2'-Y_1')^2.P,$$

welche offenbar auch so geschrieben werden kann:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial v}+\frac{\partial U}{\partial v_1}-2V\right) = \tfrac{1}{12}.e^{-i\Phi u}\left\{\frac{\partial^4(P.e^{i\Phi u})}{\partial u^4}+6(Y_1'+Y_2'+2\mu_2)\cdot\frac{\partial^2(P.e^{i\Phi u})}{\partial u^2}\right.$$
$$\left.-3(Y_2'-Y_1')^2.Pe^{i\Phi u}\right\}.$$

Addirt man hierzu die entsprechenden Glieder mit a_2 statt a_1, multiplicirt mit $e^{i\psi}$, und subtrahirt endlich die durch Änderung von $+i$ in $-i$ entstehenden Glieder, so geht die Seite rechts in

$$\tfrac{1}{3}i\cdot\left\{\frac{\partial^4 R}{\partial u^4}+6(Y_2'+Y_1'+2\mu_2)\frac{\partial^2 R}{\partial u^2}-3(Y_2'-Y_1')^2.R\right\}$$

über. Also erhält man endlich aus der Gleichung (53, 1.):

$$(56,1.)\quad U_{\varphi_0}^{(x,z)} = \mp\tfrac{1}{12}r^2\lambda^2 m.\{R^{IV}+6(Y_2'+Y_1'+2\mu_2).R''-3(Y_2'-Y_1')^2.R\},$$

woraus, durch Multiplication mit u,

$$(56,2.)\quad U_{\Phi}^{(x,z)} = \mp\tfrac{1}{12}r^2\lambda^2 m.u\{R^{IV}+6(Y_2'+Y_1'+2\mu_2).R''-3(Y_2'-Y_1')^2.R\}$$

folgt. Um die Gröfse $z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}$ zu finden (nach Gleichung 53, 7), hat man:

$$\frac{\partial U}{\partial v_1}+\frac{\partial U}{\partial v_2}=-\tfrac{1}{2}(Y_1'-Y_2').P''+\tfrac{1}{2}\Big(-(Y_1''+Y_2'')+2(Y_1'-Y_2').\frac{\Pi'}{\Pi}\Big).P'$$
$$-\tfrac{1}{6}\Big((Y_1'''-Y_2''')-3(Y_1''+Y_2'')\frac{\Pi'}{\Pi}+3(Y_1'-Y_2')\Big(\frac{\Pi''}{\Pi}+4\mu_2\Big)\Big)P.$$

Da $\frac{\Pi'}{\Pi}$ durch Substitution von a_2 für a_1 ungeändert bleibt, so verschwinden durch Addition der entsprechenden Glieder mit a_2 statt a_1 alle Glieder bis auf den letzten Theil des in P multiplicirten, in welchem nach (54.) für $\frac{\Pi''}{\Pi}$ $2Y_1'$ zu setzen ist. Man erhält auf diese Weise:

$$\Big(\frac{\partial U}{\partial v_1}-\frac{\partial U}{\partial v_2}\Big)+\text{(entsprechende Gröfse mit 2 st. 1)}=-(Y_2'-Y_1')^2.P,$$

mithin wird:

$$(56,3)\qquad z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}=\mp\tfrac{1}{2}r^2\lambda^2 m(Y_2'-Y_1')^2.S=\mp 2r^2 m.S.$$

Diese Gleichung giebt, in Verbindung mit (46, 3.), eine directe Verification der Differentialgleichungen der Bewegung des ungestörten sphärischen Pendels, indem durch Differentiation nach der *Zeit* aus den beiden Gleichungen (46, 3.) und (56, 3.):

$$y\frac{d^2x}{dt^2}-x\frac{d^2y}{dt^2}=0,$$

$$z\frac{d^2x}{dt^2}-x\frac{d^2z}{dt^2}=\mp 2r^2m^2.\frac{\partial S}{\partial u}=-2r^2.\tfrac{1}{2}(a-c).\frac{g}{r}.\frac{x}{r(a-c)}=-gx\ \text{(nach 31.)}$$

folgt, welche Gleichungen mit denen (3.) gleichbedeutend sind.

Die Resultate der Rechnung für die Gleichungen (53, 4, 5, 6.) sind folgende:

(56.)
$$4)\quad U_{a_1}^{(x,z)}=\mp\tfrac{1}{12}r^2\lambda^2 m\Big\{\frac{\partial R^{IV}}{\partial\varepsilon}+6(Y_2'+Y_1'+2\mu_2)\frac{\partial R''}{\partial\varepsilon}-3(Y_2'-Y_1')^2\frac{\partial R}{\partial\varepsilon}\Big\}$$
$$\pm\tfrac{1}{3}r^2\lambda^2 m\{Y_1'R'''+(3(Y_1'+Y_2'+2\mu_2)Y_1'+Y_1''')R'\},$$
$$5)\quad U_{a_2}^{(x,z)}=\mp\tfrac{1}{12}r^2\lambda^2 m\Big\{\frac{\partial R^{IV}}{\partial\varepsilon}+6(Y'+Y_1'+2\mu_2)\frac{\partial R''}{\partial\varepsilon}-3(Y_2'-Y_1')^2\frac{\partial R}{\partial\varepsilon}\Big\}$$
$$\pm\tfrac{1}{3}r^2\lambda^2 m\{Y_2'R'''+(3(Y_2'+Y_1'+2\mu_2)Y_2'+Y_2''')R'\},$$
$$6)\quad U_p^{(x,z)}=\tfrac{1}{2}i\Big(\frac{2K}{\pi}\Big)^2\{(Y_1'-ia_1Z'K)U_{a_1}^{(x,z)}+(Y_2-ia_2Z'K)U_{a_2}^{(x,z)}\}$$
$$-\tfrac{1}{2}\Big(\frac{2K}{\pi}\Big)^2Z'K.\Phi.U_\Phi^{(x,z)}\pm\tfrac{1}{2}r^2\lambda^2 m\Big(\frac{2K}{\pi}\Big)^2.iY_1''(Y_2'-Y_1').R'.$$

Man sieht leicht die vollkommene Analogie dieser Ausdrücke mit den für $U^{(x,y)}$ früher abgeleiteten. Schreibt man zur Abkürzung:

$$(57.)\quad \begin{cases} Q^{IV}+6(Y_2'+Y_1'+2\mu_2).Q'' & = Q^{(4)}, \\ Q'''+3(Y_2'+Y_1'+2\mu_2).Q' & = Q^{(3)}, \\ \frac{\partial Q^{IV}}{\partial\varepsilon}+6(Y_2'+Y_1'+2\mu_2).\frac{\partial Q''}{\partial\varepsilon} & = Q_\varepsilon^{(4)}, \\ R^{IV}+6(Y_2'+Y_1'+2\mu_2)R''-3(Y_2'-Y_1')^2R & = R^{(4)}, \\ R'''+3(Y_2'+Y_1'+2\mu_2)R' & = R^{(3)}, \\ \frac{\partial R^{IV}}{\partial\varepsilon}+6(Y_2'+Y_1'+2\mu_2)\frac{\partial R''}{\partial\varepsilon}-3(Y_2'-Y_1')^2\frac{\partial R}{\partial\varepsilon} & = R_\varepsilon^{(4)}, \end{cases}$$

so kann man den in den Gleichungen (45. und 56.) erlangten Resultaten folgende einfachere Form geben:

$$(58.)\quad \begin{cases} 1) & U_{\varphi_0}^{(x,y)} = -\tfrac{1}{12}r^2\lambda^2 m.Q^{(4)}, \\ 2) & U_{\Phi}^{(x,y)} = -\tfrac{1}{12}r^2\lambda^2 m.uQ^{(4)}, \\ 3) & U_m^{(x,y)} = 0, \\ 4) & U_{a_1}^{(x,z)} = -\tfrac{1}{12}r^2\lambda^2 m.\{Q_\varepsilon^{(4)}-4Y_1'.Q^{(3)}+3C_{a_1}-4Y_1'''.Q'\}, \\ 5) & U_{a_2}^{(x,y)} = -\tfrac{1}{12}r^2\lambda^2 m.\{Q_\varepsilon^{(4)}-4Y_2'.Q^{(3)}+3C_{a_2}-4Y_2'''.Q'\}, \\ 6) & \left(\frac{\pi}{2K}\right)^2.U_p^{(x,y)} = -\tfrac{1}{12}r^2\lambda^2 m.\{-3iY_1''.C_p-6iY_1''(Y_2'-Y_1').Q'\} \\ & +\tfrac{1}{2}i(Y_1-ia_1Z'K)U_{a_1}^{(x,y)}+(Y_2-ia_2Z'K)U_{a_2}^{(x,y)}-\tfrac{1}{2}Z'K.\Phi U_\Phi^{(x,y)}, \end{cases}$$

$$(59.)\quad \begin{cases} 1) & U_{\varphi_0}^{(x,z)} = \mp\tfrac{1}{12}r^2\lambda^2 m.R^{(4)}, \\ 2) & U_{\Phi}^{(x,z)} = \mp\tfrac{1}{12}r^2\lambda^2 m.uR^{(4)}, \\ 3) & U_m^{(x,z)} = 0, \\ 4) & U_{a_1}^{(x,z)} = \mp\tfrac{1}{12}r^2\lambda^2 m.\{R_\varepsilon^{(4)}-4Y_1'R^{(3)}-4Y_1'''R'\}, \\ 5) & U_{a_2}^{(x,z)} = \mp\tfrac{1}{12}r^2\lambda^2 m.\{R_\varepsilon^{(4)}-4Y_2'R^{(3)}-4Y_2'''R'\}, \\ 6) & \left(\frac{\pi}{2K}\right)^2.U_p^{(x,z)} = \mp\tfrac{1}{12}r^2\lambda^2 m.\{-6iY_1''(Y_2'-Y_1').R'\} \\ & +\tfrac{1}{2}i(Y_1-ia_1Z'K)U_{a_1}^{(x,z)}+\tfrac{1}{2}i(Y_2-ia_2Z'K)U_{a_2}^{(x,z)}-\tfrac{1}{2}Z'K.\Phi U_\Phi^{(x,z)}. \end{cases}$$

Um nun aus den Gleichungen (2—6.) diejenigen für U_l und U_h zu erlangen, mufs man (nach 32.) die partiellen Differentialquotienten der Constanten, Φ, a_1, a_2 und p (da U_m verschwindet) nach h und l suchen. Da jene von diesen durch die Vermittelung der Wurzeln a, b, c der cubischen

Gleichung (7, *a.*) abhangen, so gehe man auf die Gleichung

$$2(gz+h)(r^2-z^2) = 2g(ra-z)(rb-z)(rc-z)$$

zurück. Variirt man dieselbe vollständig nach den Constanten h, l, a, b, c und setzt dann für z resp. ra, rb, rc, so ergiebt sich:

$$(60.)\quad \begin{cases} +\delta a = \dfrac{(1+a)(1-a)}{(a-b)(a-c)}\cdot\dfrac{\delta h}{gr} - \dfrac{1}{(a-b)(a-c)}\cdot\dfrac{l\delta l}{gr^3}, \\ -\delta b = \dfrac{(1+b)(1-b)}{(a-b)(b-c)}\cdot\dfrac{\delta h}{gr} - \dfrac{1}{(a-b)(b-c)}\cdot\dfrac{l\delta l}{gr^3}, \\ +\delta c = \dfrac{(1+c)(1-c)}{(a-c)(b-c)}\cdot\dfrac{\delta h}{gr} - \dfrac{1}{(a-c)(b-c)}\cdot\dfrac{l\delta l}{gr^3}. \end{cases}$$

Ferner wurde a_1 mittels der Gleichung

$$\mathrm{sn}^2(K+ia_1) = \frac{a-c}{1+a}$$

eingeführt. Variirt man auch diese Gleichung, deren Seite links eine Function von p und a_1, die rechts von a, b, c ist, nach diesen Constanten, so findet sich, nach einigen Reductionen:

$$\delta a_1 + \tfrac{1}{2}i\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2(Y_1 - ia_1 Z'K)\,\delta p$$

$$= \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{-(1+a)(1+b)(1+c)}{(a-b)^2(a-c)(b-c)^2}\right)}\left\{\frac{b-c}{1+a}\delta a - \frac{a-c}{1+b}\delta b + \frac{a-b}{1+c}\delta c\right\},$$

und wenn man für δa, δb, δc ihre Werthe aus (60.) setzt:

$$\delta a_1 + \tfrac{1}{2}i\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2(Y_1 - ia_1 Z'K)\,.\,\delta p$$

$$= \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{-(1+a)(1+b)(1+c)}{(a-b)^2(a-c)(b-c)^2}\right)}\left\{\frac{(b-c)(1-a)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(a-c)(1-b)}{(a-b)(b-c)} + \frac{(a-b)(1-c)}{(a-b)(b-c)}\right\}\frac{\delta h}{gr}$$

$$-\tfrac{1}{2}(a-c)^{\frac{3}{2}}\cdot\left\{\frac{(b-c)^2(1+b)(1+c)+(a-c)^2(1+c)(1+a)+(a-b)^2(1+a)(1+b)}{(a-b)^2(b-c)^2}\right\}\cdot\frac{\delta l}{\sqrt{gr^3}}.$$

Führt man endlich statt der Wurzeln a, b, c die Gröfsen z^2, z'^2, a_1, a_2 ein, so ergiebt sich:

$$(61, a.)\quad \begin{cases} \delta a_1 + \tfrac{1}{2}i\left(\dfrac{2K}{\pi}\right)^2(Y_1 - ia_1 Z'K)\,\delta p \\ \qquad = (Y_2' - Y_1')^{\frac{3}{2}}\,.\,A_1^{(l)}\cdot\dfrac{\delta l}{\sqrt{gr^3}} - iY_1''(Y_2' - Y_1')\,.\,A_2^{(h)}\cdot\dfrac{\delta h}{gr}, \\ \text{und durch Vertauschung von } a_1 \text{ und } a_2 \text{ (wobei } l\,.\,(Y_2' - Y_2')^{\frac{3}{2}} \text{ und } h \\ \text{ihre Zeichen ändern):} \\ \delta a_2 + \tfrac{1}{2}i\left(\dfrac{2K}{\pi}\right)^2(Y_2 - ia_2 Z'K)\,\delta p \\ \qquad = -(Y_2' - Y_1')^{\frac{3}{2}}\,.\,A_2^{(l)}\cdot\dfrac{\delta l}{\sqrt{gr^3}} + iY_1''(Y_2' - Y_1')\,.\,A_1^{(h)}\cdot\dfrac{\delta h}{gr}, \end{cases}$$

wo

$$(62,a.)\quad \begin{cases} A_1^{(l)} = \dfrac{\varkappa'^4 \operatorname{cn}^2(K+ia_1)\operatorname{dn}^2(K+ia_1)+\operatorname{cn}^2(K+ia_1)+\varkappa^4\operatorname{dn}^2(K+ia_1)}{4\varkappa^4\varkappa'^4\operatorname{sn}^4(K+ia_1)}, \\ A_2^{(l)} = \dfrac{\varkappa'^4 \operatorname{cn}^2 ia_2 \operatorname{dn}^2 ia_2+\operatorname{cn}^2 ia_2+\varkappa^4\operatorname{dn}^2 ia_2}{4\varkappa^4\varkappa'^4\operatorname{sn}^4 ia_2}, \\ A_1^{(h)} = \dfrac{\varkappa'^4+\operatorname{dn}^2(K+ia_1)+\varkappa^4\operatorname{cn}^2(K+ia_1)}{8\varkappa^4\varkappa'^4\operatorname{sn}^2(K+ia_1)}, \\ A_2^{(h)} = \dfrac{\varkappa'^4+\operatorname{dn}^2 ia_2+\varkappa^4\operatorname{cn}^2 ia_2}{8\varkappa^4\varkappa'^4\operatorname{sn}^2 ia_2} \end{cases}$$

gesetzt worden ist. Für δp erhält man aus der bekannten Formel für $\frac{\partial p}{\partial(\varkappa^2)}$

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \delta p = \frac{1}{\varkappa^2\varkappa'^2}\delta(\varkappa^2),$$

wenn man für $\varkappa^2$ seinen Werth in a, b, c setzt:

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \delta p = \frac{1}{(a-b)(b-c)}\cdot\{(b-c)\delta a-(a-c)\delta b+(a-b)\delta c\}$$

und hieraus, mit Hülfe der Gleichungen (60.) und durch Einführung von a_1, a_2, k^2 statt a, b, c:

$$(61,b.)\quad \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \delta p = -iY_1''.(Y_2'-Y_1')^{\frac{3}{2}}.P^{(l)}.\frac{\delta l}{\sqrt{(gr^3)}}-4(Y_2'-Y_1').P^{(h)}.\frac{\delta h}{gr},$$

wo

$$(62,b.)\quad \begin{cases} P^{(l)} = \dfrac{\varkappa'^4+1+\varkappa^4}{4\varkappa^4\varkappa'^4}, \\ P^{(h)} = \dfrac{\varkappa'^4+\operatorname{dn}^2(K+ia_1)\operatorname{dn}^2 ia_2+\varkappa^4\operatorname{cn}^2(K+ia_1)\operatorname{cn}^2(ia_2)}{8\varkappa^4\varkappa'^4\operatorname{sn}^2(K+ia_1)\operatorname{sn}^2 ia_2} \end{cases}$$

gesetzt ist.

Hierdurch sind die Differentialquotienten von a_1, a_2 und p nach h und l bestimmt. Die Gröfse Φ aber ist als Function von a_1, a_2, p durch die Formel

$$\Phi = i(Y_1+Y_2)$$

gegeben. Aus dieser folgt durch Differentiation:

$$\delta\Phi = -Y_1'.\delta a_1 - Y_2'.\delta a_2$$
$$-\left\{\tfrac{1}{2}i\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 Y_1'(Y_1-ia_1Z'K)+\tfrac{1}{2}i\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 Y_2'(Y_2-ia_2Z'K)-\tfrac{1}{2}\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 Z'K.\Phi\right\}\delta p.$$

Setzt man hier für δa_1, δa_2 und δp ihre Werthe aus den Gleichungen (61.), so heben sich die in $Y_1-ia_1Z'K$ und $Y_2-ia_2Z'K$ multiplicirten Glieder auf, und es ergiebt sich:

$$(61,c)\quad \delta\Phi = -(Y_1'A_1^{(l)} - Y_2'A_2^{(l)}).(Y_2' - Y_1')^{\frac{3}{2}}\frac{\delta l}{\sqrt{(gr^3)}} + (Y_2'A_2^{(h)} - Y_2'A_1^{(h)}).iY_1''.(Y_2' - Y_1').\frac{\delta h}{gr} - \tfrac{1}{2}\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 Z'K.\Phi\delta p.$$

Für die gesuchten partiellen Differentialquotienten hat man demnach folgende Werthe:

$$(63.)\quad \begin{cases} \frac{\partial\Phi}{\partial l} = -(Y_2' - Y_1')^{\frac{3}{2}}.\sqrt{\left(\frac{1}{gr^3}\right)}(Y_1'A_1^{(l)} - Y_2'A_1^{(l)}) - \frac{1}{2}\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 Z'K.\Phi\frac{\partial p}{\partial l}, \\ \frac{\partial a_1}{\partial l} = +(Y_2' - Y_1')^{\frac{3}{2}}.\sqrt{\left(\frac{1}{gr^3}\right)}A_1^{(l)} - \frac{1}{2}i\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2(Y_1 - ia_1Z'K)\frac{\partial p}{\partial l}, \\ \frac{\partial a_2}{\partial l} = -(Y_2' - Y_1')^{\frac{3}{2}}.\sqrt{\left(\frac{1}{gr^3}\right)}A_2^{(l)} - \frac{1}{2}i\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2(Y_2 - ia_2Z'K)\frac{\partial p}{\partial l}, \\ \frac{\partial p}{\partial l} = -(Y_2' - Y_1')^{\frac{3}{2}}.\sqrt{\left(\frac{1}{gr^3}\right)}.iY_1''.P^{(l)}, \\ \frac{\partial\Phi}{\partial h} = +(Y_2' - Y_1').\frac{1}{gr}iY_1''(Y_1'A_2^{(h)} - Y_2'A_1^{(h)}) - \frac{1}{2}\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 Z'K.\Phi\frac{\partial p}{\partial h}, \\ \frac{\partial a_1}{\partial h} = -(Y_2' - Y_1').\frac{1}{gr}iY_1''.A_2^{(h)} - \frac{1}{2}i\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2(Y_1 - ia_1Z'K)\frac{\partial p}{\partial l}, \\ \frac{\partial a_2}{\partial h} = +(Y_2' - Y_1').\frac{1}{gr}iY_1''.A_1^{(h)} - \frac{1}{2}i\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2(Y_2 - ia_2Z'K)\frac{\partial p}{\partial l}, \\ \frac{\partial p}{\partial h} = -(Y_2' - Y_1').\frac{1}{gr}4P^{(h)}. \end{cases}$$

Bildet man mit diesen Werthen aus den Gleichungen (58. und 59.) die Gröfsen U_l und U_h, so vernichten sich die in $Y_1 - ia_1Z'K$, $Y_2 - ia_2Z'K$ und $\Phi.Z'K$ multiplicirten Glieder gegenseitig. Aufserdem verschwinden die Glieder mit den Factoren Q' und R', weil die Coëfficienten

$$Y_1'''.A_1^{(l)} - Y_2'''.A_2^{(l)} + \tfrac{3}{2}Y_1''Y_1''(Y_2' - Y_1').P^{(l)},$$
$$Y_1'''.A_2^{(h)} - Y_2'''.A_1^{(h)} - 6.(Y_2' - Y_1').P^{(h)}$$

in Folge der Relation

$$Y_1'' + Y_2'' = 0$$

verschwinden. Denn wenn man diese nach a_1, a_2, p vollständig variirt, so erhält man:

$$0 = Y_2'''\delta a_1 + Y_2'''\delta a_2 + \left\{\tfrac{3}{2}\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2.iY_1''(Y_2' - Y_1') + \tfrac{1}{2}i\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2.Y_1'''(Y_1 - ia_1Z'K) + \tfrac{1}{2}i\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 Y_2'''(Y_2 - ia_2Z'K)\right\}\delta p,$$

woraus sich nach Substitution der Werthe von δa_1, δa_2, δp in δl und δh sogleich die Richtigkeit der Behauptung zeigt.

Demnach erhält man für U_l und U_h folgende einfache Ausdrücke:

$$(64.)\quad \begin{cases} U_l^{(x,y)} = -\frac{1}{12} r^2 \lambda^2 m . (Y_2' - Y_1')^{\frac{3}{2}} . \sqrt{\left(\frac{1}{gr^3}\right)} \{ (A_1^{(l)} - A_2^{(l)}) Q_\varepsilon^{(4)} \\ -(Y_1' A_1^{(l)} - Y_2' A_2^{(l)})(4Q^{(3)} - uQ^{(4)}) + 3(C_{a_1} A_1^{(l)} - C_{a_2} A_2^{(l)} - Y_1'' Y_1'' C_p P^{(l)}) \}, \\ U_h^{(x,y)} = \frac{1}{12} r^2 \lambda^2 m . i Y_1'' (Y_2' - Y_1') . \frac{1}{gr} \{ (A_2^{(h)} - A_1^{(h)}) Q_\varepsilon^{(4)} \\ -(Y_1' A_1^{(h)} - Y_2' A_2^{(h)})(4Q^{(3)} - uQ^{(4)}) + 3(C_{a_1} A_2^{(h)} - C_{a_2} A_1^{(h)} - 4 C_p P^{(h)}) \}, \\ U_l^{(x,z)} = \mp \frac{1}{12} r^2 \lambda^2 m (Y_2' - Y_1')^{\frac{3}{2}} \sqrt{\left(\frac{1}{gr^3}\right)} \{ (A_1^{(l)} - A_2^{(l)}) R_\varepsilon^{(4)} \\ -(Y_1' A_1^{(l)} - Y_2' A_2^{(l)})(4R^{(3)} - u . R^{(4)}) \}, \\ U_h^{(x,z)} = \pm \frac{1}{12} r^2 \lambda^2 m . i Y_1'' (Y_2' - Y_1') \frac{1}{gr} \{ (A_2^{(h)} - A_1^{(h)}) R_\varepsilon^{(4)} \\ -(Y_1' A_2^{(h)} - Y_2' A_1^{(h)})(4R^{(3)} - u . R^{(4)}) \}. \end{cases}$$

Die hier vorkommenden constanten Factoren, eben so wie die letzten constanten Glieder, welche zur Abkürzung durch C_l und C_h bezeichnet werden sollen, so, dafs

$$(65.)\quad \begin{cases} C_l = C_{a_1} . A_1^{(l)} - C_{a_2} . A_2^{(l)} - Y_1'' Y_1'' . C_p P^{(l)}, \\ C_h = C_{a_1} . A_2^{(h)} - C_{a_2} . A_1^{(h)} - 4 . C_p P^{(h)} \end{cases}$$

ist, lassen noch bedeutende Vereinfachungen zu.

Setzt man in den Gleichungen (62.) für die Gröfsen

$$\frac{1}{\mathrm{sn}^2 u} \ldots \frac{\mathrm{cn}^2 u}{\mathrm{sn}^2 u} \ldots \frac{\mathrm{dn}^2 u}{\mathrm{sn}^2 u}$$

die gleichbedeutenden

$$Z'0 - Y'u \ldots Z'(K + iK') - Y'u \ldots Z'K - Y'u,$$

(wo $Z'(K+iK') = Z'u$ für $u = K + iK'$ oder $Z'(K+iK') = -\frac{E}{K}$ ist) und schreibt dann, wie folgt:

$$(66, a.)\quad \begin{cases} A = \frac{1}{\varkappa^4 \varkappa'^4} (\varkappa'^4 + 1 + \varkappa^4), \\ B = \frac{1}{\varkappa^4 \varkappa'^4} (\varkappa'^4 Z'0 + Z'K + \varkappa^4 Z'(K + iK')), \\ C = \frac{1}{\varkappa^4 \varkappa'^4} (\varkappa'^4 Z'0^2 + Z'K^2 + \varkappa^4 Z'(K + iK')^2), \end{cases}$$

so ergiebt sich:

$$(67.)\quad \begin{cases} A_1^{(h)} = \frac{1}{8}(B - AY_1'), \\ A_2^{(h)} = \frac{1}{8}(B - AY_2'), \\ P^{(h)} = \frac{1}{8}(C - B(Y_1' + Y_2') + A.Y_1'Y_2'). \end{cases}$$

Um für die Constanten $A_1^{(l)}$, $A_2^{(l)}$, $P^{(l)}$ ähnliche Formen zu finden, erwäge man, dafs sich aus den identischen Gleichungen zwischen den Wurzeln der cubischen Gleichung

$$\begin{aligned} (1+b)(1+c) &= (b+c)(1-a), \\ (1+c)(1+a) &= (c+a)(1-b), \\ (1+a)(1+b) &= (a+b)(1-c) \end{aligned}$$

folgende Ausdrücke ergeben:

$$\frac{\mathrm{cn}^2(K+ia_1)\,\mathrm{dn}^2(K+ia_1)}{\mathrm{sn}^4(K+ia_1)} = -\frac{b+c}{a-c}\cdot\frac{1}{\mathrm{sn}^2 ia_2} = -\left(\frac{b+c}{a-c}\right)\cdot(Z'0 - Y_2'),$$

$$\frac{\mathrm{cn}^2(K+ia_1)}{\mathrm{sn}^4(K+ia_1)} = -\frac{c+a}{a-c}\cdot\frac{\mathrm{dn}^2 ia_2}{\mathrm{sn}^2 ia_2} = -\left(\frac{c+a}{a-c}\right)\cdot(Z'K - Y_2'),$$

$$\frac{\mathrm{dn}^2(K+ia_1)}{\mathrm{sn}^4(K+ia_1)} = -\frac{a+b}{a-c}\cdot\frac{\mathrm{cn}^2 ia_2}{\mathrm{sn}^2 ia_2} = -\left(\frac{a+b}{a-c}\right)\cdot(Z'(K+iK') - Y_2'),$$

woraus man durch Vertauschung von a_1 und a_2 drei ähnliche erhält. Bezeichnet man daher:

$$(68.)\quad \begin{cases} A' = -\frac{1}{x^4 x'^4}\left\{x'^4.\left(\frac{b+c}{a-c}\right) + \left(\frac{c+a}{a-c}\right) + x^4.\left(\frac{a+b}{a-c}\right)\right\}, \\ B' = -\frac{1}{x^4 x'^4}\left\{x'^4 Z'0\left(\frac{b+c}{a-c}\right) + Z'K.\left(\frac{c+a}{a-c}\right) + x^4.Z'(K+iK').\left(\frac{a+b}{a-c}\right)\right\}, \\ C' = -\frac{1}{x^4 x'^4}\left\{x'^4 Z'0^2.\left(\frac{b+c}{a-c}\right) + Z'K^2.\left(\frac{c+a}{a-c}\right) + x^4.Z'(K+iK')^2.\left(\frac{a+b}{a-c}\right)\right\}, \end{cases}$$

welche Gleichungen sich mit Einführung von

$$(66, b.)\quad D = \frac{1}{x^4 x'^4}\{x'^4.Z'0^3 + Z'K^3 + x^4.Z'(K+iK')^3\}$$

in

$$(69.)\quad \begin{cases} A' = (Y_2' + Y_1' + 3\mu_2).A + B, \\ B' = (Y_2' + Y_1' + 3\mu_2).B + C, \\ C' = (Y_2' + Y_1' + 3\mu_2).C + D \end{cases}$$

umformen lassen, so findet man:

$$(70.)\quad \begin{cases} A_1^{(l)} = \frac{1}{4}(B' - A'Y_2'), \\ A_2^{(l)} = \frac{1}{4}(B' - A'Y_1'), \\ P^{(l)} = \frac{1}{4}A. \end{cases}$$

Aus den Gleichungen (67. und 70.) folgt nun zunächst:

$$(71.)\quad \begin{cases} A_2^{(h)} - A_1^{(h)} = -\frac{1}{8}(Y_2' - Y_1').A, \\ Y_1' A_2^{(h)} - Y_2' A_1^{(h)} = -\frac{1}{8}(Y_2' - Y_1').B, \\ A_1^{(l)} - A_2^{(l)} = -\frac{1}{4}(Y_2' - Y_1').A', \\ Y_1' A_1^{(l)} - Y_2' A_1^{(l)} = -\frac{1}{4}(Y_2' - Y_1').B'. \end{cases}$$

Um C_h und C_l ähnlich auszudrücken, eliminire man aus C_{a_1} und C_{a_2} die Gröfsen Y_1''' und Y_1''. Es war

$$C_{a_1} = Y_2'(Y_1''' + 2Y_1'Y_1') + \tfrac{1}{3}\varkappa_4 Y_1' + Y_1''Y_1''$$

und Y_1''' läfst sich mittels der Gleichung (27, *b*.)

$$Y'''u + 12\mu_2 Y'u + 6Y'uY'u = \varkappa_4$$

herausschaffen. Um Y'' zu eliminiren, erwäge man, dafs ebenfalls aus der Gleichung (27.),

$$Y''u\,Y''u = 4\frac{1}{\mathrm{sn}^2 u}\cdot\frac{\mathrm{dn}^2 u}{\mathrm{sn}^2 u}\cdot\frac{\mathrm{cn}^2 u}{\mathrm{sn}^2 u}$$
$$= 4(Z'0 - Y'u)(Z'K - Y'u)(Z'(K+iK') - Y'u)$$

folgt. Setzt man daher für den Augenblick

$$Z'0.Z'K.Z'(K+iK') \quad \text{oder} \quad Z'0^3 - (1+\varkappa^2)Z'0^2 + \varkappa^2 Z'0 = k$$

und erwägt, dafs:

$$Z'0\,Z'K + Z'KZ'(K+iK') + Z'(K+iK')Z'0 = -\tfrac{1}{2}\varkappa_4,$$
$$Z'0 + Z'K + Z'(K+iK') = -3\mu_2$$

ist, so ergiebt sich

$$Y''u\,Y''u = 4k + 2\varkappa_4 Y'u - 12\mu_2 Y'u\,Y'u - 4Y'u\,Y'u\,Y'u,$$

also für $u = K + ia_1$ und $u = ia_2$:

$$Y_1''Y_1'' = 4k + 2\varkappa_4 Y_1' - 12\mu_2 Y_1'Y_1' - 4Y_1'Y_1'Y_1',$$
$$Y_2''Y_2'' = 4k + 2\varkappa_4 Y_2' - 12\mu_2 Y_2'Y_2' - 4Y_2'Y_2'Y_2'.$$

Durch Subtraction ergiebt sich hieraus, da die Seiten links gleich sind

$$(72, a.)\quad 0 = 2\varkappa_4 - 12\mu_2(Y_2' + Y_1') - 4(Y_2'Y_2' + Y_2'Y_1' + Y_1'Y_1')$$

und diese Gleichung mit resp. Y_1' und Y_2' multiplicirt und von den vorhergehenden abgezogen, giebt:

$$(72, b.)\quad \begin{cases} Y_1''Y_1'' = 4k + 12\mu_2 Y_1'Y_2' + 4Y_1'Y_2'(Y_2' + Y_1'), \\ Y_2''Y_2'' = 4k + 12\mu_2 Y_1'Y_2' + 4Y_1'Y_2'(Y_2' + Y_1'). \end{cases}$$

Wendet man diese Gleichungen zur Elimination von $Y_1'' Y_1''$ aus C_{a_1} an, so erhält man:

$$C_{a_1} = 4Y_2'Y_1'Y_2' + \varkappa_4 Y_2' + \tfrac{1}{3}\varkappa_4 Y_1' + 4k,$$

und eben so:

$$C_{a_2} = 4Y_2'Y_1'Y_1' + \varkappa_4 Y_1' + \tfrac{1}{3}\varkappa_4 Y_2' + 4k.$$

Multiplicirt man diese Ausdrücke mit resp. $A_2^{(h)} = \frac{1}{8}(B - AY_2')$ und $A_1^{(h)} = \frac{1}{8}(B - AY_1')$, so kann man nach der Subtraction den Factor $Y_2' - Y_1'$ vorziehen, und findet:

$$A_2^{(h)} C_{a_1} - A_1^{(h)} C_{a_2}$$
$$= \tfrac{1}{8}(Y_2' - Y_1').\{B(4Y_2'Y_1' + \tfrac{2}{3}\varkappa_4) - A(4Y_2'Y_1'(Y_2' + Y_1') + \varkappa_4(Y_2' + Y_1') + 4k)\}.$$

Hierzu

$$C_p.4P^{(h)} = \tfrac{1}{8}(Y_2' - Y_1')\{4C(Y_2' + Y_1') - 4B(Y_2' + Y_1')^2 + 4AY_1'Y_1'(Y_2' + Y_1')\}$$

addirt, giebt:

$$C_h = \tfrac{1}{8}(Y_2' - Y_1')\{4C.(Y_2' + Y_1') - 4B(Y_2'Y_2' + Y_2'Y_1' + Y_1'Y_1' - \tfrac{1}{6}\varkappa_4) - A(\varkappa_4(Y_2' + Y_1') + 4k)\},$$

oder, da der Coëfficient von B, wegen (72, *a.*), auf $12\mu_2(Y_2' + Y_1') - \frac{1}{3}\varkappa_4$ sich reducirt:

$$C_h = \tfrac{1}{8}(Y_2' - Y_1')\{(Y_2' + Y_1')(4C + 12\mu_2 B - \varkappa_4 A) - 4(\tfrac{1}{3}\varkappa_4 B + kA)\}.$$

Mit Benutzung endlich der leicht zu verificirenden Relationen zwischen den Gröfsen A, B, C, nämlich,

$$6C + 12\mu_2 B - \varkappa_4 A = 0,$$
$$\mu_2 C - \tfrac{1}{3}\varkappa_4 B - kA = 0,$$

ergiebt sich der einfache Ausdruck:

(73.)
$$\begin{cases} C_h = -\frac{1}{4}(Y_2' - Y_1')(Y_2' + Y_1' + 2\mu_2).C. \\ \text{Auf ganz ähnlichem Wege findet man für } C_l\text{:} \\ C_l = -\frac{1}{2}(Y_2' - Y_1')(Y_2' + Y_1' + 2\mu_2).C' - \frac{1}{3}(Y_2' - Y_1'). \end{cases}$$

Mittels der Gleichungen (71. und 73.) gehen nun die Gleichungen (64.) für U_l und U_h in folgende über (in denen zugleich $r^2\lambda^2 m$ durch $4\sqrt{(gr^3)}.(Y_2' - Y_1')^{-\frac{5}{2}}$ ersetzt ist):

(74.)
$$\begin{cases} U_l^{(x,y)} = \frac{1}{12}\{A'Q_\varepsilon^{(4)} - 4B'(Q^{(3)} + \frac{1}{4}uQ^{(4)}) + 6(Y_2' + Y_1' + 2\mu_2)C' + 4\}, \\ U_h^{(x,y)} = \frac{1}{24}\sqrt{\left(\frac{r}{g}\right)}\cdot\frac{iY_2''}{\sqrt{(Y_2' - Y_1')}}\{AQ_\varepsilon^{(4)} - 4B(Q^{(3)} + \frac{1}{4}uQ^{(4)}) + 6(Y_2' + Y_1' + 2\mu_2)C\}, \\ U_l^{(x,z)} = \pm\frac{1}{12}\{A'R_\varepsilon^{(4)} - 4B'(R^{(3)} + \frac{1}{4}uR^{(4)})\}, \\ U_h^{(x,z)} = \pm\frac{1}{24}\sqrt{\left(\frac{r}{g}\right)}\cdot\frac{iY_2''}{\sqrt{(Y_2' - Y_1')}}\cdot\{AR_\varepsilon^{(4)} - 4B(R^{(3)} + \frac{1}{4}uR^{(4)})\}, \end{cases}$$

Da U_{φ_0} schon in den Gleichungen (58. und 59.) in der einfachsten Form gegeben ist, so sind hiermit jetzt die nöthigen Umformungen für die Seiten rechts der Störungsgleichungen (6.) geschehen und man erhält aus diesen Gleichungen, mit Rücksicht auf (58, 59, 74.), die folgenden:

$$(75.)\quad \begin{cases} \frac{dl}{dt} = -\frac{2}{3} n \sqrt{(gr^3)} . (Y_2' - Y_1')^{-\frac{5}{2}} . [\sin\beta . Q^{(4)} \pm \cos\beta . R^{(4)}], \\ \frac{dt_0}{dt} = -1\tfrac{1}{2} n \sqrt{\left(\frac{r}{g}\right)} . \frac{iY_1''}{\sqrt{(Y_2' - Y_1')}} \cdot [\sin\beta . \{AQ_\varepsilon^{(4)} - 4B(Q^{(3)} + \tfrac{1}{4} uQ^{(4)}) \\ \qquad + 6(Y_2' + Y_1' + 2\mu_2) C\} \pm \cos\beta \{AR_\varepsilon^{(4)} - 4B(R^{(3)} + \tfrac{1}{4} uR^{(4)})\}], \\ \frac{d\varphi_0}{dt} = -\frac{1}{6} n . [\sin\beta . \{A' Q_\varepsilon^{(4)} - 4B'(Q^{(3)} + \tfrac{1}{4} uQ^{(4)}) \\ \qquad + 6(Y_2' + Y_1' + 2\mu_2) C' + 4\} \pm \cos\beta \{A' R_\varepsilon^{(4)} - 4B'(R^{(3)} + \tfrac{1}{4} uR^{(4)})\}], \end{cases}$$

in welchen alle Glieder rechts nicht nur als explicite Functionen der Zeit und der Constanten ausgedrückt, sondern auch in Reihen, die nach Sinus und Cosinus der Vielfachen der *Zeit* fortschreiten, entwickelt sind. Dadurch ist, wenn man sich auf die erste Annäherung beschränkt, das Problem absolvirt, indem man durch die Integration, ohne irgend weitere Reductionen, die Incremente von l, t_0 und φ_0 als Functionen der *Zeit* findet. Man sieht aufserdem leicht, dafs sich diese Integration für alle Glieder, mit Ausnahme der in $R_\varepsilon^{(4)}$ und $R^{(4)}$ vorkommenden R und $\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}$, in endlicher Form ausführen läfst.

Die Bedeutung der Gröfsen Q, R, $\frac{\partial Q}{\partial \varepsilon}$, $\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}$ ist nach ihrer Herleitung:

$$Q = \operatorname{Lim.}\left(P(u,v) - \frac{\frac{\pi}{2K}}{\sin\frac{\pi v}{2K}} \right)_{v=0} = Zu,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \varepsilon} = \operatorname{Lim.} \frac{\partial}{\partial v}\left(P(u,v) - \frac{\frac{\pi}{2K}}{\sin\frac{\pi}{2K}} \right)_{v=0} = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{\Theta'' u}{\Theta u} + \tfrac{1}{2}\mu_2 - \left(\frac{\pi}{2K}\right)^2,$$

$$R = \frac{1}{2i} \{e^{i\psi} . P(u_1 K + ia_1 + ia_2) - e^{-i\psi} P(u_1 K - ia_1 - ia_2)\},$$

$$\frac{\partial R}{\partial \varepsilon} = -\tfrac{1}{2} \cdot \left\{ e^{i\psi} \frac{\partial P(u_1 K + ia_1 + ia_2)}{\partial a_1} + e^{-i\psi} \frac{\partial P(u_1 K + ia_1 + ia_2)}{\partial a_1} \right\},$$

und die entsprechenden Reihen-Entwickelungen sind

$$(76.)\quad \begin{cases} Q = \frac{\pi}{2K}\cdot\sum_1^{\infty h}\frac{4q^h}{1-q^{2h}}\sin 2hx, \\ \frac{\partial Q}{\partial\varepsilon} = \left(\frac{\pi}{2K}\right)^2\cdot\sum_1^{\infty h}\frac{4q^h(1+q^{2h})}{(1-q^{2h})^2}\cos 2hx, \\ R = \left(\frac{\pi}{2K}\right)\cdot\sum_{-\infty}^{+\infty h}\frac{2q^{h+\frac{1}{2}\sigma}}{1+q^{2h+\sigma}}\sin((2h+f)x+\varphi_0), \\ \frac{\partial R}{\partial\varepsilon} = \left(\frac{\pi}{2K}\right)^2\cdot\sum_{-\infty}^{+\infty h}\frac{2q^{h+\frac{1}{2}\sigma}(1-q^{2h+\sigma})}{(1+q^{2h+\sigma})^2}\cos((2h+f)x+\varphi_0). \end{cases}$$

Die Ableitung der *complementären* Reihen, in welchen q' an die Stelle von q tritt, ist für den Gebrauch, der hier von den gefundenen Resultaten zur Entwickelung einiger specieller Fälle gemacht werden wird, unnöthig. Bevor ich aber zu dieser Anwendung übergehe, ist noch eine allgemeine Bemerkung zu machen.

VIII.

Da die in den ***Sinus*** der ***Breite*** multiplicirten Glieder auch für die ***Pole*** gelten müssen, während die in den ***Cosinus*** multiplicirten hier wegfallen; und da für die Pole keine eigentliche, sondern nur eine scheinbare Störung, als Folge der gleichförmigen Drehung des Axensystems der Coordinaten y und x und der dadurch entstehenden Modificirung des Anfangsstofses, Statt findet: so müssen die erstgenannten Glieder sich sowohl aus den Formeln des ungestörten Raumpendels ableiten, als auch die ursprünglichen, nach ***Poisson*** gegebenen Differentialgleichungen ***endlich*** sich integriren lassen.

In der That erhält man für $\beta = \frac{1}{2}\pi$ aus den Differentialgleichungen

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -2n\frac{dy}{dt}+\lambda\frac{x}{r},$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = +2n\frac{dx}{dt}+\lambda\frac{y}{r},$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} = \lambda\frac{z}{r}+g$$

durch Multiplication mit 1) resp. $2dx$, $2dy$, $2dz$, 2) $+y$, $-x$, 0 und durch Integration der jedesmaligen Summe:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = 2gz+C,$$
$$y\frac{dx}{dt}-x\frac{dy}{dt} = nz^2+E,$$

und hieraus durch Elimination von dx und dy, mit Hülfe der Gleichung

$x dx + y dy + z dz = 0$:

$$r^2\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = (r^2 - z^2)(2gz + C) - (nz^2 + E)^2,$$

also für t wiederum ein *elliptisches* Integral in z, aber mit einem Ausdruck vom 4ten statt vom 3ten Grade unter dem Radical. Die Wurzeln desselben sind ebenfalls reell, und drei von ihnen fallen, bis auf Gröfsen von der Ordnung n, mit ra, rb, rc zusammen, während eine vierte, negative, in der Nähe von $-\frac{g}{nn}$ liegt. Nachdem z als Function der *Zeit* bekannt ist, findet man den Winkel φ durch die Formel

$$d\varphi = \left\{\frac{E + nz^2}{r^2 - z^2}\right\} dt;$$

so dafs also auch φ von *elliptischen* Integralen abhangt.

Auf diesem Wege gelangt man zu Ausdrücken für die Coordinaten als Functionen der *Zeit*, die, bis auf Glieder erster Ordnung entwickelt, mit den aus (75.) für die Variationen der Coordinaten sich ergebenden Ausdrücken übereinstimmen müssen. Indessen giebt es auch einen Weg, auf welchem man die in den Sinus multiplicirten Glieder der Gleichungen (75.) selbst, leichter finden kann. Führt man nämlich in die Gleichungen (6, *a.*) statt der Coordinaten x, y, z die Variabeln φ und z ein, so ergiebt sich:

$$U_i^{(x,y)} = z\left(\frac{\partial z}{\partial t}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial i} - \frac{\partial z}{\partial i}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right),$$

$$U_i^{(x,z)} = -y\left(\frac{\partial z}{\partial t}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial i} - \frac{\partial z}{\partial i}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right),$$

so dafs also in den Gröfsen $U^{(x,y)}$ die Coordinaten x, y nicht mehr vorkommen. Durch partielle Integration ergiebt sich:

$$U_i^{(x,y)} = \tfrac{1}{2}\frac{\partial}{\partial i}\left((r^2 - z^2)\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) - \tfrac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left((r^2 - z^2)\frac{\partial \varphi}{\partial i}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}\frac{\partial l}{\partial i} - \tfrac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left((r^2 - z^2)\frac{\partial \varphi}{\partial i}\right);$$

mithin sind die ersten Glieder der Gleichungen (6, *b.*):

$$\frac{dh}{dt} = +n\sin\beta\cdot\frac{\partial\left((r^2 - z^2)\frac{\partial \varphi}{\partial t_0}\right)}{\partial t},$$

$$\frac{dl}{dt} = -n\sin\beta\cdot\frac{\partial\left((r^2 - z^2)\frac{\partial \varphi}{\partial \varphi_0}\right)}{\partial t},$$

$$\frac{dt_0}{dt} = -n\sin\beta\cdot\frac{\partial\left((r^2-z^2)\frac{\partial\varphi}{\partial h}\right)}{\partial t},$$

$$\frac{d\varphi_0}{dt} = +n\sin\beta\cdot\frac{\partial\left((r^2-z^2)\frac{\partial\varphi}{\partial l}\right)}{\partial t} - n\sin\beta.$$

Die erste Gleichung giebt, da $(r^2-z^2)\frac{\partial\varphi}{\partial t_0} = (r^2-z^2)\frac{\partial\varphi}{\partial t} = l$ die *Zeit* nicht enthält:

$$\frac{dh}{dt} = 0,$$

wie früher gefunden wurde; die zweite, in welcher $\frac{\partial\varphi}{\partial\varphi_0} = 1$ ist, giebt

$$\frac{dl}{dt} = n\sin\beta\cdot\frac{d(z^2)}{dt};$$

wie man Dies ebenfalls aus dem ursprünglichen Ausdrucke für $U^{(x,y)}_{\varphi_0}$:

$$U^{(x,y)}_{\varphi_0} = \frac{\partial y}{\partial\varphi_0}\cdot\frac{dx}{dt} - \frac{\partial x}{\partial\varphi_0}\cdot\frac{dy}{dt}$$

hätte finden können, wenn man darin nur für $\frac{\partial y}{\partial\varphi_0}$ und $\frac{\partial x}{\partial\varphi_0}$ resp. $-x$ und y substituirte.

Um die partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial\varphi}{\partial h}$ und $\frac{\partial\varphi}{\partial l}$ zu finden, kann man sowohl von dem Integral

$$\varphi = \varphi_0 \mp \int_a^{\frac{z}{r}} \left\{\sqrt{\left(\frac{(1-a)(1-b)(1-c)}{(a-x)(x-b)(x-c)}\right)}\cdot\frac{\frac{1}{2}dx}{1-xx} + \sqrt{\left(\frac{-(1+a)(1+b)(1+c)}{(a-x)(x-b)(x-c)}\right)}\cdot\frac{\frac{1}{2}dx}{1+x}\right\},$$

als von der Formel

$$\varphi = \varphi_0 + m(t-t_0)\Phi + \frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u+K+ia_1)\,\Theta(u+ia_2)}{\Theta(u+K-ia_1)\,\Theta(u-ia_2)}$$

ausgehen. Das erste Integral ist leicht unter dem Integralzeichen nach a, b, c zu differentiiren, und dann aus den Gröfsen $\frac{\partial\varphi}{\partial a}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial b}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial c}$ mittels der bekannten $\frac{\partial a}{\partial h}$, $\frac{\partial a}{\partial l}$, etc. $\frac{\partial\varphi}{\partial l}$ und $\frac{\partial\varphi}{\partial h}$ abzuleiten. Dies ist der kürzeste Weg um die ersten Glieder der Variationen zu finden. Die angegebene Formel für φ läfst sich ohne Schwierigkeit insbesondere zur Bestimmung der Constanten C_{a_1}, C_{a_2} etc. anwenden, indem man zu diesem Ende nur die Glieder zu berücksichtigen braucht, welche nach den Differentiationen den Factor u haben.

Vor dieser Methode, die sich nicht auf die in den Cosinus der ***Breite*** multiplicirten Störungsglieder ausdehnen läfst, hat die hier gewählte den Vorzug, dafs sie sich anwenden läfst, so oft die störenden Kräfte, nach den Axen x, y, z zerlegt, ganze rationale Functionen der Coordinaten und der Geschwindigkeiten sind.

Ich gehe jetzt zu der Entwickelung der wichtigsten speciellen Fälle des Problems über; nämlich zuerst des ebenen Pendels, dann eines sphärischen mit sehr kleinen Excursionen. Bis auf Gröfsen von der niedrigsten Ordnung ist diese letztere Untersuchung von mehreren Mathematikern gemacht, zuerst von ***Binet*** (Comptes rendus 10 Févr. 1851) unmittelbar nach der Entdeckung ***Foucaults.*** Man ist dadurch zu der Kenntnifs des Sinusgesetzes gelangt, welches, wenn man die Bewegung des Pendels unter dem ***Aequator*** als ungestört annimmt, in der That ein rein geometrisches Phänomen ist. Aber für den Aequator verliert dies Gesetz selbstverständlich ganz und gar seine Geltung, und es ist die eigentliche Aufgabe der Analyse, den zweiten Theil der Störung, welcher hier sein Maximum hat, zu finden.

IX.

Anwendung auf das ebene Pendel mit beliebiger Amplitude.

Bei der Bewegung des Pendels in einer ***senkrechten Ebene*** ist die Constante des Flächensatzes $l = 0$. Um keine Glieder von der Ordnung der störenden Kräfte zu vernachlässigen, nehme man l als eine Gröfse von dieser Ordnung an. Die cubische Gleichung:

$$2(gz+h)(r^2-z^2)-l^2 = 0$$

giebt dann, nach Vernachlässigung der höhern Potenzen von l, die Wurzeln:

$$(77.)\quad \begin{cases} \left\{1-\dfrac{l^2}{4r^2(h+gr)}\right\}\cdot r, \\ -\left\{\dfrac{h}{gr}+\dfrac{l^2 g}{r(h^2-g^2r^2)}\right\}\cdot r, \\ -\left\{1+\dfrac{l^2}{4r^2(h-gr)}\right\}\cdot r, \end{cases}$$

welche der Reihe nach mit ra, rb, rc zu bezeichnen sind, wenn $h-gr<0$, also die dritte Wurzel kleiner als $-r$ ist. Dies ist der Fall des ***hin und her schwingenden Pendels,*** welcher hier zuerst betrachtet werden soll.

Bis auf Gröfsen von der Ordnung l^2 ist dann:

$$z^2 = \frac{a-b}{a-c} = \frac{gr+h}{2gr}.$$

Drückt man hieraus h durch $\varkappa^2$ aus, so erhält man für die Wurzeln die Formeln:

$$(78.)\quad \begin{cases} a = +1-\frac{1}{\varkappa^2}\cdot\frac{l^2}{8gr^3}, \\ b = 1-2\varkappa^2, \\ c = -1-\frac{1}{\varkappa'^2}\cdot\frac{l^2}{8gr^3}. \end{cases}$$

Daraus folgt, dafs, bis auf Gröfsen erster Ordnung, $a_1 = 0$ und $a_2 = \mp K'$ ist, während $\varkappa^2$ oder p bis auf Glieder von der zweiten Ordnung constant bleiben; und zwar findet man:

$$a_1 = \frac{1}{4\varkappa'^2}\cdot\frac{l}{\sqrt{(gr^3)}} = \delta a_1,$$

$$a_2 = \mp K' - \frac{1}{4\varkappa^2}\cdot\frac{l}{\sqrt{(gr^3)}} = \mp K' + \delta a_2.$$

Ferner wird

$$\Phi = \mp\frac{\pi}{2K} - Y_1'.\delta a_1 - Y_2'.\delta a_2,$$

also erhält man, da bis auf Gröfsen von der zweiten Ordnung

$$Y_1' = Z'0 - \frac{1+a}{a-c} = Z'0 - 1,$$

$$Y_2' = Z'0 - \frac{1-a}{a-c} = Z'0$$

ist:

$$\Phi = \mp\frac{\pi}{2K} + \frac{l}{\sqrt{(gr^3)}}\cdot\frac{1}{4\varkappa^2\varkappa'^2}\cdot\{\varkappa'^2 Z'0 - \varkappa^2.(Z'0-1)\},$$

oder, wenn man zur Abkürzung

$$\mu = \varkappa'^2 Z'0 - \varkappa^2(Z'0-1) = \varkappa^2 + (\varkappa'^2 - \varkappa^2)Z'0$$

setzt:

$$\Phi = \mp\frac{\pi}{2K} + \frac{\mu}{4\varkappa^2\varkappa'^2}\cdot\frac{l}{\sqrt{(gr^3)}}.$$

Um die Formeln für die Coordinaten zu finden, hat man ferner:

$$P(u, K + ia_1 + ia_2) = P\Big(u, K \mp iK' - \frac{\varkappa'^2-\varkappa^2}{4\varkappa^2\varkappa'^2}\cdot\frac{l}{\sqrt{(gr^3)}}\cdot i\Big),$$

oder, da nach ***Jacobi's*** (Fundd. §. 61.)

$$\Theta(u \mp iK') = \pm iq^{-\frac{1}{4}} e^{\pm\frac{\pi i u}{2K}}.Hu,$$

$$H(u \mp iK') = \pm iq^{-\frac{1}{4}} e^{\pm\frac{\pi i u}{2K}}.\Theta u$$

ist,

$$P(u, K+ia_1+ia_2) = e^{\pm\frac{\pi iu}{2K}}\cdot\frac{H\left(u+K-i\cdot\frac{x'^2-x^2}{4x^2x'^2}\cdot\frac{l}{\sqrt{(gr^3)}}\right)H'0}{\Theta u.\Theta\left(K-i\cdot\frac{x'^2-x^2}{4x^2x'^2}\cdot\frac{l}{\sqrt{(gr^3)}}\right)},$$

folglich durch Entwickelung bis auf die ersten Potenzen von l:

$$P(u, K+ia_1+ia_2) = e^{\pm\frac{\pi iu}{2K}}\cdot\left\{\frac{H(u+K)H'0}{\Theta u\Theta K} - i\cdot\frac{x'^2-x^2}{4x^2x'^2}\cdot\frac{l}{\sqrt{(gr^3)}}\cdot\frac{H'(u+K)H'0}{\Theta u\Theta K}\right\},$$

und wegen des obigen Werthes von Φ:

$$e^{i\psi}.P(u, K+ia_1+ia_2)$$
$$= e^{i\left(\varphi_0+\frac{\mu}{4x^2x'^2}\cdot\frac{l}{\sqrt{(gr^3)}}u\right)}\cdot\left\{\frac{H(u+K)H'0}{\Theta u\Theta K} - i\frac{x'^2-x^2}{4x^2x'^2}\cdot\frac{l}{\sqrt{(gr^3)}}\cdot\frac{H'(u+K)H'0}{\Theta u\Theta K}\right\}.$$

Bezeichnet man das Azimuth der Pendel-Ebene, von Nord nach West gerechnet, durch α, so kann man

$$(79.)\qquad \varphi_0+\frac{\mu}{4x^2x'^2}\cdot\frac{l}{\sqrt{(gr^3)}}\cdot u = \alpha\pm\tfrac{1}{2}\pi$$

setzen. Sondert man dann in $e^{i\psi}.P$ den reellen vom imaginären Theil, so ergiebt sich:

$$S = \mp\sin\alpha\cdot\frac{H(u+K)H'0}{\Theta u\Theta K}\pm\cos\alpha\cdot\frac{x'^2-x^2}{4x^2x'^2}\cdot\frac{l}{\sqrt{(gr^3)}}\cdot\frac{H'(u+K)H'0}{\Theta u\Theta K},$$

$$R = \pm\cos\alpha\cdot\frac{H(u+K)H'0}{\Theta u\Theta K}\pm\sin\alpha\cdot\frac{x'^2-x^2}{4x^2x'^2}\cdot\frac{l}{\sqrt{(gr^3)}}\cdot\frac{H'(u+K)H'0}{\Theta u\Theta K}.$$

Man kann hier auch, wie leicht zu sehen, für H und Θ elliptische Functionen und Zu einführen, indem

$$\frac{H(u+K)H'0}{\Theta u\Theta K} = x\,\mathrm{cn}\,u,$$
$$\frac{H'(u+K)H'0}{\Theta u\Theta K} = x(Zu\,\mathrm{cn}\,u - \mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,u)$$

ist. Durch Differentiation nach u erhält man dann nach $(31, a)$, (wo für λ $a-c=2$ zu setzen ist):

$$(80.)\quad\begin{cases} x = 2rx\left\{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,u.\sin\alpha\right. \\ \qquad \left.-\frac{1}{4x^2x'^2}\cdot\frac{l}{\sqrt{(gr^3)}}\cdot(x^2\,\mathrm{cn}\,u+(x'^2-x^2)\,\mathrm{dn}\,u(Zu\,\mathrm{sn}\,u+\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u))\cos\alpha\right\}, \\ y = 2rx\left\{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,u.\cos\alpha\right. \\ \qquad \left.+\frac{1}{4x^2x'^2}\cdot\frac{l}{\sqrt{(gr^3)}}\cdot(x^2\,\mathrm{cn}\,u+(x'^2-x^2)\,\mathrm{dn}\,u(Zu\,\mathrm{sn}\,u+\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u))\sin\alpha\right\}, \\ \text{während } z \text{ bis auf Gröfsen von der ersten Ordnung einschliefslich durch} \\ z = r(1-2x^2\,\mathrm{sn}^2\,u) \end{cases}$$

gegeben ist. Die ersten Glieder dieser Gleichungen sind die gewöhnlichen Formeln des ***hin- und herschwingenden ebenen Pendels;*** die mit t multiplicirten drücken die Abweichung von der Ebene aus.

Mittels der Gleichungen (75.) lassen sich nun folgende drei Fragen ohne Schwierigkeit beantworten; die erste nach dieser ***Abweichung,*** die zweite nach der ***Schwingungsdauer,*** die dritte nach der ***Drehung der Pendel-Ebene.***

Für die erste Frage giebt die erste der Gleichungen (75.), nach Substitution der Werthe von Y_1' und Y_2' in $Q^{(4)}$ und $R^{(4)}$, da $Q = Zu$ und $R = \pm \varkappa \operatorname{cn} u \cos\alpha$ zu setzen ist:

$$\frac{dl}{dt} = -\tfrac{1}{3}\sqrt{(gr^3)}.2n\,(\sin\beta.\{Z^{IV}u - 2(\varkappa'^2-\varkappa^2)Z''u\} + \cos\beta\cos\alpha\{\varkappa\operatorname{cn}^{IV}u - 2(\varkappa'^2-\varkappa^2)\varkappa\operatorname{cn}''u - 3\varkappa\operatorname{cn}u\}).$$

Da $\varkappa \operatorname{cn} u\,.\,du$ sich ***endlich*** integriren läfst, so ist es nicht nöthig, auf die Reihen-Entwickelungen zurückzugehen. Integrirt man zwischen zwei beliebigen Grenzen $t = t'$ und $t = t''$ und deutet durch

$$[fu]_{t'}^{t''},$$

die Differenz der Werthe der Function fu für die oben und unten anzugebenden Argumente an, so erhält man

$$[l]_{t'}^{t''} = -\tfrac{1}{3}\sqrt{(gr^3)}\cdot\frac{1}{m}\cdot 2n\,(\sin\beta[Z'''u - 2(\varkappa'^2-\varkappa^2)Z'u]_{t'}^{t''} + \cos\beta\cos\alpha[\varkappa\operatorname{cn}'''u - 2(\varkappa'^2-\varkappa^2)\varkappa\operatorname{cn}'u - 3\arcsin(\varkappa\operatorname{sn}u)]_{t'}^{t''}),$$

oder, da die Ausführung der Differentiationen

$$Z'''u - 2(\varkappa'^2-\varkappa^2)Z'u = -2\mu + 6\varkappa^2\operatorname{sn}^2u\operatorname{dn}^2u,$$
$$\varkappa\operatorname{cn}'''u - 2(\varkappa'^2-\varkappa^2)\varkappa\operatorname{cn}'u = 3\varkappa\operatorname{sn}u\operatorname{dn}u(1-2\varkappa^2\operatorname{sn}^2u)$$

giebt und für $\frac{1}{m}$, $\sqrt{\frac{r}{g}}$ zu setzen ist:

(81.) $$[l]_{t'}^{t''} = -2nr^2.\{\sin\beta.[2\varkappa^2\operatorname{sn}^2u\operatorname{dn}^2u]_{t'}^{t''} + \cos\beta\cos\alpha[\varkappa\operatorname{sn}u\operatorname{dn}u(1-2\varkappa^2\operatorname{sn}^2u) - \arcsin(\varkappa\operatorname{sn}u)]_{t'}^{t''}\}.$$

Diese Formel, welche übrigens lehrt, dafs l nach Verlauf einer ganzen Schwingung dieselben Werthe annimmt, beantwortet die Frage, wie weit das Pendel, wenn es in abgelenkter Lage der Wirkung der Schwere allein überlassen worden ist, in dem tiefsten Puncte seiner Bahn von dem Lothpuncte abweicht.

Bezeichnet man den Werth von l für $u = 0$, K, $2K$, etc. durch resp. l_0, l_1, l_2, so giebt die Formel:

(82, *a*.) $$l_2 - l_1 = +2nr^2\{\sin\beta.2\varkappa^2\varkappa'^2 + \cos\beta\cos\alpha(\varkappa\varkappa'(1-2\varkappa^2) - \arcsin\varkappa)\}$$

oder, wenn man die Amplitude des Pendels durch ϑ bezeichnet, also $\varkappa = \sin\frac{1}{2}\vartheta$ setzt:

$$(82, b.) \qquad l_2 - l_1 = nr^2.\{\sin\beta\sin^2\vartheta - \cos\beta\cos\alpha(\vartheta - \sin\vartheta\cos\vartheta)\}.$$

In dem angenommenen Fall ist offenbar $l_1 = 0$, mithin giebt die Seite rechts den Werth von l_2 an. Aus den Gleichungen (80.) folgt aber für $u = 2K$:

$$x = \frac{1}{2\varkappa}\cdot\frac{l_2}{\sqrt{(gr^3)}}\cdot r\cos\alpha,$$

$$y = -\frac{1}{2\varkappa}\cdot\frac{l_2}{\sqrt{(gr^3)}}\cdot r\sin\alpha,$$

also ist die Gröfse der gesuchten Abweichung durch $\frac{1}{2\varkappa}\cdot\frac{l_2}{\sqrt{(gr^3)}}$ und ihre Richtung durch das Azimuth $\alpha + \frac{1}{2}\pi$ ausgedrückt.

Entfernt man demnach ein Pendel um einen Winkel ϑ aus seiner Ruhelage nach dem Azimuth α und überläfst es alsdann ohne Anfangs-Impuls der Wirkung der Schwere, so geht sein Endpunct an dem Lothpuncte in der Entfernung

$$nr\sqrt{\left(\frac{r}{g}\right)}\cdot\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}\vartheta}\{\sin\beta\sin^2\vartheta - \cos\beta\cos\alpha(\vartheta - \sin\vartheta\cos\vartheta)\}$$

und in der Richtung des Azimuths um $\alpha + \frac{1}{2}\pi$ vorbei.

Für eine bestimmte Amplitude erreicht die Abweichung ihr Maximum für $\alpha = \pi$, wenn $\beta > 0$, für $\alpha = 0$, wenn $\beta < 0$, d. h. beidemal für die Schwingungsrichtung im Meridian vom Aequator nach den Polen zu.

Für $u = 3K$ und $u = K$ folgt aus der Gleichung (81.):

$$l_3 - l_1 = 4nr^2.\cos\beta\cos\alpha.\{\varkappa\varkappa'(1 - 2\varkappa^2) - \arcsin k\}$$
$$= -2nr^2.\cos\beta\cos\alpha.(\vartheta - \sin\vartheta\cos\vartheta).$$

Mithin sind die beiden Enden der Bahn des Pendels durchaus nicht gleich gestaltet, und man mufs die Elongationspuncte $u = K$, $5K$, $9K$, etc. von denen $u = 3K$, $7K$, etc. wohl unterscheiden. Die ersten werde ich die ***geraden***, die andern die ***ungeraden*** Elongationen nennen, wenn die Bewegung von $u = K$ beginnt. Dagegen findet sich ebenfalls aus (81.):

$$l_2 - l_0 = l_4 - l_2 = 0,$$

d. h. die kleinste Entfernung von der Verticalen ist beim Hin- und Hergange des Pendels dieselbe.

Die zweite Frage nach der ***Schwingungsdauer*** erledigt sich durch den blofsen Anblick der zweiten der Gleichungen (75.), die, wegen des

Factors Y_1'' oder l, $t_0 =$ Const. giebt; denn aus dieser Gleichung, in Verbindung mit der Gleichung $z =$ Const. folgt unmittelbar die Constanz der Schwingungsdauer; übereinstimmend mit der Bemerkung ***Poissons*** a. a. O.

Um endlich die ***Drehung der Schwingungs-Ebene*** zu finden, deren Azimuth, wenn man nur die Elongationspuncte beobachtet, durch die aus (79.) nach Substitution von l_1 für l entstehende Gleichung

$$\alpha = \varphi_0 + \frac{\mu}{4z^2z'^2}\cdot\frac{l_1}{\sqrt{(gr^3)}}\cdot u \mp \tfrac{1}{2}\pi$$

gegeben ist, differentiire man diese nach der ***Zeit,*** nämlich

$$(83.)\qquad \frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\varphi_0}{dt} + \frac{\mu}{4z^2z'^2}\cdot\frac{l_1}{r^2},$$

und behalte in dem Ausdrucke für $\frac{d\varphi_0}{dt}$ aus (75.) nur die nicht periodischen Glieder, also die Constanten und die in die Zeit multiplicirten bei. Man setze also

$$(84.)\quad \frac{d\varphi_0}{dt} = \tfrac{1}{6}n.\{\sin\beta.(B'.uQ^{(4)} - 6(Y_1' + Y_2' + 2\mu_2)C' - 4) \pm \cos\beta.B'.uR^{(4)}\}.$$

Hier kann man, da es nur auf die Werthe von φ_0 für $u = K,\ 5K,\ 9K,$ etc. ankommt, $uQ^{(4)}$ und $uR^{(4)}$ durch resp.

$$\frac{1}{4K}\int_K^{5K} uQ^{(4)}\,du \quad\text{und}\quad \frac{1}{4K}\int_K^{5K} uR^{(4)}\,du$$

ersetzen. Es ist aber, wenn man durch angehängte Indices $Q_1,\ Q_1',\ Q_1'',\ \ldots$ $R_1,\ R_1',\ \ldots$ die Werthe der Functionen $Q,\ Q',\ Q'',\ \ldots\ R,\ R',\ \ldots$ für $u = K$, also auch für $u = 5K$ bezeichnet:

$$\frac{1}{4K}\int_K^{5K} uQ^{(4)}\,du = Q_1''' + 6(Y_2' + Y_1' + 2\mu_2)Q_1',$$

$$\frac{1}{4K}\int_K^{5K} uR^{(4)}\,du = R_1''' + 6(Y_2' + Y_1' + 2\mu_2)R_1' - 3(Y_2' - Y_1')^2.\int^K R\,du,$$

wo $\int^K R\,du$ den Werth der periodischen Glieder des unbestimmten Integrals für $u = K$ bezeichnen soll. Substituirt man also für Q und R resp. Zu und $\pm z\,\mathrm{cn}\,u.\cos\alpha$, so erhält man:

$$\frac{1}{4K}\int_K^{5K} uQ^{(4)}\,du = -2\mu + 6z^2z'^2,$$

$$\frac{1}{4K}\int_K^{5K} uR^{(4)}\,du = \pm(3zz'(1-2z^2) - \arcsin z)\cos\alpha,$$

und wenn man Dies in (84.) substituirt, mit Rücksicht auf (82, *a.*):

$$\frac{d\varphi_0}{dt} = \tfrac{1}{6} n \left\{ \frac{3(l_2 - l_1)}{2nr^2} \cdot B' - \sin\beta\,(2\mu B' - 2(\varkappa'^2 - \varkappa^2) C' + 4) \right\}.$$

Aus den Formeln (68.) folgt aber, wenn man für a, b, c nach (78.) resp. $+1$, $1-2\varkappa^2$ und -1 setzt:

$$B' = \frac{1}{\varkappa^2 \varkappa'^2} \cdot \{\varkappa'^2 Z'0 - \varkappa^2 Z'(K + iK')\} = \frac{1}{\varkappa^2 \varkappa'^2} \cdot \mu,$$

$$C'' = \frac{1}{\varkappa^2 \varkappa'^2} \cdot \{\varkappa'^2 Z'0^2 - \varkappa^2 Z'(K + iK')^2\} = \frac{1}{\varkappa^2 \varkappa'^2} \cdot \frac{\mu^2 - \varkappa^2 \varkappa'^2}{\varkappa'^2 - \varkappa^2}.$$

Daher wird einfach:

$$\frac{d\varphi_0}{dt} = -n \cdot \left\{ \sin\beta - \frac{\mu}{4\varkappa^2 \varkappa'^2} \cdot \frac{l_2 - l_1}{nr^2} \right\},$$

und nach (83.):

$$(85.) \qquad \frac{d\alpha}{dt} = -n \sin\beta + \frac{\mu}{4\varkappa^2 \varkappa'^2} \cdot \frac{l_2}{r^2}.$$

Hiernach sind zwei Hauptfälle zu unterscheiden. Wird erstlich das Pendel durch einen momentanen Stofs aus der Ruhelage entfernt, so ist $l_2 = 0$, mithin:

$$(86.) \qquad \frac{d\alpha}{dt} = -n \sin\beta,$$

d. h. die Schwingungs-Ebene dreht sich mit gleichförmiger, dem Sinus der Breite proportionaler Geschwindigkeit im Sinne der täglichen Drehung des Himmels.

Die Ebene bleibt ungeändert im *Aequator*, obgleich das Pendel auch hier in einer Curve doppelter Krümmung schwingt.

Wird zweitens das Pendel in abgelenkter Lage ohne Anfangsstofs der Schwere überlassen, so ist $l_1 = 0$, mithin nach (82.)

$$l_2 = nr^2 \{\sin\beta \cdot 4\varkappa^2 \varkappa'^2 + \cos\beta \cos\alpha \cdot (2\varkappa\varkappa'(1 - 2\varkappa^2) - 2 \arcsin\varkappa)\}$$

und, wenn man für $\varkappa$ wieder ϑ einführt:

$$(87.) \qquad \frac{d\alpha}{dt} = -n \sin\beta \cdot (1 - \mu) - n \cos\beta \cos\alpha \cdot \mu \cdot \left(\frac{2\vartheta - \sin 2\vartheta}{1 - \cos 2\vartheta} \right).$$

Ist nun $(1-\mu)^2 > \mu^2 \left(\frac{2\vartheta - \sin 2\vartheta}{1 - \cos 2\vartheta} \right)$, so haben $\frac{d\alpha}{dt}$ und β stets entgegengesetzte Zeichen; also wird die Drehung der Ebene von jeder Anfangslage aus, im Sinne der täglichen Drehung des Himmels geschehen, aber mit verschiedener Geschwindigkeit, indem diese ihr Maximum hat, wenn die geraden Elongations-

puncte im Meridian nach den ***Polen*** zu liegen, und ihr Minimum, wenn dieselben Puncte nach dem ***Aequator*** gerichtet sind.

Ist ferner $(1-\mu)^2 = \mu^2\left(\frac{2\vartheta-\sin 2\vartheta}{1-\cos 2\vartheta}\right)^2$, so ist das Minimum der Geschwindigkeit 0; es giebt also in diesem Falle eine Lage, in welcher die Schwingungs-Ebene ungeändert bleibt; und zwar findet Dies Statt, wenn man das Pendel auf der nördlichen Hemisphäre nach Süden auf der südlichen nach Norden aus der Lothlinie entfernt.

Ist endlich $(1-\mu)^2 < \mu^2\left(\frac{2\vartheta-\sin 2\vartheta}{1-\cos 2\vartheta}\right)^2$, so giebt es zwei solcher Gleichgewichtslagen der Schwingungs-Ebene, bei denen auf unserer Erdhälfte die geraden Elongationen nach Südwest und Südost, auf der entgegengesetzten nach Nordwest und Nordost liegen. Aus jeder Zwischenrichtung dreht sich die Pendel-Ebene der östlichen Lage zu, und zwar bald im Sinne der täglichen Drehung, bald umgekehrt. Im Aequator fallen beide Ruhelagen in diese selbst hinein, und wenn das Pendel anfänglich nicht in einer derselben schwingt, so drehen sich die geraden Elongationspuncte wieder in die östliche Lage.

Erwägt man noch, dafs bis auf dritte Potenzen von ϑ,

$$1-\mu = 1-\tfrac{3}{8}\vartheta^2,$$

$$\mu\cdot\frac{2\vartheta-\sin 2\vartheta}{1-\cos 2\vartheta} = \tfrac{1}{4}\vartheta^3$$

ist, so ist es klar, dafs in unseren nördlichen Breiten und bei den kleinen Amplituden, die man langen Pendeln geben kann, stets der erste Fall Statt findet, und dafs aufserdem die Verschiedenheit in der Drehungsgeschwindigkeit der Ebene unmerklich ist.

Die erste der hier für das gewöhnliche, ebene Pendel gelöseten Fragen werde ich nun noch für das ***herumschwingende Pendel*** untersuchen, die andern aber wegen des geringern practischen Interesse dieses Falles übergehen.

Nimmt man in den Formeln (77.) $h-gr>0$ an, so sind die Wurzeln in derselben Reihenfolge mit resp. ***ra, rc, rb*** zu bezeichnen. Man erhält dann

$$x^2 = \frac{2gr}{h+gr},$$

und wenn man die Wurzeln hienach durch x ausdrückt:

$$(88.)\quad \begin{cases} a = +1-\varkappa^2\cdot\dfrac{l^2}{8gr^3}, \\ b = -1+\dfrac{\varkappa^2}{\varkappa'^2}\cdot\dfrac{l^2}{8gr^3}, \\ c = -\dfrac{1+\varkappa'^2}{\varkappa^2}, \end{cases}$$

woraus mit Hülfe der Gleichungen (9.) leicht zu sehen, dafs bis auf Gröfsen erster Ordnung ausschliefslich,

$$a_1 = a_2 = \mp K'$$

ist. Demnach wird, wie schon früher bemerkt,

$$\Phi = \mp 2iY(iK') = \mp 2\cdot\frac{\pi}{2K}.$$

Ferner wird:

$$P(u, K+ia_1+ia_2) = \frac{\Theta(u+K\mp 2iK')H'0}{\Theta u\, H(K\mp 2iK')} = e^{\pm\frac{\pi iu}{K}}.\mathrm{du}\,u,$$

also mit Rücksicht auf: $e^{i\psi} = e^{\mp\frac{\pi iu}{K}+i\varphi_0}$, bis auf Gröfsen erster Ordnung ausschliefslich:

$$S = \cos\varphi_0.\mathrm{dn}\,u,$$
$$R = \sin\varphi_0.\mathrm{dn}\,u.$$

Hieraus folgen, da $\lambda = a-c = \frac{2}{\varkappa^2}$ ist, für x und y die Werthe

$$(89.)\quad \begin{cases} x = \mp 2r\cos\varphi_0\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u, \\ y = \pm 2r\sin\varphi_0\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u, \\ \text{während} \\ z = r(1-2\,\mathrm{sn}^2 u) \end{cases}$$

ist. Nimmt man an, dafs der Anfangsstofs in der Richtung des Azimuths α erfolge und setzt wieder für den Anfang $u = K$, so mufs man

$$\pm\cos\varphi_0 = \sin\alpha,$$
$$\mp\sin\varphi_0 = \cos\alpha$$

setzen. Substituirt man demgemäfs in die erste der Gleichungen (75.) $Q = Zu$, $R = \mp\,\mathrm{dn}\,u\cos\alpha$ und erwägt, dafs $Y_2'+Y_1'+2\mu_2$ und $Y_2'-Y_1'$ resp. die Werthe $\frac{1}{3}(1+\varkappa'^2)$ und $\varkappa^2$ haben, so ergiebt sich:

$$\frac{dl}{dt} = -\tfrac{2}{3}n\sqrt{(gr^3)}\cdot\frac{1}{\varkappa^5}\{\sin\beta\,(Z^{\mathrm{IV}}u+2(1+\varkappa'^2)Z''u)$$
$$-\cos\beta\cos\alpha\,(\mathrm{dn}^{\mathrm{IV}}u+2(1+\varkappa'^2)\,\mathrm{dn}''u-3\varkappa^4\,\mathrm{dn}\,u)\},$$

woraus durch Integration:

$$l = -\tfrac{2}{3}nr^2\cdot\frac{1}{\varkappa^4}\{\sin\beta\,(Z'''u+2(1+\varkappa'^2)Z'u) - \cos\beta\cos\alpha\,(\mathrm{dn}'''u+2(1+\varkappa'^2)\mathrm{dn}'u-3\varkappa^4\,\mathrm{am}\,u)\}+\text{Const.}$$

folgt. Es enthält also in diesem Falle l ein der ***Zeit*** proportionales Glied. Nach Ausführung der Differentiationen ergiebt sich:

$$(90.)\quad l = -\tfrac{2}{3}nr^2\cdot\frac{1}{\varkappa^4}\{\sin\beta\,(2(1+\varkappa'^2)Z'0-2\varkappa^2+6\varkappa^4\,\mathrm{sn}^2u\,\mathrm{cn}^2u) - \cos\beta\cos\alpha\,(3\varkappa^4\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u(1-2\,\mathrm{sn}^2u)-3\varkappa^4\,\mathrm{am}\,u)\}+\text{Const.},$$

und für die Grenzen $u = K\ldots 2K$:

$$l_2 - l_1 = -nr^2\pi\cos\beta\cos\alpha.$$

Die Seite rechts giebt, da hier $l_1 = 0$ gesetzt wird, den Werth von l_2 an. Die kleinste Abweichung des Pendels von der Verticalen wird bestimmt durch die Wurzel a, nämlich:

$$r\sqrt{(1-aa)} = \mp r\cdot\frac{l_2}{\sqrt{(gr^3)}}\cdot\tfrac{1}{2}\varkappa.$$

Die Richtung der Abweichung könnte man durch Entwickelung der Coordinaten bis auf Gröfsen einschliefslich erster Ordnung finden, kürzer jedoch findet sie sich durch Vergleichung mit dem ***gewöhnlichen*** Pendel, mit welchem das ***herumschwingende*** Pendel für den Grenzfall $\varkappa^2 = 1$ übereinstimmen mufs. Den Modul $\varkappa$ kann man durch die Anfangsgeschwindigkeit des Pendels ausdrücken. Entspricht diese der Fallhöhe H, so findet sich

$$\varkappa^2 = \frac{2r}{H+2r}.$$

Man hat also folgendes Resultat:

> Wenn man dem Pendel in seiner obern stabilen Gleichgewichtslage nach dem Azimuth α eine Anfangsgeschwindigkeit mittheilt, die der Fallhöhe H entspricht, so weicht es in seinem tiefsten Puncte von der Verticalen um eine durch die Formel
>
> $$nr\sqrt{\left(\frac{r}{g}\right)}\cdot\tfrac{1}{2}\pi\cos\beta\cos\alpha\cdot\sqrt{\left(\frac{2r}{H+2r}\right)}$$
>
> bestimmte Entfernung nach der Richtung des Azimuths $\alpha+\frac{1}{2}\pi$ ab.

XI.

Anwendung auf ein Pendel mit sehr kleinen Excursionen.

Man bezeichne durch λ und μ die Sinus der halben kleinsten und gröfsten Abweichung des Pendels von der Verticalen, und setze daher, da die Wurzeln der cubischen Gleichung a und b die Cosinus dieser Winkel sind:

$$(91, a.) \quad \begin{cases} a = 1 - 2\lambda\lambda, \\ b = 1 - 2\mu\mu. \end{cases}$$

Alle von k^2, a_1, a_2 abhängigen Gröfsen lassen sich nach Potenzen dieser als *kleine* Gröfsen erster Ordnung zu betrachtenden λ und μ entwickeln.

Zunächst ergiebt sich aus der Relation zwischen den drei Wurzeln, nämlich aus

$$0 = 1 + ab + ac + bc,$$

durch Entwickelung bis auf Glieder von der 6ten Dimension einschliefslich:

$$(91, b.) \quad c = -1 - 2\lambda^2\mu^2 - 2\lambda^2\mu^2(\mu^2 + \lambda^2) - \cdots$$

Ferner

$$(91, c.) \quad \begin{cases} z^2 = \dfrac{a-b}{a-c} = (\mu^2 - \lambda^2).\{1 + \lambda^2 - \lambda^2(\mu^2 - \lambda^2) + \cdots\}, \\ z'^2 = 1 - z^2 = 1 - (\mu^2 - \lambda^2) - \lambda^2(\mu^2 - \lambda^2) + \cdots. \end{cases}$$

Nach Potenzen von z entwickelt, erhält man

$$(92, a.) \quad \begin{cases} \dfrac{2K}{\pi} = 1 + \frac{1}{4}z^2 + \frac{9}{64}z^4 + \frac{25}{256}z^6 + \cdots \\ \dfrac{2E}{\pi} = 1 - \frac{1}{4}z^2 - \frac{3}{64}z^4 - \frac{5}{256}z^6 - \cdots \\ \dfrac{2(K-E)}{\pi} = \frac{1}{2}z^2 + \frac{3}{16}z^4 + \frac{15}{128}z^6 + \cdots \end{cases}$$

und hieraus:

$$(92, b.) \quad \begin{cases} Z'0 = \left(1 - \dfrac{E}{K}\right) = \frac{1}{2}z^2\{1 + \frac{1}{8}z^2 + \frac{1}{16}z^4 + \cdots\}, \\ Z'K = Z'0 - z^2 = -\frac{1}{2}z^2\{1 - \frac{1}{8}z^2 - \frac{1}{16}z^4 - \cdots\}, \\ Z'(K + iK') = Z'0 - 1 = -1\{1 - \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{16}z^4 - \cdots\}. \end{cases}$$

Nach Substitution dieser Ausdrücke in die Gleichungen (66.) ergiebt sich:

$$(93, a.) \quad \begin{cases} A = \dfrac{2}{z^4}\cdot\{1 + z^2 + 2z^4 + \cdots\}, \\ B = -\frac{15}{8}\cdot\{1 + \frac{3}{2}z^2 + \cdots\}, \\ C = \frac{3}{2}\cdot\{1 + z^2 + \frac{7}{6}\frac{5}{4}z^4 + \cdots\}, \\ D = -1\cdot\{1 + \frac{1}{2}z^2 + \frac{2}{3}\frac{3}{2}z^4 + \cdots\}. \end{cases}$$

und wenn man nach (91, *c.*) x^2 durch μ und λ ausdrückt:

$$(93,b.)\quad \begin{cases} A = \frac{2}{(\mu^2-\lambda^2)^2}\cdot\{1+(\mu^2-3\lambda^2)+(2\mu^4-3\mu^2\lambda^2+4\lambda^4)+\cdots\}, \\ B = -\frac{15}{8}\cdot\{1+\frac{3}{2}(\mu^2-\lambda^2)+\cdots\}, \\ C = \frac{3}{2}\cdot\{1+(\mu^2-\lambda^2)+\frac{1}{64}(75\mu^4-86\mu^2\lambda^2+11\lambda^4)+\cdots\}, \\ D = -1.\{1+\frac{1}{2}(\mu^2-\lambda^2)+\frac{1}{32}(23\mu^4-30\mu^2\lambda^2+7\lambda^4)+\cdots\}. \end{cases}$$

Ferner erhält man, da

$$Y_2'+Y_1'+3\mu_2 = -Z'0-\frac{b+c}{a-c}$$

$$= \tfrac{1}{2}(\mu^2+\lambda^2)-\tfrac{1}{16}(\mu^4-26\mu^2\lambda^2-7\lambda^4)-\tfrac{1}{32}(\mu^6-15\mu^4\lambda^2-69\mu^2\lambda^4-13\lambda^6)+\cdots$$

ist, nach (69):

$$(93,c.)\quad \begin{cases} A' = \frac{1}{(\mu^2-\lambda^2)^2}\cdot\{(\mu^2+\lambda^2)-(\mu^4-5\mu^2\lambda^2+4\lambda^4) \\ \qquad\qquad -(\mu^6-12\mu^4\lambda^2+12\mu^2\lambda^4-5\lambda^6)+\cdots\}, \\ B' = \frac{3}{2}\cdot\{1+\frac{1}{8}(3\mu^2-13\lambda^2)+\frac{1}{16}(5\mu^4+11\mu^2\lambda^2+9\lambda^4)+\cdots\}, \\ C' = -1.\{1-\frac{1}{4}(\mu^2+5\lambda^2)+\frac{1}{16}(\mu^4-54\mu^2\lambda^2+5\lambda^4)+\cdots\}. \end{cases}$$

Hieran schliefsen sich, um die constanten Factoren der Variationsformeln (75.) vollständig zu machen, die Ausdrücke:

$$(94.)\quad \begin{cases} Y_2'+Y_1' = \frac{2}{a-c} = \{1+\lambda^2-\lambda^2\mu^2+\lambda^4+\cdots\}, \\ Y_2'+Y_1'+2\mu_2 = -\frac{2}{3}\left(\frac{a+b+c}{a-c}\right) \\ \qquad\qquad = -\frac{1}{3}\{1-\lambda^2-2\mu^2-5\mu^2\lambda^2-\lambda^4+\cdots\}, \\ iY_1'' = -iY_1'' = \mp 2\sqrt{\left(\frac{(1-a)(1-b)(1-c)}{(a-c)^3}\right)} \\ \qquad\qquad = \mp 2\mu\lambda\{1+\frac{1}{2}\lambda^2+\frac{3}{8}\lambda^4+\cdots\}, \\ l = \mp\sqrt{(2gr^3)}\sqrt{((1-a)(1-b)(1-c))} \\ \qquad\qquad = \mp 4\sqrt{(gr^3)}\mu\lambda\{1+\frac{1}{2}\mu^2\lambda^2+\cdots\}. \end{cases}$$

Zur Ausführung aller Reihen-Entwickelungen sind jetzt noch die Gröfsen q und q^σ nöthig. Die erste läfst sich leicht nach Potenzen von x entwickeln, nämlich:

$$q = \frac{x^2}{16}\cdot\{1+\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{21}{64}x^4+\cdots\},$$

und hieraus ergiebt sich durch Substitution des Werths von x^2 in μ und λ:

$$(95.)\quad q = \tfrac{1}{16}(\mu\mu-\lambda\lambda)\{1+\tfrac{1}{2}(\mu^2+\lambda^2)+\tfrac{21}{64}(\mu^2-\lambda^2)^2+\cdots\}.$$

Um q^σ zu finden, leite man zunächst aus den Gleichungen (9.) folgende elliptischen Functionen für das Argument $a_1 + a_2 = s$ her:

$$(96.)\quad \begin{cases} \operatorname{sn}(K+is) = \dfrac{1}{a}\cdot\sqrt{\dfrac{a-c}{-b-c}}, & \operatorname{sn} is = \pm i\,\dfrac{c}{b}\cdot\sqrt{\dfrac{a+b}{-a-c}}, \\ \operatorname{cn}(K+is) = \mp\dfrac{ic}{a}\cdot\sqrt{\dfrac{a+b}{-b-c}}, & \operatorname{cn} is = \dfrac{1}{b}\cdot\sqrt{\dfrac{b-c}{-a-c}}, \\ \operatorname{dn}(K+is) = \dfrac{b}{a}\cdot\sqrt{\dfrac{-a-c}{-b-c}}, & \operatorname{dn} is = \dfrac{a}{b}\cdot\sqrt{\dfrac{cc-bb}{cc-aa}}. \end{cases}$$

Die Bestimmung von q^σ aus jeder dieser Formeln ist leicht. Wählt man z. B. $\operatorname{sn} is$, so ergiebt sich nach Substitution der Werthe von a, b, c in μ und λ:

$$\frac{\mp i}{\operatorname{sn} is} = \frac{b}{-c}\sqrt{\left(\frac{-a-c}{a+b}\right)} = \lambda\{1-\mu^2+\tfrac{1}{2}\lambda^2-\mu^4-\tfrac{3}{2}\mu^2\lambda^2+\tfrac{3}{8}\lambda^4+\cdots\}.$$

Aus der bekannten Entwickelung für $\operatorname{cosec}\operatorname{am} u$, nämlich

$$\frac{\frac{2K}{\pi}}{\operatorname{sn} u} = \frac{1}{\sin x} + \sum_1^\infty{}_k\left\{\frac{q^k(1+q^{2k})\sin x}{1-2q^{2k}\cos 2x+q^{4k}}\right\},$$

erhält man aber durch Zerlegung jedes Gliedes in zwei Partialbrüche und durch Substitution von $\mp\frac{\pi is}{2K}$ statt x oder $q^{\mp\frac{1}{2}\sigma}$ statt e^{ix}:

$$\frac{\mp\frac{2K}{\pi}\cdot i}{\operatorname{sn} is} = \frac{2q^{\mp\frac{1}{2}\sigma}}{1-q^{\mp\sigma}} - \frac{2q^{1\pm\frac{1}{2}\sigma}}{1-q^{2\pm\sigma}} + \frac{2q^{1\mp\frac{1}{2}\sigma}}{1-q^{2\mp\sigma}} - \frac{2q^{2\pm\frac{1}{2}\sigma}}{1-q^{4\pm\sigma}} + \frac{2q^{2\mp\frac{1}{2}\sigma}}{1-q^{4\mp\sigma}} - \text{etc.}$$

Entwickelt man die Brüche durch Division und bezeichnet für den Augenblick die Gröfse erster Ordnung: $2(q^{\mp\frac{1}{2}\sigma} - q^{1\pm\frac{1}{2}\sigma})$ durch z, so findet sich:

$$\frac{\mp i\frac{2K}{\pi}}{\operatorname{sn} is} = z(1+4q+6q^2+\cdots)+\tfrac{1}{4}z^3(1+5q+\cdots)+\tfrac{1}{16}z^5(1+\cdots)+\cdots,$$

und wenn man $\frac{2K}{\pi}$ und q durch μ und λ ausdrückt:

$$\frac{\mp i}{\operatorname{sn} is} = z(1+\tfrac{1}{128}(\mu^2-\lambda^2)^2+\cdots)+\tfrac{1}{4}z^3(1+\tfrac{1}{16}(\mu^2-\lambda^2)+\cdots)+\tfrac{1}{16}z^5+\cdots$$

Diese Reihe mit der oben für $\frac{1}{\operatorname{sn} is}$ μ und λ gefundenen verglichen, giebt:

$$(97,a.)\quad q^{\mp\frac{1}{2}\sigma}-q^{1\pm\frac{1}{2}\sigma} = \tfrac{1}{2}z = \tfrac{1}{2}\lambda\{1-\tfrac{1}{4}(4\mu^2-\lambda^2)-\tfrac{1}{128}(129\mu^4+96\mu^2\lambda^2-17\lambda^4)+\cdots\}.$$

Vertauscht man nun μ mit λ, wodurch a in b, z^2 in $-\frac{z^2}{z'^2}$, q in $-q$, K in $z'K$,

$\mathrm{sn}(is,\varkappa)$ in $-\mathrm{cn}(K+is,\varkappa)$ oder $\mathrm{sn}(is,\varkappa)$ in $\mathrm{sn}\left(\varkappa' is,\frac{i\varkappa}{\varkappa'}\right)$, mithin s in $\varkappa' s$ übergehen, also $\frac{s}{K}$ und auch $q^{\mp\frac{1}{2}\sigma}=e^{\pm\frac{\pi s}{2K}}$ ungeändert bleiben, so erhält man:

(97, *b*.) $q^{\mp\frac{1}{2}\sigma}+q^{1\pm\frac{1}{2}\sigma}=\frac{1}{2}\mu\{1+\frac{1}{4}(\mu^2-4\lambda^2)+\frac{1}{128}(17\mu^4-96\mu^2\lambda^2-129\lambda^4)+\cdots\}$,

und wenn man diese Gleichung zu der vorigen addirt, oder davon subtrahirt:

(97, *c*.)
$$\begin{cases} q^{\mp\frac{1}{2}\sigma} = \frac{1}{4}(\mu+\lambda).\{1+\frac{1}{4}(\mu^2-5\mu\lambda+\lambda^2) \\ \qquad +\frac{1}{128}(17\mu^4-146\mu^3\lambda+50\mu^2\lambda^2-146\mu\lambda^3+17\lambda^4)+\cdots\}, \\ q^{1\pm\frac{1}{2}\sigma} = \frac{1}{4}(\mu-\lambda).\{1+\frac{1}{4}(\mu^2+5\mu\lambda+\lambda^2) \\ \qquad +\frac{1}{128}(17\mu^4+146\mu^3\lambda+50\mu^2\lambda^2+146\mu\lambda^3+17\lambda^4)+\cdots\}. \end{cases}$$

Auf gleiche Weise könnte man q^{α_1} und q^{α_2} entwickeln, um mittels der Gleichung (34.) zur Kenntnifs der Gröfse f zu gelangen. Dieselbe läfst sich aber nach dem Additionstheoreme der Z Functionen in

$$f=\frac{2K}{\pi}i\left(Y(K+ia_1)+Yia_2\right)=\frac{2K}{\pi}i\left\{Z(K+is)+\frac{\mathrm{sn}(K+is)}{\mathrm{sn}\,ia_2\,\mathrm{sn}(K+ia_1)}\right\}$$

umformen. Aus der Entwickelung von Zu, nämlich:

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)Zu=\sum_1^\infty{}^k\left\{\frac{4q^{2k-1}\sin 2x}{1-2q^{2k-1}\cos 2x+q^{4k-2}}\right\},$$

ergiebt sich aber für $u=K+is$:

$$\frac{2Ki}{\pi}Z(K+is)=\mp\left\{\frac{2q^{1\pm\sigma}}{1+q^{1\pm\sigma}}-\frac{2q^{1\mp\sigma}}{1+q^{1\mp\sigma}}+\frac{2q^{3\pm\sigma}}{1+q^{3\pm\sigma}}-\frac{2q^{3\mp\sigma}}{1+q^{3\mp\sigma}}+\cdots\right\},$$

in welcher Reihe das erste Glied 0ter, die beiden folgenden 4ter, die folgenden 8ter, etc. Ordnung sind. Mit Hülfe der Reihen (97.) erhält man hieraus:

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)iZ(K+is)=\mp 1\pm\frac{\lambda}{\mu}\cdot\{1-\tfrac{5}{4}(\mu^2-\lambda^2)-\tfrac{61}{64}(\mu^4+2\mu^2\lambda^2-3\lambda^4)+\cdots\},$$

und da nach (96. und 9.)

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)i\frac{\mathrm{sn}(K+is)}{\mathrm{sn}\,ia_2\,\mathrm{sn}(K+ia_1)}=\mp\frac{2K}{\pi}\cdot\frac{1}{a}\sqrt{\left(\frac{1-aa}{1-bb}\cdot\frac{a+b}{a-c}\right)}$$

$$=\mp\frac{\lambda}{\mu}\cdot\{1+\tfrac{1}{4}(\mu^2+5\lambda^2)+\tfrac{1}{64}(9\mu^4-42\mu^2\lambda^2+153\lambda^4)+\cdots\}$$

ist, so ergiebt sich durch Addition:

(98.) $f=\mp\{1+\frac{3}{2}\mu\lambda+\frac{15}{16}\mu\lambda(\mu^2+\lambda^2)+\cdots\}$.

Hierdurch ist man in Stand gesetzt, alle Reihen-Entwickelungen, die zur Bestimmung der Coordinaten nach (33.) und der Variationen der Constanten (75. und 76.) nöthig sind, ohne Schwierigkeit auszuführen. Um mit

der frühern Bezeichnung für das ebene Pendel in Übereinstimmung zu bleiben, werde dabei

$$\varphi_0 + (f \pm 1)x = \alpha \pm \tfrac{1}{2}\pi$$

gesetzt, so dafs α das Azimuth der Pendelprojection in den Zeiten ist, welche $u = K,\ 5K,\ 9K,$ etc. entsprechen.

Man erhält demnächst aus (76.):

$$(99.)\quad \begin{cases} \frac{2K}{\pi} Q = \frac{1}{4}(\mu^2 - \lambda^2).\{(1 + \frac{1}{2}\mu^2 + \frac{1}{2}\lambda^2)\sin 2x + \frac{1}{16}(\mu^2 - \lambda^2)\sin 4x\}, \\ \frac{2K}{\pi} R = \begin{cases} \pm\mu\cos\alpha[(1 + \frac{3}{16}\mu^2 - \frac{19}{16}\lambda^2 + \frac{23}{256}\mu^4 - \frac{25}{128}\mu^2\lambda^2 - \frac{229}{256}\mu^4)\cos x \\ \quad + \frac{1}{16}(\mu^2 - \lambda^2)(1 + \frac{3}{4}\mu^2 - \frac{1}{2}\lambda^2)\cos 3x + \frac{1}{256}(\mu^2 - \lambda^2)^2\cos 5x] \\ + \lambda\sin\alpha[(1 + \frac{3}{16}\lambda^2 - \frac{19}{16}\mu^2 + \frac{23}{256}\lambda^4 - \frac{25}{128}\mu^2\lambda^2 - \frac{229}{256}\lambda^4)\sin x \\ \quad + \frac{1}{16}(\mu^2 - \lambda^2)(1 + \frac{3}{4}\lambda^2 - \frac{1}{2}\mu^2)\sin 3x + \frac{1}{256}(\mu^2 - \lambda^2)^2\sin 5x], \end{cases} \\ \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \frac{\partial Q}{\partial \varepsilon} = \frac{1}{4}(\mu^2 - \lambda^2\{1 + \frac{1}{2}\mu^2 + \frac{1}{2}\lambda^2)\cos 2x + \frac{1}{16}(\mu^2 - \lambda^2)\cos 4x\}, \\ \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} = \begin{cases} \lambda\sin\alpha[(1 - \frac{25}{16}\mu^2 + \frac{1}{16}\lambda^2 - \frac{161}{256}\mu^4 + \frac{254}{256}\mu^2\lambda^2 + \frac{3}{256}\lambda^4)\cos x \\ \quad + \frac{1}{16}(\mu^2 - \lambda^2)(1 - \frac{2}{4}\mu^2 + \frac{3}{4}\lambda^2)\cos 3x + \frac{1}{256}(\mu^2 - \lambda^2)^2\cos 5x] \\ \mp\mu\cos\alpha[(1 - \frac{25}{16}\lambda^2 + \frac{1}{16}\mu^2 - \frac{161}{256}\lambda^4 + \frac{254}{256}\mu^2\lambda^2 + \frac{3}{256}\mu^4)\sin x \\ \quad + \frac{1}{16}(\mu^2 - \lambda^2)(1 - \frac{2}{4}\lambda^2 + \frac{3}{4}\mu^2)\sin 3x + \frac{1}{256}(\mu^2 - \lambda^2)^2\sin 5x]. \end{cases} \end{cases}$$

Aus R folgt S durch Differentiation nach φ_0, also nach α; dann folgen nach (31.) aus Q, R, S durch Differentiation nach u und durch Multiplication mit $r(a-c)$ die Coordinaten z, y, x, wobei man die für z hinzutretende Constante durch die bekannten Werthe von z für $u = 0,\ K,$ etc. bestimmen kann. So ergiebt sich:

$$(100.a.)\quad \begin{cases} z = r\{(1 - \mu^2 - \lambda^2 - \frac{1}{16}\mu^4 + \frac{1}{8}\mu^2\lambda^2 - \frac{1}{16}\lambda^4) + (\mu^2 - \lambda^2)\cos 2x \\ \qquad + \frac{1}{16}(\mu^2 - \lambda^2)^2\cos 4x\}, \\ y = 2r.\begin{cases} \mu\cos\alpha[(1 - \frac{5}{16}\mu^2 - \frac{3}{16}\lambda^2 - \frac{25}{256}\mu - \frac{13}{128}\mu^2\lambda^2 + \frac{19}{256}\lambda^4)\sin x \\ \quad + \frac{3}{16}(\mu^2 - \lambda^2)(1 + \frac{1}{4}\mu^2 - \frac{1}{2}\lambda^2).\sin 3x + \frac{5}{256}(\mu^2 - \lambda^2)^2\sin 5x] \\ \mp\lambda\sin\alpha[(1 - \frac{5}{16}\lambda^2 - \frac{3}{16}\mu^2 - \frac{25}{256}\lambda^4 - \frac{13}{128}\mu^2\lambda^2 + \frac{19}{256}\mu^4)\cos x \\ \quad + \frac{3}{16}(\mu^2 - \lambda^2)(1 + \frac{1}{4}\lambda^2 - \frac{1}{2}\mu^2).\cos 3x + \frac{5}{256}(\mu^2 - \lambda^2)^2\cos 5x] \end{cases}, \\ x = 2r.\begin{cases} \mu\sin\alpha[(1 - \frac{5}{16}\mu^2 - \frac{3}{16}\lambda^2 - \frac{25}{256}\mu^4 - \frac{13}{128}\mu^2\lambda^2 + \frac{19}{256}\lambda^4)\sin x \\ \quad + \frac{3}{16}(\mu^2 - \lambda^2)(1 + \frac{1}{4}\mu^2 - \frac{1}{2}\lambda^2).\sin 3x + \frac{5}{256}(\mu^2 - \lambda^2)^2\sin 5x] \\ \pm\lambda\cos\alpha[(1 - \frac{5}{16}\lambda^2 - \frac{3}{16}\mu^2 - \frac{25}{256}\lambda^4 - \frac{13}{128}\mu^2\lambda^2 + \frac{19}{256}\mu^4)\cos x \\ \quad + \frac{3}{16}(\mu^2 - \lambda^2)(1 + \frac{1}{4}\lambda^2 - \frac{1}{2}\mu^2).\cos 3x + \frac{5}{256}(\mu^2 - \lambda^2)^2\cos 5x] \end{cases}. \end{cases}$$

Die ersten Glieder dieser Reihen geben die bekannte elliptische Bewegung des Pendels, wo für x und α, die nach dem Frühern die Bedeutung

$$(100,b.)\quad \begin{cases} x = \frac{\pi m}{2K}(t-t_0) \\ \quad = \sqrt{\left(\frac{g}{r}\right)}(t-t_0).\{1-\frac{1}{4}\mu^2-\frac{1}{4}\lambda^2-\frac{5}{64}\mu^4+\frac{1}{32}\mu^2\lambda^2-\frac{5}{64}\lambda^4+\cdots\}, \\ \alpha = \varphi_0 \mp \frac{1}{2}\pi \mp \frac{3}{2}\mu\lambda\sqrt{\left(\frac{g}{r}\right)}(t-t_0).\{1+\frac{3}{8}\mu^2+\frac{3}{8}\lambda^2+\cdots\} \end{cases}$$

haben, ebenfalls nur die ersten Glieder 0ter Ordnung beizubehalten sind.

Die Entwickelung der verschiedenen Glieder der Gleichungen (75.) hat keine Schwierigkeit; ich übergehe daher die Ausführung der Rechnung und gebe nur die Resultate an. Sie sind:

$$(101,a.)\quad \begin{cases} \frac{dl}{dt} = -4n\sqrt{(gr^3)}(\mu\mu-\lambda\lambda) \\ \qquad \times \begin{cases} \sin\beta.[(1-\frac{5}{4}\mu^2-\frac{5}{4}\lambda^2)\sin 2x+\frac{3}{4}(\mu^2-\lambda^2)\sin 4x] \\ -\mu\cos\beta\cos\alpha\cdot[(1-\frac{3}{8}\mu^2-\frac{5}{8}\lambda^2)\cos x-(1-\frac{13}{16}\mu^2-\frac{3}{16}\lambda^2)\cos 3x \\ \qquad -\frac{7}{16}(\mu^2-\lambda^2)\cos 5x] \\ \pm\lambda\cos\beta\sin\alpha\cdot[(1-\frac{3}{8}\lambda^2-\frac{5}{8}\mu^2)\sin x+(1-\frac{13}{16}\lambda^2-\frac{3}{16}\mu^2)\sin 3x \\ \qquad +\frac{7}{16}(\mu^2-\lambda^2)\sin 5x] \end{cases}, \\ \frac{dt_0}{dt} = \pm n\sqrt{\frac{r}{g}}\cdot\frac{2\mu\lambda}{\mu\mu-\lambda\lambda} \\ \qquad \times \begin{cases} \sin\beta.[(1-\frac{1}{2}\mu^2-\frac{1}{2}\lambda^2)\cos 2x+\frac{3}{4}(\mu^2-\lambda^2)\cos 4x-\frac{1}{4}(\mu^2-\lambda^2)] \\ +\mu\cos\beta\cos\alpha.[(1+\frac{3}{2}\mu^2-\lambda^2)\sin x-(1-\frac{1}{16}\mu^2+\frac{9}{16}\lambda^2)\sin 3x \\ \qquad -\frac{7}{16}(\mu^2-\lambda^2)\sin 5x] \\ \pm\lambda\cos\beta\sin\alpha.[(1+\frac{3}{2}\lambda^2-\mu^2)\cos x+(1-\frac{1}{16}\lambda^2+\frac{9}{16}\mu^2)\cos 3x \\ \qquad +\frac{7}{16}(\mu^2-\lambda^2)\cos 5x] \end{cases}, \\ \frac{d\varphi_0}{dt} = -n\cdot\frac{1}{\mu\mu-\lambda\lambda} \\ \qquad \times \begin{cases} \sin\beta.[(\mu^2+\lambda^2)\cos 2x+\frac{3}{4}(\mu^2-\lambda^2)(\mu^2+\lambda^2)\cos 4x \\ \qquad +(\mu^2-\lambda^2)(1-\frac{3}{4}\mu^2-\frac{3}{4}\lambda^2)-\frac{3}{2}(\mu^2-\lambda^2)^2.u\sin 2x] \\ +\mu\cos\beta\cos\alpha.[(3\lambda^2-\mu^2+\frac{5}{8}\mu^4+\frac{13}{4}\mu^2\lambda^2-\frac{7}{8}\lambda^4)\sin x \\ \qquad -(\mu^2+\lambda^2-\frac{3}{16}\mu^4+\frac{11}{4}\mu^2\lambda^2+\frac{7}{16}\lambda^4)\sin 3x \\ \qquad -\frac{7}{16}(\mu^2-\lambda^2)\sin 5x+\frac{3}{2}(\mu^2-\lambda^2)^2u(\cos x-\cos 3x)] \\ \pm\lambda\cos\beta\sin\alpha.[(3\mu^2-\lambda^2+\frac{5}{8}\lambda^4+\frac{13}{4}\mu^2\lambda^2-\frac{7}{8}\mu^4)\cos x \\ \qquad +(\mu^2+\lambda^2-\frac{3}{16}\lambda^4+\frac{11}{4}\mu^2\lambda^2+\frac{7}{16}\mu^4)\cos 3x \\ \qquad +\frac{7}{16}(\mu^2-\lambda^2)\cos 5x-\frac{3}{2}(\mu^2-\lambda^2)^2u(\sin x+\sin 3x)] \end{cases}. \end{cases}$$

Aus der ersten dieser Gleichungen kann man mittels der aus (60.) folgenden Gleichungen

$$\frac{\partial\lambda}{\partial l} = \mp\frac{1}{4\sqrt{(gr^3)}}\cdot\frac{\mu}{\mu\mu-\lambda\lambda}\cdot\{1+\lambda^2-\tfrac{1}{2}\lambda^2\mu^2+\lambda^4\},$$

$$\frac{\partial\mu}{\partial l} = \pm\frac{1}{4\sqrt{(gr^3)}}\cdot\frac{\lambda}{\mu\mu-\lambda\lambda}\cdot\{1+\mu^2-\tfrac{1}{2}\lambda^2\mu^2+\mu^4\}$$

zwei andere für $\frac{d\lambda}{dt}$ und $\frac{d\mu}{dt}$ ableiten, welche dann zugleich die Gleichung $\frac{dh}{dt}=0$ enthalten; nämlich:

$$(101,b.)\quad \begin{cases} \frac{d\lambda}{dt} = \pm n.\mu \\ \quad\times\begin{cases} \sin\beta.[(1-\frac{5}{4}\mu^2-\frac{1}{4}\lambda^2)\sin 2x+\frac{3}{4}(\mu^2-\lambda^2)\sin 4x] \\ -\mu\cos\beta\cos\alpha.[(1-\frac{3}{8}\mu^2+\frac{3}{8}\lambda^2)\cos x-(1-\frac{1}{1}\frac{3}{6}\mu^2+\frac{1}{1}\frac{3}{6}\lambda^2)\cos 3x \\ \qquad -\frac{7}{1\,6}(\mu^2-\lambda^2)\cos 5x] \\ \pm\lambda\cos\beta\sin\alpha.[(1-\frac{5}{8}\mu^2+\frac{5}{8}\lambda^2)\sin x+(1-\frac{3}{1\,6}\mu^2+\frac{3}{1\,6}\lambda^2)\sin 3x \\ \qquad +\frac{7}{1\,6}(\mu^2-\lambda^2)\sin 5x] \end{cases}, \\ \frac{d\mu}{dt} = \mp n.\lambda \\ \quad\times\begin{cases} \sin\beta.[(1-\frac{1}{4}\mu^2-\frac{5}{4}\lambda^2)\sin 2x+\frac{3}{4}(\mu^2-\lambda^2)\sin 4x] \\ -\mu\cos\beta\cos\alpha.[(1+\frac{5}{8}\mu^2-\frac{5}{8}\lambda^2)\cos x-(1+\frac{3}{1\,6}\mu^2-\frac{3}{1\,6}\lambda^2\cos 3x) \\ \qquad -\frac{7}{1\,6}(\mu^2-\lambda^2)\cos 5x] \\ \pm\lambda\cos\beta\sin\alpha.[(1+\frac{3}{8}\mu^2-\frac{3}{8}\lambda^2)\sin x+(1+\frac{1}{1}\frac{3}{6}\mu^2-\frac{1}{1}\frac{3}{6}\lambda^2)\sin 3x \\ \qquad +\frac{7}{1\,6}(\mu^2-\lambda^2)\sin 5x] \end{cases}. \end{cases}$$

Diese Gleichungen enthalten, da rechts Alles durch die 4 Constanten λ, μ, φ_0, t_0 und die ***Zeit*** ausgedrückt ist, die vollständige Lösung der Aufgabe der ***kleinen*** Pendelschwingungen, bis zu dem oben bestimmten Grade der Näherung. Ich werde mich ihrer jetzt zu der Beantwortung der Fragen bedienen, welche den fürs ebene Pendel aufgestellten analog sind.

Zunächst ergiebt sich durch die Integration der letzten zwei Gleichungen:

$$(102,a.)\quad \begin{cases} \lambda = \mp n\sqrt{(\frac{r}{g})}.\mu \\ \quad\times\begin{cases} \sin\beta.[\frac{1}{2}(1-\mu\mu)\cos 2x+\frac{3}{1\,6}(\mu\mu-\lambda\lambda)\cos 4x] \\ +\mu\cos\beta\cos\alpha.[(1-\frac{1}{8}\mu\mu+\frac{17}{8}\lambda\lambda)\sin x-\frac{1}{3}(1-\frac{9}{1\,6}\mu\mu+\frac{9}{1\,6}\lambda\lambda)\sin 3x \\ \qquad -\frac{7}{8\,0}(\mu\mu-\lambda\lambda)\sin 5x] \\ \pm\lambda\cos\beta\sin\alpha.[(1+\frac{9}{8}\mu\mu+\frac{7}{8}\lambda\lambda)\cos x+\frac{1}{3}(1-\frac{7}{1\,6}\mu\mu+\frac{7}{1\,6}\lambda\lambda)\cos 3x \\ \qquad +\frac{7}{8\,0}(\mu\mu-\lambda\lambda)\cos 5x] \end{cases}+\text{Const.}, \end{cases}$$

$$(102,a.)\quad \begin{cases} \mu = \pm n\sqrt{\left(\frac{r}{g}\right)}.\lambda \\ \times \begin{cases} \sin\beta.\left[\frac{1}{2}(1-\lambda\lambda)\cos 2x + \frac{3}{160}(\mu\mu-\lambda\lambda)\cos 4x\right] \\ +\mu\cos\beta\cos\alpha.\left[(1+\frac{7}{8}\mu\mu+\frac{9}{8}\lambda\lambda)\sin x - \frac{1}{3}(1+\frac{7}{160}\mu\mu-\frac{7}{160}\lambda\lambda)\sin 3x\right. \\ \qquad\qquad \left. -\frac{7}{80}(\mu\mu-\lambda\lambda)\sin 5x\right] \\ \pm\lambda\cos\beta\sin\alpha.\left[(1+\frac{17}{8}\mu\mu-\frac{1}{8}\lambda\lambda)\cos x + \frac{1}{3}(1+\frac{9}{160}\mu\mu-\frac{9}{160}\lambda\lambda)\cos 3x\right. \\ \qquad\qquad \left. +\frac{7}{80}(\mu\mu-\lambda\lambda)\cos 5x\right] \end{cases} + \text{Const.} \end{cases}$$

Da der Winkel α nicht constant ist, so ist es klar, dafs die Variationen von λ und μ für das Intervall $0 \ldots 2\pi$ von x nicht verschwinden, wie es beim ebenen Pendel der Fall war. Substituirt man für x die Grenzen $\frac{1}{2}\pi$ und π, und bezeichnet die entsprechenden Werthe von α, λ und μ durch α_1, λ_1, μ_1, α_2, λ_2, μ_2, eben so wie für $x = \frac{3}{2}\pi$, 2π, etc., α_3, λ_3, μ_3, α_4, λ_4, μ_4, etc., so ergiebt sich:

$$(102,b.)\quad \begin{cases} \lambda_2-\lambda_1 = \mp n\sqrt{\left(\frac{r}{g}\right)} \\ \qquad \times\{\sin\beta.\mu(1-\mu\mu) - \cos\beta\cos\alpha_1.\frac{4}{3}\mu\mu(1-\frac{3}{10}\mu\mu+\frac{18}{10}\lambda\lambda) \\ \qquad\qquad \mp\cos\beta\sin\alpha_2.\frac{4}{3}\mu\lambda(1+\frac{8}{10}\mu\mu+\frac{7}{10}\lambda\lambda)\}, \\ \mu_2-\mu_1 = \pm n\sqrt{\left(\frac{r}{g}\right)} \\ \qquad \times\{\sin\beta.\lambda(1-\lambda\lambda) - \cos\beta\cos\alpha_1.\frac{4}{3}\mu\lambda(1+\frac{7}{10}\mu\mu+\frac{8}{10}\lambda\lambda) \\ \qquad\qquad \mp\cos\beta\sin\alpha_2.\frac{4}{3}\lambda\lambda(1+\frac{18}{10}\mu\mu-\frac{3}{10}\lambda\lambda)\}, \end{cases}$$

wo sich noch leicht α_2 auf α_1 reduciren läfst, da $\alpha_2 = \alpha_1 \mp \frac{3}{2}\mu\lambda.\frac{1}{2}\pi$ ist. Durch diese Gleichungen ist die Erhebung und die horizontale Seitengeschwindigkeit des Pendels nach einer Viertel-Oscillation bestimmt, indem diese zwei Gröfsen nur von den λ und μ abhangen. Denn wenn man annimmt, dafs das Pendel anfänglich um eine kleine Gröfse $\varrho.r$ aus dem Lothpuncte nach dem Azimuth α entfernt worden sei, und dann eine horizontale Geschwindigkeit $\omega.\sqrt{(rg)}$ bekommen habe, so ergeben sich aus den Anfangswerthen der Coordinaten und Geschwindigkeiten

$$x = r.\varrho\sin\alpha, \qquad y = r.\varrho\cos\alpha, \qquad z = r\{1-\tfrac{1}{2}\varrho^2-\cdots\},$$
$$\frac{dx}{dt} = \mp\sqrt{(gr)}.\omega\cos\alpha, \qquad \frac{dy}{dt} = \pm\sqrt{(gr)}\omega\sin\alpha, \qquad \frac{dz}{dt} = 0,$$

für l und h (nach 5, b.) die Werthe

$$l = \mp\sqrt{(gr^3)}.\varrho\omega,$$
$$h = -gr.\{1-\tfrac{1}{2}\varrho^2-\tfrac{1}{2}\omega^2-\tfrac{1}{8}\varrho^4-\cdots\}$$

und durch Substitution dieser in die cubische Gleichung folgt für λ und μ:

$$\lambda = \tfrac{1}{2}\omega(1-\tfrac{1}{8}\varrho^2+\cdots),$$
$$\mu = \tfrac{1}{2}\varrho(1+\tfrac{1}{8}\varrho^2+\cdots);$$

vorausgesetzt, dafs von den Gröfsen rechts die untere die gröfsere sei. Man sieht jedoch leicht, dafs die unter der Annahme $\varrho > \omega$ gefundenen Resultate auch für den entgegengesetzten Fall ihre Geltung behalten, und dafs man daher auch für $\omega > \varrho$ die Gröfsen λ, μ so annehmen kann, wie geschehen. Bezeichnet man dann ferner durch ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, etc., ω_1, ω_2, ω_3, etc. die den Argumenten $u = K$, $2K$, $3K$, etc. entsprechenden Elongationen und Geschwindigkeiten, so erhält man:

$$\omega_1 = 2\lambda_1(1+\tfrac{1}{2}\mu_1^2), \quad \omega_2 = 2\mu_2(1+\tfrac{1}{2}\lambda_2^2), \quad \omega_3 = 2\lambda_3(1+\tfrac{1}{2}\mu_3^2), \ \ldots$$
$$\varrho_1 = 2\mu_1(1-\tfrac{1}{2}\mu_1^2), \quad \varrho_2 = 2\lambda_2(1-\tfrac{1}{2}\lambda_2^2), \quad \varrho_3 = 2\mu_3(1-\tfrac{1}{2}\mu_3^2), \ \ldots$$

Hiernach gehen die Gleichungen (102, *b.*) in die folgenden über:

$$(103,a.)\quad \begin{cases} \varrho_2-\omega_1(1-\frac{1}{8}\varrho_1^2-\frac{1}{8}\omega_1^2) = \mp n\sqrt{\left(\frac{r}{g}\right)}\{\sin\beta\,.\,\varrho_1(1-\frac{1}{8}\varrho_1^2-\frac{3}{8}\omega_1^2) \\ -\cos\beta\cos\alpha_1\,.\,\frac{2}{3}\varrho_1^2(1+\frac{7}{40}\varrho_1^2+\frac{3}{40}\omega_1^2)\mp\cos\beta\sin\alpha_2\,.\,\frac{2}{3}\varrho_1\omega_1(1+\frac{1}{5}\varrho_1^2-\frac{1}{5}\omega_1^2)\}, \\ \omega_2-\varrho_1(1+\frac{1}{8}\varrho_1^2+\frac{1}{8}\omega_1^2) = \pm n\sqrt{\left(\frac{r}{g}\right)}\{\sin\beta\,.\,\omega_1(1-\frac{3}{8}\varrho_1^2-\frac{1}{8}\omega_1^2) \\ -\cos\beta\cos\alpha_1\,.\,\frac{2}{3}\varrho_1\omega_1(1-\frac{3}{40}\varrho_1^2+\frac{13}{40}\omega_1^2)\mp\cos\beta\sin\alpha_2\,.\,\frac{2}{3}\omega_1^2(1-\frac{1}{20}\varrho_1^2+\frac{1}{20}\omega_1^2)\}. \end{cases}$$

Auf gleiche Weise findet sich:

$$(103,b.)\quad \begin{cases} \varrho_3-\varrho_1 = \mp n\sqrt{\left(\frac{r}{g}\right)}\,.\,\frac{2}{3}\varrho_1\omega_1(1-\frac{1}{5}\varrho_1^2+\frac{1}{5}\omega_1^2)\,.\cos\beta(\cos\alpha_3+\cos\alpha_1), \\ \omega_3-\omega_1 = \pm n\sqrt{\left(\frac{r}{g}\right)}\,.\,\frac{2}{3}\varrho_1^2\ (1+\frac{3}{10}\varrho_1^2+\frac{2}{10}\omega_1^2)\,.\cos\beta(\cos\alpha_3+\cos\alpha_1), \end{cases}$$

$$\varrho_5-\varrho_1 = \mp n\sqrt{\left(\frac{r}{g}\right)}\,.\,\frac{2}{3}\varrho_1\omega_1(1-\tfrac{1}{5}\varrho_1^2+\tfrac{1}{5}\omega_1^2)\cos\beta(\cos\alpha_1-\cos\alpha_5),$$

$$\omega_5-\omega_1 = \pm n\sqrt{\left(\frac{r}{g}\right)}\,.\,\frac{2}{3}\varrho_1^2\ (1+\tfrac{3}{10}\varrho_1^2+\tfrac{2}{10}\omega_1^2)\cos\beta(\cos\alpha_1-\cos\alpha_5),$$

oder, statt der letzten Gleichungen, da

$$\cos\alpha_1-\cos\alpha_5 = 2\sin\alpha_3\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_5-\alpha_1) = \mp 3\mu\lambda\pi\sin\alpha$$

ist:

$$(103,c.)\quad \begin{cases} \varrho_5-\varrho_1 = +n\sqrt{\left(\frac{r}{g}\right)}\,.\,\frac{1}{2}\varrho_1^2\omega_1^2\,.\,\pi\,.\cos\beta\sin\alpha, \\ \omega_5-\omega_1 = -n\sqrt{\left(\frac{r}{g}\right)}\,.\,\frac{1}{2}\varrho_1^3\omega_1\,.\,\pi\,.\cos\beta\sin\alpha. \end{cases}$$

Setzt man beispielsweise $\omega_1 = 0$, d. h. läfst man das Pendel *ohne* Anfangsgeschwindigkeit fallen, so ergiebt sich aus diesen Gleichungen (103, *a, b, c.*):

$$\varrho_2 = \mp n\sqrt{\left(\frac{r}{g}\right)}.\{\sin\beta.\varrho_1(1-\tfrac{1}{8}\varrho_1^2) - \cos\beta\cos\alpha.\tfrac{2}{3}\varrho_1^2(1+\tfrac{7}{40}\varrho_1^2)\},\quad \varrho_3 = \varrho_1,$$

$$\omega_2 = \varrho_1(1+\tfrac{1}{8}\varrho_1^2),\qquad \varrho_5 = \varrho_1,$$

$$\omega_3 = \pm n\sqrt{\left(\frac{r}{g}\right)}.\tfrac{4}{3}\varrho_1^2(1+\tfrac{3}{10}\varrho_1^2).\cos\beta\cos\alpha,\qquad \omega_5 = 0:$$

Resultate deren Übereinstimmung mit den früher für das ebene Pendel gefundenen leicht zu sehen ist.

Um zweitens die Änderung der Winkelgeschwindigkeit der Projection des Pendels zu finden, bemerke ich, dafs die mittlere Lage dieser Projection durch

$$\psi = \varphi_0 + \Phi u = \varphi_0 \mp \sqrt{\left(\frac{g}{r}\right)}(t-t_0)(1-\tfrac{1}{4}\mu\mu + \tfrac{3}{2}\mu\lambda - \tfrac{1}{4}\lambda\lambda)$$

gegeben ist, mithin die mittlere Winkelgeschwindigkeit dem Ausdrucke $\left(\frac{d\psi}{dt}\right)$, nach Weglassung der darin enthaltenen periodischen Glieder, gleich ist. Die Differentiation giebt, da die Constanten als variabel angesehen werden:

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{d\varphi_0}{dt} \pm \sqrt{\left(\frac{g}{r}\right)}(t-t_0)\tfrac{1}{2}\left((\mu-3\lambda)\frac{d\mu}{dt} - (3\mu-\lambda)\frac{d\lambda}{dt}\right)$$
$$\mp \sqrt{\left(\frac{g}{r}\right)}(1-\tfrac{1}{4}\mu\mu + \tfrac{3}{2}\mu\lambda - \tfrac{1}{4}\lambda\lambda)\left(1-\frac{dt_0}{dt}\right).$$

Aus (101, *b.*) folgt aber

$$(104, a.)\qquad \tfrac{1}{2}(\mu-3\lambda)\frac{d\mu}{dt} + \tfrac{1}{2}(\lambda-3\mu)\frac{d\lambda}{dt}$$
$$= \mp\tfrac{3}{2}n(\mu\mu-\lambda\lambda).\{\sin\beta\sin 2x - \mu\cos\beta\cos\alpha(\cos x - \cos 3x)$$
$$\pm\lambda\cos\beta\sin\alpha(\sin x + \sin 3x)\},$$

und hieraus durch Integration, wenn man die willkürliche Constante durch die Werthe für $u = K$ bestimmt:

$$(104, b.)\qquad 1-\tfrac{1}{4}(\mu^2-3\mu\lambda+\lambda^2) =$$
$$1-\tfrac{1}{4}(\mu_1^2-3\mu_1\lambda_1+\lambda_1^2)\mp\tfrac{3}{2}n\sqrt{\left(\frac{r}{g}\right)}(\mu\mu-\lambda\lambda)(\tfrac{1}{2}\sin\beta - \tfrac{4}{3}\mu\cos\beta\cos\alpha_1)$$
$$\mp\tfrac{3}{2}n\sqrt{\left(\frac{r}{g}\right)}(\mu\mu-\lambda\lambda)\{\tfrac{1}{2}\sin\beta\cos 2x + \mu\cos\beta\cos\alpha(\sin x - \tfrac{1}{3}\sin 3x)$$
$$\pm\lambda\cos\beta\sin\alpha(\cos x + \tfrac{1}{3}\cos 3x)\}.$$

Ferner folgt aus (101, *a.*), mit Hülfe von (104, *a.*):

$$(104, c.)\quad \frac{d\varphi_0}{dt} \pm \sqrt{\left(\frac{g}{r}\right)}\left(1-\tfrac{1}{4}\mu\mu+\tfrac{3}{2}\mu\lambda-\tfrac{1}{4}\lambda\lambda\right)\frac{dt_0}{dt}$$
$$\pm\sqrt{\left(\frac{g}{r}\right)}(t-t_0)\cdot\tfrac{1}{2}\left((\mu-3\lambda)\frac{d\mu}{dt}-(3\mu-\lambda)\frac{d\lambda}{dt}\right)$$
$$= -n\cdot\left\{\begin{array}{l} \sin\beta\cdot\left[\left(\frac{\mu-\lambda}{\mu+\lambda}\right)\left(1+\tfrac{3}{2}\mu\lambda\right)\cos 2x\right] \\ +\mu\cos\beta\cos\alpha\cdot\left[\left(-\frac{\mu+3\lambda}{\mu+\lambda}+\tfrac{5}{8}\mu\mu-\tfrac{5}{8}\mu\lambda+\tfrac{7}{8}\lambda\lambda\right)\sin x\right. \\ \left.-\left(\frac{\mu-\lambda}{\mu+\lambda}-\tfrac{3}{16}\mu\mu+\tfrac{5}{8}\mu\lambda-\tfrac{7}{16}\lambda\lambda\right)\sin 3x-\tfrac{7}{16}(\mu-\lambda)^2\sin 5x\right] \\ \pm\lambda\cos\beta\sin\alpha\cdot\left[\left(\frac{3\mu+\lambda}{\mu+\lambda}-\tfrac{7}{8}\mu\mu+\tfrac{5}{2}\mu\lambda-\tfrac{5}{8}\lambda\lambda\right)\cos x\right. \\ \left.+\left(\frac{\mu-\lambda}{\mu+\lambda}+\tfrac{7}{16}\mu\mu-\tfrac{5}{8}\mu\lambda+\tfrac{3}{16}\lambda\lambda\right)\cos 3x+\tfrac{7}{16}(\mu-\lambda)^2\cos 5x\right] \end{array}\right\}.$$

Hier hat sich der Factor $\mu-\lambda$ im Nenner aufgehoben, wie es nothwendig ist, weil offenbar $\frac{d\psi}{dt}$ für $\mu=\lambda$ ***endlich*** bleiben mufs, während $\frac{d\varphi_0}{dt}$ und $\frac{dt_0}{dt}$ unbestimmt werden durften.

Behält man nun aus den Gleichungen (*b.* und *c.*) die nicht periodischen Glieder bei, so ergiebt sich endlich für den gesuchten mittlern Werth von $\frac{d\psi}{dt}$:

$$\frac{d\psi}{dt} = \mp\sqrt{\frac{g}{r}}\cdot\left(1-\tfrac{1}{4}\mu_1\mu_1+\tfrac{3}{2}\mu_1\lambda_1-\tfrac{1}{4}\lambda_1\lambda_1\right)-n\sin\beta\left(1-\tfrac{3}{2}\mu\mu+\tfrac{1}{2}\mu\lambda\right)$$
$$-2n\cos\beta\cos\alpha\cdot\mu(\mu\mu-\lambda\lambda),$$

der mit Einführung von ϱ und ω für μ und λ in den folgenden übergeht:

$$(104, d.)\quad \frac{d\psi}{dt} = \mp\sqrt{\frac{g}{r}}\cdot\left(1-\tfrac{1}{16}\varrho^2+\tfrac{3}{8}\varrho\omega-\tfrac{1}{16}\omega^2\right)-n\sin\beta\cdot\left(1-\tfrac{3}{8}\varrho^2+\tfrac{1}{8}\varrho\omega\right)$$
$$-\tfrac{1}{4}n\cos\beta\cos\alpha\cdot\varrho(\varrho^2-\omega^2).$$

Diese Gleichung besteht wieder, sowohl wenn $\varrho>\omega$, d. h. das Pendel von dem höchsten Puncte seiner Bahn ausgeht, als wenn $\varrho<\omega$ ist.

Theilt man dem Pendel dieselbe Anfangsgeschwindigkeit ω in derselben, durch ϱ und α bestimmten Anfangslage, einmal nach links hin, dann nach rechts mit, so wird seine Winkelgeschwindigkeit um die Gröfse

$$n\sin\beta\left(1-\tfrac{3}{8}\varrho^2+\tfrac{1}{8}\varrho\omega\right)+\tfrac{1}{4}n\cos\beta\cos\alpha\cdot\varrho(\varrho^2-\omega^2),$$

im ersten Falle durch die Drehung der Erde ***vermindert,*** im andern dagegen ***vermehrt.*** Setzt man, um zu den Resultaten für das ebene Pendel zu ge-

langen, $\omega = 0$, so wird diese Differenz:

$$n \sin\beta (1 - \tfrac{3}{8}\varrho^2) + \tfrac{1}{4} n \cos\beta \cos\alpha . \varrho^3 .$$

Dagegen für $\varrho = 0$ ist sie, unabhängig von ω:

$$n \sin\beta .$$

Was drittens die ***Schwingungsdauer*** betrifft, so ist solche ebenfalls durch n afficirt. Die Zeit, welche zwischen zwei um ein Intervall $u = 4K$ entfernten höchsten Erhebungen verfliefst, wird durch

$$[t]_{u=K}^{u=5K} = \left[\frac{1}{m} u + t_0\right]_{,}'' = \frac{5K_5}{m_5} - \frac{K_1}{m_1} + [t_0]_K^{5K} = \frac{4K_1}{m_1} + 5 . \left[\frac{K}{m}\right]_{,}'' + [t_0]_{,}''$$

ausgedrückt, wo die Indices denen von λ, μ, etc. entsprechen sollen. Erwägt man, dafs $\frac{K}{m} = \frac{1}{2}\pi \sqrt{\left(\frac{r}{g}\right)} \{1 + \frac{1}{4}\mu\mu + \frac{1}{4}\lambda\lambda + \cdots\}$ bis auf Gröfsen 4ter Ordnung constant ist, so erhält man einfach:

$$[t]_K^{5K} = \frac{4K}{m} + [t_0]_K^{5K} .$$

Zwischen diesen Grenzen integrirt, ergiebt sich aber aus (101, *a.*):

$$[t_0]_K^{5K} = \pm n \frac{r}{g} \cdot \frac{2\mu\lambda}{\mu\mu - \lambda\lambda} \cdot \{ - \sin\beta . \tfrac{1}{4}(\mu\mu - \lambda\lambda) . 2\pi - \lambda \cos\beta \cos\alpha . \mu\lambda^2 . 2\pi \},$$

folglich, wegen des angegebenen Werths von $\frac{K}{m}$:

$$(105.) \quad [t]_K^{5K} = 2\pi \sqrt{\left(\frac{r}{g}\right)} \cdot \left[(1 + \tfrac{1}{4}\mu\mu + \tfrac{1}{4}\lambda\lambda) \mp n \sqrt{\left(\frac{r}{g}\right)} \cdot \left\{ \tfrac{1}{2}\mu\lambda \sin\beta + \frac{2\mu^2\lambda^3}{\mu\mu - \lambda\lambda} \cos\beta \cos\alpha \right\} \right] .$$

Drückt man wieder λ und μ durch ϱ und ω aus, so findet sich, dafs die Schwingungsdauer, die ohne die Drehung der Erde durch

$$2\pi \sqrt{\left(\frac{r}{g}\right)} (1 + \tfrac{1}{16}\varrho^2 + \tfrac{1}{16}\omega^2)$$

ausgedrückt wird, durch die Wirkung dieser Drehung in dem Verhältnisse

$$1 : n \sqrt{\left(\frac{r}{g}\right)} \left\{ \tfrac{1}{8}\varrho\omega \sin\beta + \tfrac{1}{4} \cdot \frac{\varrho^2\omega^3}{\varrho^2 - \omega^2} \cdot \cos\beta \cos\alpha \right\}$$

bei links drehender Bewegung ***vermehrt,*** bei rechts drehender vermindert wird. Für das ebene Pendel bleibt die Dauer demnach ungeändert; wie es ebenfalls früher gefunden wurde.

Aus der Schwingungsdauer des Pendels und seiner mittlern Horizontalgeschwindigkeit kann man nun auch noch leicht die Dauer eines ganzen Umlaufs $= \frac{2\pi}{\left(\frac{d\psi}{dt}\right)}$, und den Winkel $= [\varphi]_K^{5K}$, den die Projection während einer ganzen Oscillation beschreibt, finden, ohne weiter auf die Gleichungen (101.) zurückkommen zu müssen.

Königsberg in Pr. im März 1854.

10.
Eine Eigenschaft der Zahlen.

Falls folgende Bemerkungen über eine Eigenschaft der Zahlen noch nicht ausgesprochen sein sollten, mögen sie hier eine kleine Stelle finden.

I. Der Rest, welcher bleibt, wenn man eine Zahl mit 9 dividirt, ist bekanntlich der Summe ihrer Ziffern gleich; indem *alle* Potenzen von 10, mit welchen die Ziffern verbunden sind, mit 9 dividirt, den Rest 1 lassen. Also, wenn man die Ziffern einer Zahl nach Belieben *versetzt,* läfst die daraus entstehende neue Zahl, mit 9 dividirt, *denselben* Rest. ***Mithin geht der Unterschied der neuen und der ursprünglichen Zahl mit 9 auf.***

Beispiel.

47162	47162	47162	47162
−26174	−76214	−14276	−64271
= + 20988	= − 29052	= + 32886	= − 17109
= + 9.2332	= − 9.3228	= + 9.3654	= − 9.1901.

II. Der Rest, welcher bleibt, wenn man eine Zahl mit 11 dividirt, ist der *Summe* ihrer Ziffern gleich, wenn man diesen Ziffern, von der Rechten zur Linken, abwechselnd die Zeichen + und − vorsetzt; denn $10^0 = 1$ läfst den Rest +1, $10' = 10^1$ läfst den Rest −1, $10^2 = 100$ läfst den Rest +1, u. s. w. Jeder Ziffer kommt hier für den Rest der Division mit 11, je nach ihrer *Stelle,* ein *bestimmtes* Zeichen zu. Verwechselt man daher hier die Ziffern nach Belieben, jedoch so, dafs jede dasjenige Zeichen bekommt, welches ihr ihrer Stelle nach gebührt, während es zugleich dem Zeichen der Ziffer in der ursprünglichen Zahl *entgegengesetzt* ist, so bleiben zwar die Reste für die einzelnen Ziffern dieselben, also auch ihre Summe, aber diese Summe hat jetzt das entgegengesetzte Zeichen. *Addirt* man daher die neue Zahl und die ursprüngliche, so ***geht die Summe dieser beiden Zahlen mit 11 auf,*** weil die beiden Zahlen *dieselben* Reste lassen; aber mit entgegengesetzten Zeichen, so dafs sie sich *aufheben.*

Die Regel, *jeder* Ziffer der neuen Zahl dasjenige Zeichen zu geben, welches ihrem Zeichen in der ursprünglichen Zahl entgegengesetzt ist, während

es zugleich der ***Stelle*** der Ziffer entspricht, ist aber nur dann ausführbar, wenn die ***Anzahl der Ziffern*** der ursprünglichen Zahl ***gerade*** ist; denn ist sie ***ungerade,*** so kommt das Zeichen + in der ursprünglichen Zahl einmal öfter vor, als das Zeichen —, mithin in der neuen Zahl einmal weniger oft, als in der ursprünglichen, so dafs ***eine*** der Ziffern in der neuen Zahl nicht das ihrer Stelle gebührende Zeichen bekommen kann. In diesem Fall mufs man der gegebenen Zahl eine ***Null vorsetzen;*** was an derselben nichts ändert; dann ist die Anzahl ihrer Ziffern ***gerade,*** und die Regel kann befolgt werden.

Beispiele.

	− + − + − +	− + − + − +	− + − + − +
1)	8 5 3 2 1 4	8 5 3 2 1 4	8 5 3 2 1 4
	+ 2 8 4 1 5 3	+ 5 1 4 3 2 8	+ 4 3 2 8 5 1
	= 1 1 3 7 3 6 7	= 1 3 6 7 5 4 2	= 1 2 8 6 0 6 5
	= 11 . 1 0 3 3 9 7	= 11 . 1 2 4 3 2 2	= 11 . 1 1 6 9 1 5
	+ − + − +	+ − + − +	+ − + − +
2)	5 3 2 1 4	5 3 2 1 4	5 3 2 1 4
	+ 1 5 3 4 2	+ 3 4 1 5 2	+ 1 2 3 5 4
	= 6 8 5 5 6	= 8 7 3 6 6	= 6 5 5 6 8
	= 11 . 6 2 3 2 + 4	= 11 . 7 9 4 2 + 4	= 11 . 5 9 6 0 + 8.

In den Beispielen (2.) bekommt die letzte Ziffer nicht das ihrer Stelle gebührende Zeichen, und daher geht die Summe der ursprünglichen und der neuen Zahl ***nicht*** mit 11 auf. Man setze also der gegebenen Zahl eine Null vor. Dann verhält es sich wie folgt:

− + − + − +	− + − + − +	− + − + − +
0 5 3 2 1 4	0 5 3 2 1 4	0 5 3 2 1 4
+ 2 1 5 0 4 3	+ 4 1 5 3 2 0	+ 5 0 2 1 4 3
= 2 6 8 2 5 7	= 4 6 8 5 3 4	= 5 5 5 3 5 7
= 11 . 2 4 3 8 7	= 11 . 4 2 5 9 4	= 11 . 5 0 4 8 7

Berlin, im August 1854.

11.

Bemerkungen über Directrix- und Fufspunctenlinien.

(Von dem Herrn Dr. *Raabe*, Prof. der Math. an der Universität zu Zürich.)

Für die Fufspunctenlinien einer unterlegten Linie giebt es, ihren Flächen-Inhalt betreffend, ein von ***Steiner*** herrührendes Theorem, welches, wie Alles was von diesem ausgezeichneten Geometer herstammt, den Stempel der Genialität trägt. Einem allgemeinen analytischen Nachweise, so wie einer Erweiterung des Theorems, sind die hier folgenden Bemerkungen bestimmt.

Zur Rechtfertigung der Überschrift bemerke ich, dafs dasselbe Theorem, so wie seine mitzutheilende Erweiterung, auch auf die ***Directrixlinien*** ausgedehnt werden kann, indem nach meiner, im 48. Bande dieses Journals befindlichen Abhandlung über die in Rede stehenden Linien, jede ***Directrixlinie*** einer bestimmten unterlegten Linie, unter Beibehaltung desselben ***Pols***, zugleich ***Fufspunctenlinie*** einer andern, aus den der erstern leicht herzustellenden Linie ist.

Nach Nr. 11. Gleichung (*C.*) der genannten Abhandlung hat man, wenn

$$(1.) \qquad f(\xi, v) = 0$$

eine zwischen den rechtwinkligen, respective mit den Coordinaten-Axen X und Y parallel laufenden Coordinaten gegebene Linie vorstellt, die in der erwähnten Abhandlung die *„unterlegte"* und nach ***Steiner*** die *„Basis"* genannt wird, diese Gleichung mit den zwei folgenden:

$$(2.) \qquad \begin{cases} (y'-\beta)v_1 + x' - \alpha = 0, \\ (y'-\beta)(y'-v) + (x'-\alpha)(x'-\xi) = 0, \end{cases}$$

wo $v_1 = \frac{dv}{d\xi}$ ist, durch Elimination von ξ und v zu verbinden, um als End-Ergebnifs die endliche Gleichung zwischen x' und y' der verlangten Fufspunctenlinie zur unterlegten in (1.) zu finden; falls nämlich die Coordinaten α und β (respective parallel mit den Coordinaten-Axen X und Y) die Lage des ***Pols*** bestimmen.

Wenn zur Vereinfachung der vorliegenden Mittheilung die Gleichung der Fufspunctenlinie durch sogenannte Polarcoordinaten dargestellt und der Anfangspunct dieses Coordinatensystems im Pole selbst angenommen wird,

so ist in den Gleichungen (2.),

$$x' = \alpha + r\cos u, \quad y' = \beta + r\sin u$$

zu setzen, wo r den Radiusvector und u die Neigung desselben gegen die Coordinaten-Axe X vorstellt, so dafs die Gleichungen (2.) nunmehr in folgende übergehen:

$$(3.) \qquad \frac{df(\xi,v)}{d\xi}\sin u - \frac{df(\xi,v)}{dv}\cos u = 0$$

und

$$(4.) \qquad (\xi-\alpha)\cos u + (v-\beta)\sin u = r.$$

Aus den Gleichungen (1. und 3.) stelle man sich ξ und v als Functionen von u (die offenbar von α und β unabhängig sein werden) ermittelt und die Ergebnisse in die Gleichung (4.) eingeführt vor; dann wird diese Gleichung die verlangte sogenannte ***Polargleichung*** der Fufspunctenlinie zu der unterlegten in (1.) sein.

Ein Flächen-Element dieser Linie ist bekanntlich durch $\frac{1}{2}r^2du$ gegeben. Bezeichnet man sonach durch F die endliche Fläche des gemischten Dreiecks, dessen zwei Schenkel zwei Werthe von r sind, die den Annahmen $u = m$ und $u = n$ beziehlich entsprechen, und dessen Basis das innerhalb dieser Radiivectoren enthaltene Peripheriestück der Fufspunctenlinie ist, so hat man folgende Bestimmungsgleichung besagter endlicher Fläche:

$$F = \tfrac{1}{2}\int_m^n \{(\xi-\alpha)\cos u + (v-\beta)\sin u\}^2\, du,$$

welche nach Feststellung folgender Abkürzungen:

$$(5.) \quad \begin{cases} A = \int_m^n (\xi\cos u + v\sin u)\cos u\, du, \\ B = \int_m^n (\xi\cos u + v\sin u)\sin u\, du, \\ C = \int_m^n (\xi\cos u + v\sin u)^2\, du, \end{cases}$$

in die folgende übergeht:

$$F = \tfrac{1}{2}C - A\alpha - B\beta - \tfrac{1}{2}\int_m^n (\alpha\cos u + \beta\sin u)^2\, du.$$

Wird hier

$$(6.) \qquad \alpha = \alpha' + a \quad \text{und} \quad \beta = \beta' + b$$

gesetzt, und ist F_1 der Werth von F bei der Annahme $a = b = 0$, d. h. wenn

$\alpha = \alpha'$ und $\beta = \beta'$ ist, so hat man, da nach dem Vorausgeschickten A, B und C von α, β unabhängig sind, dem *Taylor*'schen Satze für zwei Variabeln gemäfs, folgende Bestimmungsgleichung:

$$F = F' + \frac{dF'}{d\alpha'}a + \frac{dF'}{d\beta'}b + \tfrac{1}{2}\frac{d^2F'}{d\alpha'^2}a^2 + \frac{d^2F'}{d\alpha'\,d\beta'}ab + \tfrac{1}{2}\frac{d^2F'}{d\beta'^2}b^2,$$

wo

$$(7.)\qquad F = \tfrac{1}{2}C - A\alpha' - B\beta' + \tfrac{1}{2}\int_m^n (\alpha'\cos u + \beta'\sin u)^2\,du$$

gesetzt ist, und wo A, B, C auch von α' und β' unabhängig sind.

Aus dieser Gleichung (7.) ergiebt sich dann:

$$(8.)\qquad \begin{cases} \dfrac{dF'}{d\alpha'} = -A + \displaystyle\int_m^n (\alpha'\cos u + \beta'\sin u)\cos u\,du, \\ \dfrac{dF'}{d\beta'} = -B + \displaystyle\int_m^n (\alpha'\cos u + \beta'\sin u)\sin u\,du, \end{cases}$$

$$\frac{d^2F'}{d\alpha'^2} = \int_m^n \cos u^2\,du, \quad \frac{d^2F'}{d\alpha'\,d\beta'} = \int_m^n \cos u\sin u\,du, \quad \frac{d^2F'}{d\beta'^2} = \int_m^n \sin u^2\,du;$$

folglich erhält man:

$$F = F' + \frac{dF'}{d\alpha'}a + \frac{dF'}{d\beta'}b + \tfrac{1}{2}\int_m^n (a\cos u + b\sin u)^2\,du.$$

Verfügt man über die Gröfsen α', β' so, dafs sie den Gleichungen:

$$\frac{dF'}{d\alpha'} = 0, \quad \frac{dF'}{d\beta'} = 0$$

genügen, die vermöge der Gleichungen in folgende übergehen:

$$(9.)\qquad \begin{cases} \alpha'\displaystyle\int_m^n \cos u^2\,du + \beta'\int_m^n \cos u\sin u\,du = A, \\ \alpha'\displaystyle\int_m^n \cos u\sin u\,du + \beta'\int_m^n \sin u^2\,du = B, \end{cases}$$

d. h. nimmt man aus diesen Gleichungen die Werthe von α' und β' und führt diese Bestimmungs-Ergebnisse in die obige Gleichung (7.), welche F' angiebt, ein, so erhält man:

$$(10.)\qquad F = F' + \tfrac{1}{2}\int_m^n (a\cos u + b\sin u)^2\,du.$$

Aus diesem Ergebnisse zeigt sich unmittelbar, d. h. ohne Zuziehung der aus der Differentialrechnung bekannten Hülfssätze, dafs F' der *Minimum*-

werth von F ist. Wenn nämlich der Pol durch die Coordinaten α' und β' den Gleichungen (9.) gemäfs bestimmt wird; so hat das oben erwähnte gemischte Dreieck innerhalb der festgestellten Grenzen m und n die ***kleinste*** Fläche, kleiner als bei jeder andern Annahme des Pols, für dieselben Grenzwerthe m und n.

Dieses vorausgeschickt, wenden wir uns nun dem eigentlichen Gegenstande der vorliegenden Note zu.

Vollzieht man das bestimmte Integral in (10.) und führt folgende Gleichung ein:

$$(11.)\quad \{n-m+\tfrac{1}{2}(\sin 2n-\sin 2m)\}a^2-(\cos 2n-\cos 2m)ab + \{n-m-\tfrac{1}{2}(\sin 2n-\sin 2m)\}b^2 = \lambda^2,$$

so bekommt die Gleichung (10.) die Form

$$(12.)\quad F = F' + \tfrac{1}{4}\lambda^2.$$

Erklärt man nun λ für eine Constante, was bei unendlich vielen Annahmen über a und b der Gleichung (11.) gemäfs zu realisiren möglich ist, so stellt dieselbe Gleichung, falls a und b rechtwinklige, respective mit den Coordinaten-Axen X und Y parallel laufende Coordinaten von Puncten sind, eine Linie zweiten Grades mit einem ***Mittelpuncte*** dar, wo der Mittelpunct mit dem Minimumpol α', β' zusammenfällt. Es zeigt sich demnach aus dieser Gleichung (12.), dafs, wenn der Pol einer Fufspunctenlinie in irgend einem der Peripheriepuncte dieser Linie vom zweiten Grade angenommen und von demselben aus das oben angedeutete gemischte Dreieck construirt wird, jedes dieser Dreiecke ***denselben*** Flächen-Inhalts-Ausdruck rechterhand in (12.) hat, falls die Begrenzungen m und n aller dieser Dreiecke dieselben bleiben.

Wegen der näheren Beschaffenheit dieser Linie zweiten Grades mit einem Mittelpuncte, zeigt sich, wenn man nach den allgemein bekannten Vorschriften verfährt, leicht, dafs sie eine ***Ellipse*** ist. Der Mittelpunct derselben liegt, wie schon gesagt, im ***Minimumpole,*** dessen Coordinaten α' und β' aus den Gleichungen (9.) zu entnehmen sind. Die Neigung der grofsen Axe der Ellipse gegen die Abscissen-Axe X ergiebt sich, durch μ dargestellt, aus der Gleichung

$$(13.)\quad \operatorname{tang} 2\mu = \operatorname{tang}(n+m).$$

Wenn ferner N die halbe grofse, und M die halbe kleine Axe der Ellipse

ist, so findet sich leicht:

$$(14.) \quad N = \frac{\lambda}{\sqrt{(n-m-\sin(n-m))}} \quad \text{und} \quad M = \frac{\lambda}{\sqrt{(n-m+\sin(n-m)}}.$$

Wenn endlich durch ε das Excentricitätsverhältnifs der Ellipse bezeichnet wird, so erhält man

$$(15.) \quad \varepsilon = \sqrt{\frac{2\sin(n-m)}{n-m+\sin(n+m)}}.$$

Dieses Alles vorausgesetzt, lautet der *erweiterte Steinersche Satz* wie folgt:

Wenn zu einer unterlegten Linie die eben beschriebene Ellipse, und von irgend einem Peripheriepuncte derselben als Pol, die betreffende Fufspunctenlinie hergestellt ist, so wird der Flächen-Inhalt je eines, einem dieser Pole zugehörigen gemischten Dreiecks, falls dessen Begrenzung überall dieselben zwei Winkel oder Kreisbogen vom Radius 1 sind, welche oben durch m und n bezeichnet wurden, stets gleich grofs sein.

Die Ellipse geht in einen Kreis über, wenn deren Excentricitätsverhältnifs gleich 0, also nach der Gleichung (15.),

$$(16.) \quad \sin(n-m) = 0$$

ist; und da n nothwendig verschieden von m sein mufs, so ergiebt sich:

$$n-m = \pi, \quad \text{oder auch} \quad n-m = 2\pi;$$

wo die letztere Bestimmung nur dann, geometrisch betrachtet, von Werth ist, wenn $m = 0$ angenommen wird.

Bei Zugrundelegung dieser Gleichung (15.) geben die Gleichungen (9.) folgende Bestimmungen:

$$\alpha' = \frac{2A}{n-m}, \quad \beta' = \frac{2B}{n-m}.$$

Zieht man um diesen Pol, als Centrum, einen Kreis von beliebigem Radius, und nimmt jeden Peripheriepunct des Kreises als Pol einer Fufspunctenlinie zur unterlegten Linie in (1.) an: so ist der Flächen-Inhalt jeder dieser Fufspunctenlinien, oder je ihrer symmetrischen Hälfte, *constant;* worin dann die engere Fassung des oben genannten *Steiner*schen Satzes für Fufspunctenlinien besteht.

Zürich, im October 1854.

12.

Discussion über krumme Flächen in Beziehung auf Directrix- und Fufspunctenflächen.

(Von dem Herrn Dr. *Raabe*, Prof. der Math. an der Universität zu Zürich.)

Eben wie bei einer *Linie*, kann auch bei einer *Fläche* von den ihr zugehörigen *Directrix*- und *Fufspunctenflächen* die Rede sein. Da ich über diese, wie im 48. Bande über *Linien*, zu beachtenswerthen Sätzen ihres gegenseitigen Zusammenhanges gekommen bin, so theile ich solche im Vorliegenden mit; schicke jedoch eine unzweideutige Begriffsbestimmung derselben voraus.

I. Wenn man zu einer unterlegten *Fläche* A und zu einem fixen Puncte, *Pol* genannt, eine Fläche D von solcher Beschaffenheit sucht, dafs sämmtliche Puncte der Oberfläche A eben so weit vom Pole als von den Puncten der Oberfläche D abstehen, so nenne ich die letztere die *Directrixfläche* jener unterlegten A.

II. Legt man durch sämmtliche Puncte der Oberfläche A *tangirende Ebenen* an dieselbe, und zieht vom Pole aus Perpendikel auf sämmtliche tangirende Ebenen, so nenne ich die Gesammtheit dieser Begegnungspuncte die *Fufspunctenfläche* der unterlegten A, oder kürzer, die Fläche F.

Dieses vorausgeschickt, stelle man sich ein orthogonales drei-axiges Coordinatensystem vor, auf welches sämmtliche hier zur Sprache kommenden räumlichen Objecte werden bezogen werden.

1.

Man stelle den Pol durch die Coordinaten α, β, γ fest, die bezüglich mit den Coordinaten-Axen X, Y, Z parallel sind; und gleichfalls parallel mit diesen Axen stelle man durch ξ, v, ζ die Coordinaten irgend eines Puncts der Oberfläche der unterlegten Fläche A vor, deren Gleichung durch

$$(1.) \qquad f(\xi, v, \zeta) = 0$$

gegeben sein soll, wo f ein Functionszeichen der drei Coordinaten bedeutet.

Dann wird die ***Verbindungs-Gerade*** des Pols mit einem Puncte (ξ, υ, ζ) der Fläche durch

$$\{(\xi-\alpha)^2+(\upsilon-\beta)^2+(\zeta-\gamma)^2\}^{\frac{1}{2}}$$

ausgedrückt.

Die Coordinaten irgend eines Puncts der Oberfläche der gesuchten Directrixfläche D, gleichfalls parallel laufend mit den erwähnten Coordinaten-Axen, sollen durch x, y, z bezeichnet werden. Dann wird die ***Verbindungs-Gerade*** des vorhin erwähnten Puncts (ξ, υ, ζ) mit einem Puncte (x, y, z) der Fläche D durch

$$\{(x-\xi)^2+(\upsilon-y)^2+(z-\zeta)^2\}^{\frac{1}{2}}$$

ausgedrückt.

Sind nun die beiden Puncte (ξ, υ, ζ), (x, y, z) beider Flächen A und D ***zusammengehörig***, so mufs die zuletzt ausgedrückte Gerade, erstens, der zuerst ausgedrückten Geraden gleich, und zweitens, mufs sie in der Stellung eine Normale zur Fläche D im Puncte (x, y, z) sein, damit D die ***Directrixfläche*** zur unterlegten A (nach I.) sei.

Drückt man die Differentialgleichung der Fläche D durch

$$(2.) \qquad dz = p\,dx + q\,dy$$

aus, so giebt die eben erwähnte Anforderung des Normalseins folgende Gleichungen:

$$(3.) \qquad x-\xi+p(z-\zeta)=0, \quad \text{und} \quad y-\upsilon+q(z-\zeta)=0,$$

und die Anforderung der Gleichheit beider Verbindungs-Geraden giebt die Gleichung

$$(\xi-\alpha)^2+(\upsilon-\beta)^2+(\zeta-\gamma)^2 = (x-\xi)^2+(y-\upsilon)^2+(z-\zeta)^2,$$

welche auch mit

$$(4.) \quad 2(x-\alpha)\xi+2(y-\beta)\upsilon+2(z-\gamma)\zeta = x^2+y^2+z^2-\alpha^2-\beta^2-\gamma^2$$

gleichbedeutend ist.

Zieht man aus den Gleichungen (3. und 4.) ξ, υ, ζ als Functionen von x, y, z, p, q, und führt sie in (1.) ein, so erhält man eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung, deren Integralgleichung die verlangte, jetzt in Rede stehende Lösung geben wird. Da aber die Unbestimmtheit der Function f in der Gleichung (1.) der erwähnten Integration im Wege steht, so betreten wir den ähnlichen Weg, der bei Gelegenheit der Angabe der

Directrix*linie* befolgt wurde, d. h. wir differentiiren die Gleichung (1.) *partiell*, einmal nach x, und einmal nach y, wobei wir uns ξ, v, ζ als Functionen dieser Variabeln, den Gleichungen (3. und 4.) gemäfs, ersetzt vorstellen.

2.

Man differentiire zuerst die Gleichung (4.) nach sämmtlichen Variabeln ξ, v, ζ, x, y, z, und berücksichtige die Werthform von dz aus der Gleichung (2.). Dies giebt unmittelbar folgendes Resultat:

$$(x-\alpha)\,d\xi+(y-\beta)\,dv+(z-\gamma)\,d\zeta-\{x-\xi+p(z-\zeta)\}\,dx \\ -\{y-v+q(z-\zeta)\}\,dy = 0,$$

welches, mit Beachtung der Gleichung (3.), in folgendes übergeht:

$$(5.)\qquad (x-\alpha)\,d\xi+(y-\beta)\,dv+(z-\gamma)\,d\zeta = 0.$$

Stellt man ferner folgende Gleichungen fest:

$$(6.)\qquad dp = r\,dx+s\,dy,\quad dq = s\,dx+t\,dy,$$

so geben die Gleichungen (3.) folgende vollständige Differentiations-Ausdrücke:

$$(7.)\qquad d\xi+p\,d\zeta = A\,dx+B\,dy,\quad dv+q\,d\zeta = B\,dx+C\,dy;$$

wo der Kürze wegen

$$(8.)\qquad \begin{cases} A = 1+p^2+(z-\zeta)\,r, \\ B = pq+(z-\zeta)\,s, \\ C = 1+q^2+(z-\zeta)\,t \end{cases}$$

gesetzt ist.

Löset man die Gleichungen (5. und 7.) in Bezug auf $d\xi$, dv, $d\zeta$ auf, so gelangt man zu folgenden Bestimmungen der jetzt in Rede stehenden partiellen Differentialquotienten:

$$\frac{d\xi}{dx} = +\frac{(Aq-Bp)(y-\beta)-A(z-\gamma)}{p(x-\alpha)+q(y-\beta)-(z-\gamma)},\qquad \frac{d\xi}{dy} = +\frac{(Bq-Cp)(y-\beta)-B(z-\gamma)}{p(x-\alpha)+q(y-\beta)-(z-\gamma)},$$

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{(Aq-Bp)(x-\alpha)+B(z-\gamma)}{p(x-\alpha)+q(y-\beta)-(z-\gamma)},\qquad \frac{dv}{dy} = -\frac{(Bq-Cp)(x-\alpha)+C(z-\gamma)}{p(x-\alpha)+q(y-\beta)-(z-\gamma)},$$

$$\frac{d\zeta}{dx} = +\frac{A(x-\alpha)+B(y-\beta)}{p(x-\alpha)+q(y-\beta)-(z-\gamma)},\qquad \frac{d\zeta}{dy} = +\frac{B(x-\alpha)+C(y-\beta)}{p(x-\alpha)+q(y-\beta)-(z-\gamma)}.$$

Differentiirt man nunmehr, wie am Schlufs voriger Nummer angedeutet, die Gleichung (1.) partiell nach x, so wie partiell nach y, so erhält man, unter Beachtung der so eben aufgestellten Bestimmungen, folgende zwei Gleichungen:

$$(9.)\qquad Af'+Bf'' = 0 \quad\text{und}\quad Bf'+Cf'' = 0,$$

wo der Kürze wegen

$$f' = \{z-\gamma-q(y-\beta)\}\frac{df(\xi,v,\zeta)}{d\xi}+q(x-\alpha)\frac{df(\xi,v,\zeta)}{dv}-(x-\alpha)\frac{df(\xi,v,\zeta)}{d\zeta},$$

$$f'' = p(y-\beta)\frac{df(\xi,v,\zeta)}{d\xi}+\{z-\gamma-p(x-\alpha)\}\frac{df(\xi,v,\zeta)}{dv}-(y-\beta)\frac{df(\xi,v,\zeta)}{d\zeta}$$

gesetzt ist.

Diesen zwei Gleichungen (9.) geschieht, unabhängig von den partiellen Differentialquotienten zweiter Ordnung r, s, t, in allgemeinster Weise ein Genüge, wenn man die zwei Gleichungen $f'=0$, $f''=0$ feststellt; daher hat man, neben den vier Gleichungen (1, 3, 4.), noch die zwei folgenden:

$$(10.)\quad \begin{cases} \{z-\gamma-q(y-\beta)\}\frac{df}{d\xi}+q(x-\alpha)\frac{df}{dv}-(x-\alpha)\frac{df}{d\zeta} = 0, \\ p(y-\beta)\frac{df}{d\xi}+\{z-\gamma-p(x-\alpha)\}\frac{df}{dv}-(y-\beta)\frac{df}{d\zeta} = 0; \end{cases}$$

wo der Kürze wegen f statt $f(\xi, v, \zeta)$ gesetzt ist.

Eliminirt man aus diesen sechs Gleichungen ξ, v, ζ, so wie p und q, so erhält man die endliche Gleichung zwischen x, y, z, welche die Directrixfläche D zu der unterlegten Fläche A in (1.) ausdrückt. Die beiden partiellen Differentialquotienten p und q sind aus den Gleichungen (3. und 10.) leicht zu eliminiren, und es ergeben sich nach Vollziehung dieser Elimination folgende vier Gleichungen:

$$f(\xi,v,\zeta) = 0,$$

$$(x-\xi)\left\{(y-\beta)\frac{df}{d\xi}-(x-\alpha)\frac{df}{dv}\right\} = +(z-\zeta)\left\{(z-\gamma)\frac{df}{d\zeta}-(y-\beta)\frac{df}{d\zeta}\right\},$$

$$(y-v)\left\{(y-\beta)\frac{df}{d\xi}-(x-\alpha)\frac{df}{dv}\right\} = -(z-\zeta)\left\{(z-\gamma)\frac{df}{d\xi}-(x-\alpha)\frac{df}{d\zeta}\right\},$$

$$2(x-\alpha)\xi+2(y-\beta)v+2(z-\gamma)\zeta = x^2+y^2+z^2-\alpha^2-\beta^2-\gamma^2,$$

welche, wie leicht zu sehen, mit den folgenden:

$$(11.)\quad \begin{cases} f(\xi,v,\zeta) = 0, \\ (z-\gamma)\frac{df}{d\xi}-(x-\alpha)\frac{df}{d\zeta}=0, \quad (z-\gamma)\frac{df}{dv}-(y-\beta)\frac{df}{d\zeta}=0, \\ 2(x-\alpha)\xi+2(y-\beta)v+2(z-\gamma)\zeta = x^2+y^2+z^2-\alpha^2-\beta^2-\gamma^2 \end{cases}$$

gleichbedeutend sind. Eliminirt man ξ, v, ζ aus diesen Gleichungen, so erhält man die jetzt gesuchte Gleichung zwischen x, y, z der Directrixfläche D.

3.

Wir unterbrechen die allgemeine Untersuchung, und wollen vorerst das eben gefundene allgemeine Ergebnifs auf die Flächen zweiten Grades, anwenden, die einen *Mittelpunct* haben.

Diese Flächen werden, wenn der Mittelpunct in den Anfangspunct der Coordinaten und ihre Haupt-Ebenen in die Coordinaten-Ebenen gelegt werden, durch die Gleichung

$$(\alpha.) \qquad a\xi^2 + bv^2 + c\zeta^2 - 1 = 0$$

ausgedrückt. Vergleicht man diese Gleichung mit der allgemeinen in (1.), so ergeben sich folgende Bestimmungen:

$$\frac{df}{d\xi} = 2a\xi, \qquad \frac{df}{dv} = 2bv, \qquad \frac{df}{d\zeta} = 2c\zeta,$$

mithin gehen die zweite und dritte allgemeine Gleichung (11.) in

$$(\beta.) \qquad a\xi(z-\gamma) - c\zeta(x-\alpha) = 0, \quad bv(z-\gamma) - c\zeta(y-\beta) = 0$$

über; was

$$(\gamma.) \qquad a\xi = m(x-\alpha), \quad bv = m(y-\beta), \quad c\zeta = m(z-\gamma)$$

giebt; wo m einstweilen eine noch unbekannte Function von x, y, z ist. Werden diese Bestimmungen von ξ, v, ζ beziehlich mit 2ξ, $2v$, 2ζ multiplicirt und dann addirt, so erhält man, mit Beachtung der unterlegten Gleichung ($\alpha.$) und der vierten allgemeinen Gleichung in (11.), folgende Bestimmungsgleichung für m:

$$m\{x^2 + y^2 + z^2 - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2\} = 2.$$

Da jetzt m als Function von x, y, z bekannt ist, so sind es auch ξ, v, ζ; so dafs die Gleichung der gegenwärtig in Rede stehenden Directrix-fläche folgende ist:

$$(\delta.) \qquad (x^2 + y^2 + z^2 - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2)^2 - 4\left\{\frac{(x-\alpha)^2}{a} + \frac{(y-\beta)^2}{b} + \frac{(z-\gamma)^2}{c}\right\} = 0.$$

Für den besondern Fall $a = b = c$, wo die unterlegte Fläche eine ***Kugel*** vom Radius $\frac{1}{\sqrt{a}}$ ist, geht dieses allgemeinere Ergebnifs in

$$(x^2 + y^2 + z^2 - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2)^2 - \frac{4}{a}((x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2)$$

über; und wenn hier noch der Pol im Mittelpuncte der Kugel liegend angenommen wird, so dafs $\alpha = \beta = \gamma = 0$ ist, so erhält man für die Directrix-

fläche die Gleichung:

$$x^2+y^2+z^2-\frac{4}{a}=0;$$

welche abermals eine ***Kugel*** vom Radius $\frac{2}{\sqrt{a}}$ ausdrückt; was auch ohne Calcul einleuchtet.

Für einen zweiten besondern Fall, $b=c$, und wenn diese Constanten b, c, so wie a, positiv sind, wenn nämlich die Fläche zweiten Grades ein ***Rotations-Ellipsoïd*** ist, dessen Drehungs-Axe mit der Coordinaten-Axe X zusammenfällt, geht die allgemeine Gleichung (δ.) in

$$(x^2+y^2+z^2-\alpha^2-\beta^2-\gamma^2)^2-\frac{4}{b}\{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2\}$$
$$-4\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)(x-\alpha)^2=0$$

über. Verlegt man den Pol in die Drehungs-Axe, nimmt die grofse Axe der rotirenden Ellipse mit der Drehungs-Axe zusammenfallend an, und versetzt den Pol in einen der Brennpuncte der Ellipse, so erhält man $\alpha^2=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$, $\beta=0$, $\gamma=0$, und die letzte Gleichung nimmt folgende Form an:

$$(x^2+y^2+z^2-\alpha^2)^2-\frac{4}{b}(x^2+y^2+z^2-\alpha^2)+\frac{4}{b}(x^2-\alpha^2)-\frac{4}{a}(x-\alpha)^2=0,$$

oder auch folgende:

$$(x^2+y^2+z^2-\alpha^2)^2-\frac{4}{b}(x^2-y^2+z^2-\alpha^2)-4\alpha^2x^2+\frac{\gamma\alpha}{a}x-4\alpha^2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=0.$$

Löset man diese Gleichung in Bezug auf $x^2+y^2+z^2-\alpha^2$ auf, so ergeben sich folgende zwei Bestimmungen:

$$x^2+y^2+z^2-\alpha^2-2\alpha x+2\alpha^2=0,\quad x^2+y^2+z^2-\alpha^2+2\alpha x-2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=0.$$

oder auch folgende:

$$(x-\alpha)^2+y^2+z^2=0,\quad (x+\alpha)^2+y^2+z^2=\frac{4}{a}.$$

Die erste Auflösung führt auf den Pol selbst, als den Ort der Directrix, und drückt nichts Beachtenswerthes aus; die zweite aber stellt die von der Ellipse her bekannte und erwartete ***Kugelfläche*** dar, deren Mittelpunct im zweiten Brennpuncte liegt und deren Radius die ganze grofse Axe $\frac{2}{\sqrt{a}}$ der rotirenden Ellipse ist.

4.

Wenn umgekehrt die Directrixfläche D durch eine Gleichung zwischen x, y, z, wie etwa

$$(1'.) \qquad \varphi(x,y,z) = 0,$$

gegeben ist, so läfst sich die der Fläche zu Grunde gelegte Fläche A leicht herstellen. Man entwickele nämlich aus der eben aufgestellten Gleichung die partiellen Differentialquotienten p und q; welches folgende Gleichungen giebt:

$$(2'.) \qquad \frac{d\varphi(x,y,z)}{dx} + p\cdot\frac{d\varphi(x,y,z)}{dz} = 0, \qquad \frac{d\varphi(x,y,z)}{dy} + q\cdot\frac{d\varphi(x,y,z)}{dz} = 0,$$

wodurch die Gleichungen (3. in Nr. 1.) in folgende übergehen:

$$(3'.) \qquad \begin{cases} (x-\xi)\dfrac{d\varphi(x,y,z)}{dz} - (z-\zeta)\dfrac{d\varphi(x,y,z)}{dx} = 0, \\ (y-v)\dfrac{d\varphi(x,y,z)}{dz} - (z-\zeta)\dfrac{d\varphi(x,y,z)}{dy} = 0. \end{cases}$$

Wenn man diese Gleichungen (1'. und 3'.) mit der Gleichung (4. in No. 1.), nämlich mit

$$(4'.) \qquad 2(x-\alpha)\xi + 2(y-\beta)v + 2(z-\gamma)\zeta = x^2+y^2+z^2-\alpha^2-\beta^2-\gamma^2,$$

durch Elimination von x, y, z verbindet, so gelangt man zu der Gleichung der Fläche, für welche (1'.) die Directrixfläche abgiebt, d. h. zu der Gleichung der jetzt gesuchten Fläche A.

Zu demselben Ergebnisse müssen aber auch die in (11. No. 2.) zusammengestellten Gleichungen führen. Dies soll in der nächstfolgenden Nr. gezeigt werden.

5.

Wie auch die Gleichung der nunmehr herzustellenden Fläche A, für welche die Coordinaten irgend eines Puncts ξ, v, ζ sind, aussehen mag: sie wird immer, wenn partiell nach ξ und ζ, so wie partiell nach v und ζ differentiirt, vermöge der Daten der Aufgabe, auf die zweite, dritte und vierte der Gleichungen (11.) führen.

Die zweite und dritte dieser Gleichungen können auch folgendermafsen gestellt werden:

$$(12.) \qquad (z-\gamma)\frac{d\zeta}{d\xi} + x - \alpha = 0, \qquad (z-\gamma)\frac{d\zeta}{dv} + y - \beta = 0,$$

und die vierte, die wir unverändert noch einmal aufnehmen, ist folgende:

$$(13.) \qquad 2(x-\alpha)\xi + 2(y-\beta)v + 2(z-\gamma)\zeta = x^2+y^2+z^2-\alpha^2-\beta^2-\gamma^2.$$

Zieht man aus diesen drei Gleichungen x, y, z und führt die Ergebnisse in die Gleichung der Directrixfläche ein, die, wie in (Nr. 4.) geschah, durch

$$(14.) \qquad \varphi(x, y, z) = 0$$

vorgestellt werden soll, so gelangt man zu einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung zwischen den Variabeln ξ, v, ζ und deren partiellen Differentialquotienten $\frac{d\zeta}{d\xi}$, $\frac{d\zeta}{dv}$, deren Integralgleichung, oder ihr Genüge thuende Auflösung allgemeinster Art, die gegenwärtig verlangte Fläche A darstellen wird.

Dafs die auf diesem Wege zu erzielende Flächengleichung mit der in (Nr. 4.) einerlei sei, ergiebt sich wie folgt. Nämlich, da wegen der unbestimmt gebliebenen Function $\varphi(x, y, z)$ in der Gleichung (14.), die erwähnte Integration nicht unmittelbar ausführbar ist, so differentiire man die Gleichung (14.), nachdem x, y, z aus (12. und 13.) als Functionen von ξ, v, ζ, $\frac{d\zeta}{d\xi}$, $\frac{d\zeta}{dv}$ ersetzt worden sind, einmal partiell nach ξ, und einmal partiell nach v (ζ ist nämlich hier als Function von ξ und v anzusehen). Setzt man dabei zur Abkürzung:

$$(15.) \qquad \begin{cases} \frac{d\zeta}{d\xi} = p', & \frac{d\zeta}{dv} = q', \\ \frac{d^2\zeta}{d\xi^2} = r', & \frac{d^2\zeta}{d\xi dv} = s', \quad \frac{d^2\zeta}{dv^2} = t', \end{cases}$$

so dafs

$$(16.) \qquad \begin{cases} d\zeta = p'\,d\xi + q'\,dv, \\ dp' = r'\,d\xi + s'\,dv, \\ dq' = s'\,d\xi + t'\,dv \end{cases}$$

ist, und wodurch die Gleichungen (12.) folgende Formen annehmen:

$$(12'.) \qquad (z-\gamma)p' + x - \alpha = 0, \quad (z-\gamma)q' + y - \beta = 0,$$

so giebt die Gleichung (13.), wenn sie nach sämmtlichen Variabeln, d. h. vollständig differentiirt wird, mit Beachtung der erstern Gleichung in (16.), folgende Gleichung:

$$(x-\xi)\,dx + (y-v)\,dy + (z-\zeta)\,dz - \{(z-\gamma)\,p' + x - \alpha\}\,d\xi - \{(z-\gamma)\,q' + y - \beta\}\,dv = 0,$$

welche, mit Beachtung der Gleichungen (12'.), in

$$(17.) \qquad (x-\xi)\,dx + (y-v)\,dy + (z-\zeta)\,dz = 0$$

übergeht. Werden ferner dieselben Gleichungen (12'.) vollständig differentiirt,

so erhält man, vermöge der zweiten und dritten Gleichung (16.), folgende:

$$(18.)\quad \begin{cases} dx + p'dz + (z-\gamma)(r'd\xi + s'dv) = 0, \\ dy + q'dz + (z-\gamma)(s'd\xi + t'dv) = 0. \end{cases}$$

Aus diesen und aus der vorhergehenden Gleichung (17.) lassen sich dx, dy, dz durch $d\xi$ und dv linear ausdrücken; wodurch dann die gegenwärtigen partiellen Differentialquotienten folgende Bestimmungen erhalten:

$$\frac{dx}{d\xi} = \frac{(z-\gamma)\{(z-\zeta)r' + (y-v)(p's' - q'r')\}}{(x-\xi)p' + (y-v)q' - (z-\zeta)},$$

$$\frac{dy}{d\xi} = \frac{(z-\gamma)\{(z-\zeta)s' - (x-\xi)(p's' - q'r')\}}{(x-\xi)p' + (y-v)q' - (z-\zeta)},$$

$$\frac{dz}{d\xi} = \frac{-(z-\gamma)\{(x-\xi)r' + (y-v)s'\}}{(x-\xi)p' + (y-v)q' - (z-\zeta)},$$

$$\frac{dx}{dv} = \frac{(z-\gamma)\{(z-\zeta)s' - (y-v)(q's' - p't')\}}{(x-\xi)p' + (y-v)q' - (z-\zeta)},$$

$$\frac{dy}{dv} = \frac{(z-\gamma)\{(z-\zeta)t' + (x-\xi)(q's' - p't')\}}{(x-\xi)p' + (y-v)q' - (z-\zeta)},$$

$$\frac{dz}{dv} = \frac{-(z-\gamma)\{(x-\xi)s' + (y-v)t'\}}{(x-\xi)p' + (y-v)q' - (z-\zeta)},$$

Differentiirt man nun, wie schon angedeutet, die Gleichung (14.) partiell nach ξ, so wie partiell nach v, so gelangt man, mit Hülfe der eben aufgestellten Gleichungen, auf folgende:

$$\left\{(x-\xi)\frac{d\varphi}{dz} - (z-\zeta)\frac{d\varphi}{dx}\right\}r' + \left\{(y-v)\frac{d\varphi}{dz} - (z-\zeta)\frac{d\varphi}{dy}\right\}s'$$
$$+ \left\{(x-\xi)\frac{d\varphi}{dy} - (y-v)\frac{d\varphi}{dx}\right\}(p's' - q'r') = 0,$$

$$\left\{(x-\xi)\frac{d\varphi}{dz} - (z-\zeta)\frac{d\varphi}{dx}\right\}s' + \left\{(y-v)\frac{d\varphi}{dz} - (z-\zeta)\frac{d\varphi}{dy}\right\}t'$$
$$+ \left\{(x-\xi)\frac{d\varphi}{dy} - (y-v)\frac{d\varphi}{dx}\right\}(p't' - q's') = 0;$$

wo φ statt $\varphi(x, y, z)$ gesetzt ist.

Diesen zwei Gleichungen geschieht, unabhängig von den partiellen Differentialquotienten zweiter Ordnung r', s', t', in allgemeinster Weise Genüge, wenn man folgende zwei Gleichungen feststellt:

$$(19.)\quad \begin{cases} (x-\xi)\frac{d\varphi}{dz} - (z-\zeta)\frac{d\varphi}{dx} = 0, \\ (y-v)\frac{d\varphi}{dz} - (z-\zeta)\frac{d\varphi}{dy} = 0. \end{cases}$$

Es sind daher aus diesen, wie aus den Gleichuugen (13. und 14.), die Variabeln x, y, z zu eliminiren, um die verlangte Gleichung zwischen ξ, υ, ζ der Fläche $\boldsymbol{A}$ zu finden. Nun sind aber diese, der Elimination zu unterziehenden Gleichungen mit denen in (Nr. 5.) zu dem gleichen Zwecke aufgestellten einerlei: also zeigt sich die Behauptung Ausgangs von (Nr. 5.) gerechtfertigt. Die Lösung des inversen, zu dem in den (Nrn. 1. und 2.) behandelten Problems, geht als Folge der hiebei erlangten Ergebnisse hervor.

Stellt man die hier gefundenen Ergebnisse zusammen, so hat man aus folgenden vier Gleichungen:

$$(11'.)\quad \begin{cases} \varphi(x,y,z)=0, \\ (x-\xi)\frac{d\varphi}{dz}-(z-\zeta)\frac{d\varphi}{dx}=0, \quad (y-\upsilon)\frac{d\varphi}{dz}-(z-\zeta)\frac{d\varphi}{dy}=0, \\ 2(x-\alpha)\xi+2(y-\beta)\upsilon+2(z-\gamma)\zeta=x^2+y^2+z^2-\alpha^2-\beta^2-\gamma^2, \end{cases}$$

die Coordinaten x, y, z zu eliminiren. Die erste dieser Gleichungen stellt die Directrixfläche $\boldsymbol{D}$ dar, und das aus diesen vier Gleichungen zu ziehende Eliminations-Ergebnifs von x, y, z, welches eine Gleichung zwischen ξ, υ, ζ sein wird, drückt die Eingangs (Nr. 1.) unterlegte Fläche $\boldsymbol{A}$ aus, zu welcher die erste der hier aufgestellten Gleichungen $\varphi(x,y,z)=0$ die Directrixfläche $\boldsymbol{D}$ ist.

6.

Die zwei Systeme von Gleichungen in (11. und 11'.) ergänzen sich wechselseitig. Während durch Elimination von ξ, υ, ζ aus dem ersten Systeme die Gleichung der Directrixfläche $\boldsymbol{D}$ oder die erste Gleichung in (11'.) gefunden wird, erhält man, umgekehrt, durch Elimination von x, y, z aus dem letztern Systeme die Gleichung der unterlegten Fläche $\boldsymbol{A}$, oder die erste Gleichung in (11.). Diese zwei Flächen stehen aber nicht nur in den gegenseitigen Beziehungen zu einander, welche durch die Daten des Problems ausgesprochen sind, sondern noch in einer, nicht minder beachtenswerthen Beziehung, auf die man mit Zuziehung der benutzten Gleichungen (12.) kommt.

Man fasse den Pol α, β, γ, so wie zwei zusammengehörige Puncte (ξ, υ, ζ), (x, y, z) beider Flächen $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{D}$ zugleich ins Auge. Legt man durch den ersten dieser zusammengehörigen Puncte eine tangirende Ebene an seine Fläche $\boldsymbol{A}$ und verbindet den Pol mit dem zweiten der zusammengehörigen Puncte der Fläche $\boldsymbol{D}$ durch eine Gerade, so steht dieselbe auf der genannten tangirenden Ebene jedesmal senkrecht.

Diese Beziehung, welche ihr Analogon in der Lehre der Curven hat, wird im Folgenden sehr leicht nachgewiesen.

In der That: stellt die Gleichung

$$(\xi'-\xi)\frac{d\zeta}{d\xi}+(v'-v)\frac{d\zeta}{dv}-(\zeta'-\zeta)=0$$

die oben angedeutete tangirende Ebene vor, wo ξ', v', ζ' die Coordinaten irgend eines Puncts derselben sind; wird ferner durch den Pol ein Perpendikel auf diese Ebene gezogen, so wird derselbe bekanntlich durch folgende zwei Gleichungen dargestellt:

$$x'-\alpha+(z'-\gamma)\frac{d\zeta}{d\xi}=0, \qquad y'-\beta+(z'-\gamma)\frac{d\zeta}{dv}=0;$$

wo x', y', z' die Coordinaten irgend eines Puncts der perpendiculären Geraden sind. Diese Gleichungen werden aber wegen des Bestandhabens der Gleichungen (12.) realisirt, wenn man $x'=x$, $y'=y$, $z'=z$ setzt; woraus zunächst folgt, dafs die letztere Gerade auch noch durch den Punct (x, y, z) der Directrixfläche D geht. Nun ist durch die zwei Puncte (den Pol und den Punct (x, y, z)), *nur eine* Gerade zu ziehen möglich, und diese ist, vermöge ihrer Ableitung, auf der tangirenden Ebene senkrecht: also ist die obige Aussage gerechtfertigt; d. h. ***jede Gerade, welche den Pol mit einem Puncte der Fläche D verbindet, steht auf der zur Fläche A durch den zusammengehörigen Punct gelegten tangirenden Ebene senkrecht.***

7.

Stellt man nunmehr alles bis jetzt über zwei Flächen Besprochene zusammen, so hat man Folgendes:

Wenn die ***unterlegte Fläche A*** durch

$$(A.) \qquad f(\xi, v, \zeta)=0$$

und die ihr zugehörige ***Directrixfläche D*** durch

$$(D.) \qquad \varphi(x, y, z)=0$$

ausgedrückt wird, so bestehen neben diesen Gleichungen auch folgende Ausdrücke:

$$(B.) \quad \begin{cases} x-\alpha+(z-\gamma)\frac{d\zeta}{d\xi}=0, \quad y-\beta+(z-\gamma)\frac{d\zeta}{dv}=0, \\ x-\xi+(z-\zeta)\frac{dz}{dx}=0, \quad y-v+(z-\zeta)\frac{dz}{dy}=0, \\ 2(x-\alpha)\xi+2(y-\beta)v+2(z-\gamma)\zeta=x^2+y^2+z^2-\alpha^2-\beta^2-\gamma^2. \end{cases}$$

Verbindet man die Gleichung (*A.*) mit der ersten, zweiten und fünften Gleichung in (*B.*) durch Elimination von ξ, υ, ζ, so gelangt man zu der Gleichung (*D.*), oder zu der *Directrixfläche.* Verbindet man dagegen die Gleichung (*D.*) mit der dritten, vierten und fünften Gleichung in (*B.*), durch Elimination von x, y, z, so gelangt man zu der Gleichung (*A.*), oder zu der *unterlegten Fläche.*

Diese zwei Flächen haben, dem Vorausgeschickten gemäfs, zu einander folgende gegenseitige Beziehungen:

1) Zieht man vom Pole, oder vom Puncte (α, β, γ), nach irgend einem Puncte (ξ, υ, ζ) der Fläche *A* eine Gerade, und sodann von diesem Puncte eine Normale an die Directrixfläche *D*, die ihr in dem Puncte (x, y, z) begegnet: so sind die zwei Geraden einander gleich; d. h. der Abstand des Puncts (α, β, γ) vom Puncte (ξ, υ, ζ) ist dem der zusammengehörigen Puncte (ξ, υ, ζ), (x, y, z) beider Flächen gleich.
2) Verbindet man die Puncte (α, β, γ), (x, y, z) durch eine Gerade, so steht dieselbe auf der zur Fläche *A* im Puncte (ξ, υ, ζ) gelegten tangirenden Ebene senkrecht.

Aus diesen beiden Sätzen folgt:

a) Die in (2.) genannte tangirende Ebene *halbirt* die dort genannte Gerade.
b) Die beiden *gleich grofsen* Geraden in (1.) sind gleich *geneigt* gegen die tangirende Ebene in (2.).

8.

Die im Vorhergehenden, in (2.), ausgesprochene Beziehung zwischen irgend einer unterlegten Fläche *A* und der ihr zugehörigen Directrixfläche *D* giebt ein einfaches Verfahren an die Hand, die der Fläche *A*, bei unverändertem Pole, entsprechende Fufspunctenfläche *F*, wie sie Eingangs dieser Abhandlung festgestellt wurde, sofort zu bestimmen; d. h. ihre Gleichung anzugeben.

Bezeichnet man nämlich durch x', y', z' die Coordinaten des *Begegnungspunctes* der in (Nr. 7.) in (2.) genannten Geraden mit der dort erwähnten tangirenden Ebene, so gelangt man, vermöge der Aussage in (*a.*) daselbst, leicht zu folgenden Bestimmungsgleichungen:

$$x' - x = \tfrac{1}{2}(\alpha - x), \quad y' - y = \tfrac{1}{2}(\beta - y), \quad z' - z = \tfrac{1}{2}(\gamma - z),$$

aus welchen die folgenden:

$$(20.) \qquad x' = \tfrac{1}{2}(\alpha + x), \quad y' = \tfrac{1}{2}(\beta + y), \quad z' = \tfrac{1}{2}(\gamma + z),$$

so wie auch die folgenden:

$$(21.) \qquad x = 2x' - \alpha, \quad y = 2y - \beta, \quad z = 2z' - \gamma,$$

sich ergeben. Führt man diese Bestimmungen von x, y, z in die Gleichung (*D.*) in (Nr. 7.), welche die Directrixfläche vorstellt, ein, so erhält man:

$$(22.) \qquad \varphi(2x' - \alpha,\ 2y' - \beta,\ 2z' - \gamma) = 0;$$

welche Gleichung die der unterlegten Fläche *A* entsprechende ***Fufspunctenfläche F*** ausdrückt, und wo x', y', z' die Coordinaten irgend eines Puncts dieser Fläche sind, und das Functionszeichen φ dasselbe ist, wie bei der hier Statt findenden ***Directrixfläche.***

9.

Nicht blofs ist man, wie unmittelbar vorher gezeigt, aus der Gleichung der ***Directrixfläche*** zu der der ***Fufspunctenfläche F*** überzugehen im Stande, sondern, mit Zuziehung der Gleichungen (*B.*) in (Nr. 7.), so wie der Gleichungen (21.) in (Nr. 8.), auch unmittelbar aus der ***unterlegten Fläche A.***

Die ***unterlegte Fläche A*** werde, wie bisher, durch

$$(A.) \qquad f(\xi, v, \zeta) = 0$$

und die betreffende ***Fufspunctenfläche F*** durch

$$(F.) \qquad \varphi'(x', y', z') = 0$$

ausgedrückt, wo x', y', z' die Coordinaten eines beliebigen Puncts dieser Fläche sind, und φ' das der Natur derselben entsprechende Functionszeichen ist. Dann genügen diese Gleichungen, unter Beachtung der Gleichungen (*B.*), so wie (21.), folgenden Relationen:

$$(C.) \quad \begin{cases} x' - \alpha + (z' - \gamma)\dfrac{d\zeta}{d\xi} = 0, & y' - \beta + (z' - \gamma)\dfrac{d\zeta}{dv} = 0, \\ 2x' - \xi - \alpha + (2z' - \zeta - \gamma)\dfrac{dz'}{dx'} = 0, & 2y' - v - \beta + (2z' - \zeta - \gamma)\dfrac{dz'}{dy'} = 0, \\ (x' - \xi)(x' - \alpha) + (y' - v)(y' - \beta) + (z' - \zeta)(z' - \gamma) = 0. \end{cases}$$

Ist nun die Gleichung (*A.*) gegeben, so eliminire man aus derselben, so wie aus der ersten, zweiten und fünften Gleichung in (*C.*), die Coordinaten ξ, v, ζ. Das End-Ergebnifs wird die Gleichung der Fufspunctenfläche, oder die in (*F.*) sein. Ist, umgekehrt, letztere, die Gleichung (*F.*), gegeben, so eliminire man aus derselben, wie aus der dritten, vierten und fünften

Gleichung in (*C.*), die Coordinaten x', y', z', und das End-Ergebnifs wird die unterlegte Fläche, oder die Gleichung in (*A.*) sein.

Wir wollen nunmehr die *geometrische* Bedeutung der Gleichungen in (*C.*) untersuchen.

Die Gleichung

$$(x'-\xi)\frac{d\zeta}{d\xi}+(y'-v)\frac{d\zeta}{dv}-(z'-\zeta)=0$$

sagt aus, dafs eine durch den Punct ξ, v, ζ der Fläche A an dieselbe gelegte tangirende Ebene, der Fufspunctenfläche F im Puncte x', y', z' begegnet. Die beiden ersten Gleichungen in (*C.*) sagen aus, dafs die den zuletzt erwähnten Punct mit dem Pole verbindende Gerade auf der gleichen tangirenden Ebene senkrecht steht. Diese drei Gleichungen enthalten demnach alle Erfordernisse einer ***Fufspunctenfläche*** zur ***unterlegten A.*** Und da endlich das Eliminations-Ergebnifs der partiellen Differentialquotienten $\frac{dz}{d\xi}$, $\frac{dz}{dv}$ aus denselben drei Gleichungen, genau die fünfte der Gleichungen (*C.*) giebt, so drücken die erste, zweite und fünfte der Gleichungen in (*C.*) nur die Eigenthümlichkeiten oder Beziehungen aus, in welchen die unterlegte Fläche A, nach der Feststellung im Eingange dieser Abhandlung, zu ihrer Fufspunctenfläche steht.

Es bleibt nur noch die geometrische Deutung der dritten und vierten Gleichung in (*C.*) anzugeben.

Setzt man für diesen Zweck, der Kürze wegen,

$$(23.)\quad \xi'=\tfrac{1}{2}(\xi+\alpha),\quad v'=\tfrac{1}{2}(v+\beta),\quad \zeta'=\tfrac{1}{2}(\zeta+\gamma),$$

so stellen sich besagte zwei Gleichungen folgendermafsen dar:

$$x'-\xi'+(z'-\zeta')\frac{dz'}{dx'}=0,\quad y'-v'+(z'-\zeta')\frac{dz'}{dy'}=0.$$

Diese Gleichungen sagen aus, dafs eine auf die Fläche F im Puncte x', y', z' gezogene Normale durch den in (23.) festgestellten Punct (ξ', v', ζ') geht. Diesen Punct *halbirt* aber die durch den Pol und den Punct (ξ, v, ζ) der Fläche A gezogene Gerade: also drücken die in Rede stehenden zwei Gleichungen folgende beachtenswerthe neue Beziehung zwischen den zwei Flächen A und F aus:

Wenn von dem Pole nach dem Puncte ξ, v, ζ der Fläche A eine Gerade, und durch den entsprechenden Punct x', y', z' der

Fläche F eine Normale an diese Fläche gezogen wird, so halbirt die Normale jene zuerst genannte Gerade. Wenn umgekehrt der Halbirungspunct mit dem entsprechenden oder zusammengehörigen Puncte x', y', z' der Fläche F durch eine Gerade verbunden wird, so steht dieselbe normal auf besagter Fläche F, oder auf der Fufspunctenfläche.

Der analoge Satz zu diesem findet auch bei ***Curven*** Statt; wie in der Eingangs citirten Abhandlung (§. 11.) zu sehen ist.

10.

Nunmehr sind wir im Stande, über die einem bestimmten Pole und einer unterlegten Fläche A zugehörigen Directrix- und Fufspuncten-Flächen Folgendes auszusprechen; was Dem für die analogen Curven (§. 12. der citirten Abhandlung) mit geringen Abweichungen ähnlich ist.

a) Zieht man vom Pole aus nach einem Puncte (x', y', z') der Fläche F eine Gerade, so mufs man dieselbe in gleicher Richtung und Gröfse verlängern, um zu einem Puncte (x', y', z') der Fläche D zu gelangen. Eben so, umgekehrt: verbindet man den Pol mit dem Puncte (x, y, z) der Fläche D, so gehört der Halbirungspunct dieser Geraden einem Puncte (x', y', z') der Fläche F an.

b) Legt man durch den Halbirungspunct eine Ebene senkrecht auf die betreffende Gerade, so tangirt solche die Fläche A im Puncte (ξ, υ, ζ).

c) Die Verbindungsgerade dieses Puncts (ξ, υ, ζ) mit dem in (*a*.) genannten Puncte (x, y, z) der Fläche D, ist eine Normale zu dieser Fläche.

d) Wenn der Halbirungspunct $(\xi', \upsilon', \zeta')$ der die Puncte (α, β, γ) und (ξ, υ, ζ) verbindenden Geraden mit dem Puncte (x', y', z') der Fläche F durch eine Gerade vereinigt wird, so ist dieselbe eine Normale zur gleichen, oder zur Fufspunctenfläche F.

Von den hierbei auftretenden fünf Puncten ist blofs der ***Pol*** (α, β, γ) unveränderlich. Wenn man sich nun diesen mit einem der vier übrigen Puncte (ξ, υ, ζ), (x, y, z), (x', y', z'), $(\xi', \upsilon', \zeta')$ verbunden vorstellt, so sind die drei übrigen Puncte, zufolge ihrer bereits angegebenen gegenseitigen Stellungen, von selbst gegeben. Daher können die zuletzt genannten vier Puncte als ***zusammengehörige*** oder einander ***entsprechende*** angesehen, und auch so benannt werden.

Die fünf Puncte (von welchen die drei (α, β, γ), (x', y', z'), (x, y, z) in einer Geraden, so wie die drei (α, β, γ), (ξ', v', ζ'), (ξ, v, ζ) in einer andern Geraden liegen), bilden, wenn man noch die Puncte (x', y', z') und (ξ', v', ζ') durch eine Gerade (die Normale zur Fufspunctenfläche F), und die Puncte (x, y, z) und (ξ, v, ζ) durch eine Gerade (die Normale zur Directrixfläche D) verbindet, *zwei ähnliche Dreiecke;* woraus weiter Nachstehendes folgt:

e) Die Normalen der Flächen F und D, die beziehlich durch die einander entsprechenden Puncte (x', y', z') und (x, y, z) dieser Flächen gehen, sind mit einander parallel. Mithin sind es auch die betreffenden tangirenden Ebenen, die durch die gleichen Puncte an die respectiven Flächen gelegt werden.

f) Da die Stellung des Puncts (ξ', v', ζ') zum Pole und zum Puncte (x', y', z') der Fläche F dieselbe ist, wie die des Puncts (ξ, v, ζ) zu demselben Pole und zum Puncte der Fläche D: so gehört der erstgenannte Punct (ξ', v', ζ') einer Fläche A' an, die zur Fufspunctenfläche F die gleiche Stellung hat, wie die unterlegte Fläche A zur Directrixfläche. Also stellt die Fufspunctenfläche F eine Directrixfläche zu der *neu eingeführten Fläche* A' vor.

Die endliche Gleichung dieser *neu eingeführten Fläche* A' folgt aus der *unterlegten Fläche* A, wenn man in dieser ξ, v, ζ, gemäfs den Gleichungen (23. Nr. 9.), respective durch ξ', v', ζ' ersetzt; was

$$(24.) \qquad \xi = 2\xi' - \alpha, \quad v = 2v' - \beta, \quad \zeta = 2\zeta' - \gamma$$

giebt. Es ist demnach die Gleichung der *Fläche* A' folgende:

$$(25.) \qquad f(2\xi' - \alpha,\ 2v' - \beta,\ 2\zeta' - \gamma) = 0;$$

wo das Functionszeichen f dasselbe ist, wie bei der unterlegten Fläche A. Die Directrixfläche dieser Fläche in (25.), bei demselben unveränderten Pole (α, β, γ), ist die Fufspunctenfläche F zur unterlegten A; nämlich, zufolge der Gleichung (22.), folgende:

$$(26.) \qquad \varphi(2x' - \alpha,\ 2y' - \beta,\ 2z' - \gamma) = 0.$$

11.

Sämmtliche vorausgehende Betrachtungen und Ergebnisse führen bei einem feststehenden *Pole* und einer unterlegten Fläche A auf zwei Systeme von Flächen, deren jedes ein eigenes Bildungsgesetz befolgt; wo aber die Flächen des einen Systems zu denen des andern in den abwechselnden Stel-

lungen von Directrix- und Fufspunctenflächen sind; wie solches übersichtlich hier näher gezeigt werden soll.

I. Für ein beliebig angenommenes rechtwinkliges Coordinatensystem sei ein Punct, ***Pol*** genannt, durch die Coordinaten α, β, γ festgestellt. Eben so sei gegen dasselbe Coordinatensystem eine Fläche A, welche durch die Gleichung

$$(A.) \quad f(\xi, \upsilon, \zeta) = 0$$

bestimmt wird, zu Grunde gelegt; wo ξ, υ, ζ die Coordinaten eines Puncts dieser Fläche sind, und f ein gegebenes, die Natur der Fläche ausdrückendes Functionszeichen ist.

Diese Fläche, die wir bisher beständig die „unterlegte" nannten, stelle das Anfangsglied eines der oben gedachten zwei Systeme von Flächen dar, und die übrigen Glieder dieses Flächensystems seien beziehlich durch folgende Gleichungen ausgedrückt:

$$f'(\xi, \upsilon, \zeta) = 0, \quad f''(\xi, \upsilon, \zeta) = 0, \quad \ldots \quad f^{(n)}(\xi, \upsilon, \zeta) = 0.$$

Die Functionen f', f'', $\ldots f^{(n)}$, welche die nähere Beschaffenheit dieser Flächen andeuten, gehen zufolge der Gleichungen (24.) folgendes gegenseitige Bildungsgesetz ein:

$$f^{(k)}(\xi, \upsilon, \zeta) = f^{(k-1)}(2\xi - \alpha, 2\upsilon - \beta, 2\zeta - \gamma).$$

Wird in dieser gegenseitigen Relation der Functionen $f^{(k)}$ und $f^{(k-1)}$, für k nach und nach 1, 2, 3, ... gesetzt, so erhält man für das dem Index k entsprechende Glied des in Rede stehenden Systems von Flächen, oder für die Fläche, deren Gleichung $f^{(k)}(\xi, \upsilon, \zeta) = 0$ ist, folgende Endbestimmung:

$$(A^{(k)}.) \quad f(2^k\xi - (2^k - 1)\alpha,\ 2^k\upsilon - (2^k - 1)\beta,\ 2^k\zeta - (2^k - 1)\beta) = 0;$$

wo das Functionszeichen f dasselbe ist, wie in der unterlegten Fläche A.

Setzt man hier $k = 0$, so hat man die unterlegte Fläche A; und die für $k = 1$, $k = 2$, $k = 3$, ... gefundenen Gleichungen stellen das aus der unterlegten Fläche A nach und nach erlangte *eine* Flächensystem dar.

II. Wenn zur unterlegten Fläche A, nach den Gleichungen (11. Nr. 2.), die betreffende Directrixfläche D hergestellt und diese, auf dasselbe Coordinatensystem bezogen, wie bis jetzt geschah, durch die Gleichung

$$(D.) \quad \varphi(x, y, z) = 0$$

ausgedrückt wird, wo x, y, z die Coordinaten eines Puncts dieser Fläche D sind, und das Functionszeichen φ die Art der gegenseitigen Verbindung der

Coordinaten andeutet: so soll diese das Anfangsglied des zweiten, oben erwähnten Systems von Flächen vorstellen.

Bildet man nach (Nr. 8, Gleich. 21.) aus (*D.*) folgende Gleichung:

$$(D'.) \quad \varphi(2x-\alpha,\ 2y-\beta,\ 2z-\gamma) = 0,$$

wo das Functionszeichen φ dasselbe ist wie vorhin, so stellt diese Gleichung, nach derselben citirten Nr., die Fufspunctenfläche F zur unterlegten A, zugleich aber auch nach dem Satze (*f*, Nr. 10.) die Directrixfläche D' zur abgeleiteten Fläche A' des ersten Systems in (I.) vor.

Leitet man aus dieser Gleichung (D'.) eine neue eben so ab, wie diese aus (*D.*) erlangt wurde, was Folgendes giebt:

$$(D''.) \quad \varphi(4x-3\alpha,\ 4y-3\beta,\ 4z-3\gamma) = 0,$$

so stellt diese Gleichung die Fufspunctenfläche F'' zu der vorher erwähnten Fläche A', zugleich aber auch die Directrixfläche D'' zur Fläche A'' des ersten Systems in (I.) vor.

Leitet man aus der Gleichung (D''.), auf die schon zweimal angewandte Art, eine neue Gleichung ab, aus dieser dann wiederum eben so eine Gleichung, und fährt so ins Unbestimmte fort, so gelangt man zu einer Gleichung von folgender allgemeinen Form:

$$(D^{(k)}.) \quad \varphi(2^k x-(2^k-1)\alpha,\ 2^k y-(2^k-1)\beta,\ 2^k z-(2^k-1)\gamma) = 0,$$

welche die Fufspunctenfläche $F^{(k-1)}$ zur Fläche $A^{(k-1)}$, wie auch die Directrixfläche $D^{(k)}$ zur Fläche $A^{(k)}$ des Flächensystems in (I.) ausdrückt.

Setzt man hier für k nach und nach 1, 2, 3, ..., so erhält man ein System von Flächen, welche der Reihe nach Directrixflächen zu den Flächen A', A'', A''', ..., und in gleicher Ordnung auch Fufspunctenflächen zu den Flächen A, A', A'', ... des ersten Flächensystems in (I.) sind. Die aus $D^{(k)}$ entspringenden Gleichungen stellen das zweite System von Flächen dar, deren Eingangs (Nr. 10.) gedacht ward, deren Umfangsglied die Fläche der Gleichung (*D.*) ist, die auch aus Gleichung $D^{(k)}$ bei der Annahme $k=0$ hervorgeht, und welche Gleichung die Directrixfläche F zur unterlegten Fläche A abgiebt.

Zürich, im October 1854.

13.

Über eine besondere Art, aus complexen Einheiten gebildeter Ausdrücke.

(Von Herrn Dr. *F. F. Kummer*, Professor an der Universität zu Breslau.)

I.

In einer Abhandlung im (44ten Bande S. 106) dieses Journals, über die Ergänzungssätze des allgemeinen Reciprocitätsgesetzes für Potenzreste, habe ich eine Verallgemeinerung der Theorie der ***Kreistheilung*** gegeben, welche sich an die bekannten, von ***Jacobi*** durch $\psi(\alpha)$ bezeichneten complexen Zahlen der Kreistheilung anschliefst, und welche zur Lösung des in der genannten Abhandlung behandelten Problems grade ausreicht. Eine wesentlich andere Verallgemeinerung der Theorie der Kreistheilung, welche ich vor längerer Zeit zu dem Zwecke ersann, sie als Mittel zu einem Beweise der allgemeinen Reciprocitätsgesetze zu benutzen, schliefst sich an die bekannte ***Lagrangesche Resolvente der Kreistheilung*** an; und wenn gleich sie den Erwartungen in Betreff der Reciprocitätsgesetze nicht vollständig entsprach, ist sie doch an sich bemerkenswerth, und verbreitet über manche schwierigen Puncte der allgemeinen Theorie der complexen Zahlen ein unerwartetes Licht; weshalb ich dieselbe in dem Folgenden kurz entwickeln will.

Die der ***Lagrangeschen Resolvente der Kreistheilung*** analogen, aus complexen Einheiten gebildeten Ausdrücke, welche hier behandelt werden sollen, sind in folgender Form enthalten:

$$1+\varepsilon(x)+\varepsilon(x)\varepsilon(x^g)+\varepsilon(x)\varepsilon(x^g)\varepsilon(x^{g^2})+\cdots+\varepsilon(x)\varepsilon(x^g)\ldots\varepsilon\left(x^{g^{p-3}}\right),$$

in welcher p eine ***Primzahl***, x eine ***imaginäre*** Wurzel der Gleichung $x^p=1$, g eine ***primitive*** Wurzel der Congruenz $g^{p-1}\equiv 1$, Mod. p, und $\varepsilon(x)$ eine ***complexe Einheit*** bezeichnet, deren ***Norm***, in Beziehung auf die verschiedenen Werthe von x genommen, gleich ***Eins*** sei. Damit die Untersuchung sogleich die nöthige Allgemeinheit bekomme, soll hier nicht vorausgesetzt werden, dafs die in der complexen Einheit $\varepsilon(x)$ enthaltenen Coëfficienten ***ganze*** Zahlen sind; sie sollen vielmehr vorläufig ganz unbestimmt gelassen werden,

können also auch selbst wieder irrational sein, jedoch immer nur so, dafs

$$N\varepsilon(x) = \varepsilon(x)\varepsilon(x^g)\varepsilon(x^{g^2}) \ldots . \varepsilon\left(x^{g^{p-2}}\right) = 1$$

und $\varepsilon(x)$ eine rationale Function in Beziehung auf x allein ist.

Da der oben aufgestellte Ausdruck durch die zu Grunde gelegte Einheit $\varepsilon(x)$ vollständig bestimmt ist, soll er als Function dieser Einheit angesehen und durch $P\varepsilon(x)$ bezeichnet werden, so dafs

$$P\varepsilon(x) = 1 + \varepsilon(x) + \varepsilon(x)\varepsilon(x^g) + \cdots + \varepsilon(x)\varepsilon(x^g) \ldots . \varepsilon\left(x^{g^{p-3}}\right)$$

ist. Die $p-1$ Glieder, aus welchen dieser Ausdruck besteht, bilden eine vollständige Periode; denn wenn man sich dieselben nach dem herrschenden Gesetze weiter fortgesetzt vorstellt, so wird vermöge der Bedingung

$$N\varepsilon(x) = 1$$

das p^{te} Glied dem ersten gleich, das $p+1^{\text{te}}$ Glied dem zweiten u. s. f. Hieraus folgt, dafs wenn man in diesem Ausdrucke x in x^g verwandelt und sodann mit $\varepsilon(x)$ multiplicirt, derselbe ganz ungeändert bleibt, da auf diese Weise nur das erste Glied in das zweite, das zweite in das dritte und so weiter, und das letzte in das erste übergeht. Man hat daher, als erste Grund-Eigenschaft dieser Ausdrücke:

$$(1.) \quad \varepsilon(x)P\varepsilon(x^g) = P\varepsilon(x);$$

was, verallgemeinert, sogleich die folgende giebt:

$$(2.) \quad \varepsilon(x)\varepsilon(x^g) \ldots . \varepsilon\left(x^{g^{h-1}}\right)P\varepsilon\left(x^{g^h}\right) = P\varepsilon(x).$$

Bei der Verwandlung des x in x^{g^h} ändert sich also dieser Ausdruck nur in so weit, dafs eine bestimmte complexe Einheit als Factor hinzutritt. Die Ausdrücke

$$P\varepsilon(x),\ P\varepsilon(x^g),\ P\varepsilon(x^{g^2}),\ \ldots .\ P\varepsilon\left(x^{g^{p-2}}\right)$$

sind, wenn man von den dieselben begleitenden Einheiten absieht, alle als gleich zu erachten.

Setzt man in der Gleichung (2.) nach einander $h = 1, 2, 3 \ldots . p-1$, und multiplicirt die so entstehenden Gleichungen mit einander, so ergiebt sich:

$$(3.) \quad \varepsilon(x)^{p-1}.\varepsilon(x^g)^{p-2}.\varepsilon(x^{g^2})^{p-3} \ldots . \varepsilon\left(x^{g^{p-2}}\right)^1.NP\varepsilon(x) = (P\varepsilon(x))^{p-1},$$

woraus sogleich

$$(4.) \quad NP\varepsilon(x) = \varepsilon(x^g)^1\varepsilon(x^{g^2})^2 \ldots \varepsilon\left(x^{g^{p-2}}\right)^{p-2}(P\varepsilon(x))^{p-1}$$

folgt.

Es sei jetzt $e(x)$ eine zweite, ganz beliebige complexe Einheit, so hat man für dieselbe ebenfalls:

$$e(x)Pe(x^g) = Pe(x),$$

und wenn diese Gleichung mit der entsprechenden (1.) multiplicirt wird:

$$\varepsilon(x)e(x)P\varepsilon(x^g)Pe(x^g) = P\varepsilon(x)Pe(x).$$

Da ferner das Product der beiden Einheiten $\varepsilon(x)e(x)$ selbst wieder eine Einheit ist, so hat man für diese gleichfalls:

$$\varepsilon(x)e(x)P(\varepsilon(x^g)e(x^g)) = P(\varepsilon(x)e(x)),$$

und wenn die vorige Gleichung durch diese dividirt wird:

$$\frac{P\varepsilon(x^g)Pe(x^g)}{P(\varepsilon(x^g)e(x^g))} = \frac{P\varepsilon(x)Pe(x)}{P(\varepsilon(x)e(x))}.$$

Auf dieselbe Weise wird aus der Gleichung (2.) bewiesen, dafs auch allgemein

$$\frac{P\varepsilon(x^{g^h})Pe(x^{g^h})}{P(\varepsilon(x^{g^h})e(x^{g^h}))} = \frac{P\varepsilon(x)Pe(x)}{P(\varepsilon(x)e(x))} \text{ ist.}$$

Der auf beiden Seiten dieser Gleichung vorkommende Ausdruck bleibt, wie hieraus zu sehen, vollständig ungeändert, wenn statt x irgend eine andere imaginäre Wurzel der Gleichung $x^p = 1$ gesetzt wird; woraus unmittelbar folgt, dafs derselbe die Wurzel x in Wahrheit gar nicht enthält, sondern nur die in den Coëfficienten der Einheiten $\varepsilon(x)$ und $e(x)$ vorkommenden Gröfsen. Man hat daher

$$\frac{P\varepsilon(x)Pe(x)}{P(\varepsilon(x)e(x))} = A,$$

oder

$$(5.) \quad P\varepsilon(x)Pe(x) = AP(\varepsilon(x)e(x));$$

wo A eine Gröfse ist, welche die Wurzel x ***nicht*** enthält. Dies ist die *zweite* allgemeine Grund-Eigenschaft dieser Ausdrücke.

Besonders zu bemerken ist noch das specielle Resultat, welches sich findet, wenn man $e(x) = \frac{1}{\varepsilon(x)}$ annimmt, nämlich:

$$(6.) \quad P\varepsilon(x).P\left(\frac{1}{\varepsilon(x)}\right) = B,$$

wo B eine von x unabhängige Gröfse ist.

Es ist zu bemerken, dafs für gewisse, zu Grunde gelegte Einheiten $\varepsilon(x)$ und $e(x)$ die Ausdrücke $P\varepsilon(x)$ und $Pe(x)$ gleich Null werden können,

und auch wirklich gleich Null werden; in welchen Fällen die aufgestellten Grund-Eigenschaften derselben zwar nicht unrichtig, aber nichtssagend werden. Diese ungünstigen Fälle lassen sich aber nunmehr durch geringe, an den Einheiten $\varepsilon(x)$ oder $e(x)$ anzubringende Änderungen leicht vermeiden.

An den gefundenen Grund-Eigenschaften der Ausdrücke $P\varepsilon(x)$ erkennt man sogleich ihre Analogie mit dem *Lagrange*schen Ausdrucke der Kreistheilung

$$F(\alpha, x) = x + \alpha x^g + \alpha^2 x^{g^2} + \cdots + \alpha^{p-2} x^{g^{p-2}},$$

in welchem α irgend eine Wurzel der Gleichung $\alpha^{p-1} = 1$ bezeichnet. Die bekannten Eigenschaften desselben, nämlich

$$\alpha^h F(\alpha, x^{g^h}) = F(\alpha, x), \qquad \frac{F(\alpha, x) F(\alpha^r, x)}{F(\alpha^{r+1}, x)} = \Psi_r(\alpha),$$

$$F(\alpha, x) F(\alpha^{-1}, x) = \pm p$$

sind offenbar den durch die Gleichungen (2, 5 und 6.) ausgedrückten allgemeinen Eigenschaften der Ausdrücke $P\varepsilon(x)$ vollständig analog. Der Grund der Übereinstimmung in den Fundamental-Eigenschaften liegt einfach darin, dafs die *Lagrange*sche Resolvente der Kreistheilungsgleichung $F(\alpha, x)$ in der That nur ein specieller Fall des allgemeineren Ausdrucks $Pe(x)$ ist. Setzt man nämlich die Einheit $\varepsilon(x) = \alpha x^{g-1}$, deren Norm, in Beziehung auf x genommen, gleich α^{p-1}, also gleich *Eins* ist, so hat man:

$$x P(\alpha x^{g-1}) = x + \alpha x^g + \alpha^2 x^{g^2} + \cdots + \alpha^{p-2} x^{g^{p-2}} = F(\alpha, x).$$

II.

Für den Zweck des gegenwärtigen Aufsatzes sollen nun den zu Grunde gelegten Einheiten etwas speciellere Bestimmungen gegeben werden; indem festgesetzt wird, dafs die Coëfficienten derselben *complexe*, aus den Wurzeln der Gleichung $\alpha^\lambda = 1$ gebildete *ganze* Zahlen sein sollen, wo λ eine *Primzahl* ist, und zwar ein Factor von $p-1$, so dafs die Primzahl p von der Form $p = \nu\lambda + 1$ ist. Ich bezeichne demgemäfs jetzt die zu Grunde zu legenden complexen Einheiten durch $\varepsilon(\alpha, x)$ und $e(\alpha, x)$ und wiederhole, um Mifsverständnissen vorzubeugen, noch einmal, dafs dieselben *ganze rationale* Functionen der beiden Wurzeln α und x mit ganzzahligen Coëfficienten sein sollen, und dafs die in Beziehung auf x allein genommenen Normen dieser Einheiten gleich *Eins* sein müssen.

Der Ausdruck $P\varepsilon(\alpha, x)$, welcher als eine, die beiden verschiedenen Wurzeln der Einheit α und x enthaltende complexe ganze Zahl mit ganzzahligen Coëfficienten betrachtet werden kann, soll nun in seine idealen oder wirklichen Primfactoren zerlegt werden. Für diese allgemeinere Art der complexen Zahlen, und überhaupt für die aus den n^{ten} Wurzeln der Einheit (wo n eine zusammengesetzte Zahl ist) gebildeten complexen Zahlen existiren, eben so wie für die, für welche $n = \lambda$, gleich einer Primzahl ist (deren Theorie ich vollständig ausgearbeitet und veröffentlicht habe), bestimmte ideale Primfactoren, und für diese auch eben so die Hauptsätze: dafs jede gegebene complexe Zahl nur eine endliche Anzahl unveränderlich bestimmter idealer Primfactoren enthält: dafs zwei complexe Zahlen, welche genau dieselben idealen Primfactoren enthalten, sich nur durch eine Einheit unterscheiden, welche als Factor hinzutreten kann und: dafs eine bestimmte Potenz jeder idealen Zahl einer wirklichen complexen Zahl gleich ist. Aufser diesen allgemeinen Sätzen ist für die gegenwärtige Untersuchung nur noch die nähere Kenntnifs der idealen Primfactoren der Zahl p selbst, für die aus p^{ten} und λ^{ten} Wurzeln der Einheit zugleich gebildeten complexen Zahlen nöthig.

Wenn p, wie vorausgesetzt, eine Primzahl von der Form $p = r\lambda + 1$ ist, so ist bekanntlich für die complexen Zahlen, welche die Wurzel x allein enthalten, $1 - x$ der einzige Primfactor von p. Ferner giebt es für die complexen Zahlen, welche nur α allein, aber nicht x enthalten, $\lambda - 1$ verschiedene ideale Primfactoren von p, welche durch

$$f(\alpha),\quad f(\alpha^{\gamma}),\quad f(\alpha^{\gamma^2}),\ \ldots.\quad f(\alpha^{\gamma^{\lambda-2}})$$

bezeichnet werden sollen; wo γ eine ***primitive Wurzel*** der Congruenz $\gamma^{\lambda-1} \equiv 1$, Mod. λ ist. Wird nun ein idealer Primfactor von p für die complexen Zahlen, welche α und x zugleich enthalten, durch $f(\alpha, x)$ bezeichnet, so hat man:

$$f(\alpha, x) f(\alpha, x^g) f(\alpha, x^{g^2}) \ldots. f(\alpha, x^{g^{p-2}}) = E(\alpha) f(\alpha),$$
$$f(\alpha, x) f(\alpha^{\gamma}, x) f(\alpha^{\gamma^2}, x) \ldots. f(\alpha^{\gamma^{\lambda-2}}, x) = E(x)(1-x).$$

Die nur durch die verschiedenen Werthe des x sich unterscheidenden Primfactoren $f(\alpha, x)$, $f(\alpha, x^g)$, $f(\alpha, x^{g^2})$, u. s. w. sind alle als gleich zu erachten; eben so wie die Factoren $1 - x$, $1 - x^g$, $1 - x^{g^2}$, u. s. w., abgesehen von den Einheiten, einander gleich sind. Es sind daher in p nur $\lambda - 1$ wirklich von einander verschiedene ideale Primfactoren von der Form $f(\alpha^{\gamma^i}, x^{g^h})$

vorhanden, nämlich:

$$f(\alpha, x),\quad f(\alpha^\gamma, x),\quad f(\alpha^{\gamma^2}, x),\quad \ldots.\quad f(\alpha^{\gamma^{\lambda-2}}, x).$$

Diesemnach ist auch

$$f(\alpha, x)^{p-1} = E(\alpha, x) f(\alpha),$$

wo $E(\alpha, x)$ eine Einheit bezeichnet.

Um zu finden, ob eine gegebene complexe Zahl $\varphi(\alpha, x)$ einen bestimmten der $\lambda - 1$ verschiedenen idealen Primfactoren von p, z. B. den idealen Primfactor $f(\alpha^{\gamma^h}, x)$ enthält, oder nicht, hat man nur zu untersuchen, ob dieselbe complexe Zahl, wenn in ihr ***Eins*** statt x gesetzt wird, den Primfactor $f(\alpha^{\gamma^h})$ enthält. Wenn nämlich $\varphi(\alpha, 1)$ den Primfactor $f(\alpha^{\gamma^h})$ enthält, so enthält auch $\varphi(\alpha, x)$ den idealen Primfactor $f(\alpha^{\gamma^h}, x)$, und wenn $\varphi(\alpha, 1)$ den Primfactor $f(\alpha^{\gamma^h})$ nicht enthält, so enthält auch $\varphi(\alpha, x)$ nicht den Primfactor $f(\alpha^{\gamma^h}, x)$.

Diese allgemeinen und besondern Sätze über die idealen Primfactoren der die beiden Wurzeln der Einheit α und x zugleich enthaltenden complexen Zahlen lassen sich nach denselben Principien beweisen, welche ich für die, nur die Wurzel α allein enthaltenden complexen Zahlen im (35ten Bande S. 327 sqq.) dieses Journals vollständig entwickelt habe. Aus diesem Grunde glaube ich die Ausführung der Beweise der hier angeführten Hülfssätze jetzt ersparen zu dürfen, und werde die Sätze sogleich auf die Zerlegung der complexen Zahl $P\varepsilon(\alpha, x)$ anwenden.

Zufolge der ersten Grund-Eigenschaft der obigen Ausdrücke hat man:

$$\varepsilon(\alpha, x) P\varepsilon(\alpha, x^g) = P\varepsilon(\alpha, x).$$

Nimmt man auf beiden Seiten die ***Norm*** in Beziehung auf α allein, d. h. das Product für alle Werthe α, α^γ, α^{γ^2}, ... $\alpha^{\gamma^{\lambda-2}}$, so hat man, wenn diese partielle Norm durch N_α bezeichnet wird:

$$N_\alpha \varepsilon(\alpha, x) . N_\alpha P\varepsilon(\alpha, x^g) = N_\alpha P\varepsilon(\alpha, x),$$

und wenn

$$N_\alpha \varepsilon(\alpha, x) = E(x), \qquad N_\alpha P\varepsilon(\alpha, x) = F(x)$$

gesetzt wird, so ist

$$E(x) F(x^g) = F(x).$$

Einer solchen Gleichung für complexe Zahlen, welche nur x allein enthalten, und keine andere Irrationalität, kann aber nach der bekannten Theorie

dieser complexen Zahlen keine andere Zahl $F(x)$ genügen, als eine solche von der Form

$$F(x) = C.E(x)(1-x)^r,$$

in welcher C eine nicht complexe ganze Zahl, $E(x)$ eine complexe Einheit und r eine ganze Zahl ist. Es ergiebt sich also hiernach:

$$N_\alpha P\varepsilon(\alpha, x) = C.E(x)(1-x)^r.$$

Hieraus folgt, dafs die complexe Zahl $P\varepsilon(\alpha, x)$ selbst, nur Factoren von einer der folgenden drei Arten enthalten kann: nämlich ***erstens*** solche, deren Normen, in Beziehung auf α allein genommen, ganze, nicht complexe Zahlen sind, welche also kein x enthalten und nur von der Form $\varphi(\alpha)$ sein können; ***zweitens*** solche, deren Normen, in Beziehung auf α genommen, Einheiten sind, welche also selbst nur Einheiten von der Form $E(\alpha, x)$ sein können; endlich ***drittens*** solche, deren in Beziehung auf α genommene Normen gleich $1-x$ oder gleich einer Potenz von $1-x$ sind, also nur die idealen Primfactoren von $1-x$, oder, was Dasselbe ist, von p, nämlich:

$$f(\alpha, x),\quad f(\alpha^\gamma, x),\quad f(\alpha^{\gamma^2}, x),\quad \ldots.\quad f(\alpha^{\gamma^{\lambda-2}}, x).$$

Dem Ausdrucke $P\varepsilon(\alpha, x)$ kann also immer folgende Form gegeben werden:

$$P\varepsilon(\alpha, x) = \varphi(\alpha)E(\alpha, x)f(\alpha, x)^m.f(\alpha^\gamma, x)^{m_1}.f(\alpha^{\gamma^2}, x)^{m_2}\ \ldots.\ f(\alpha^{\gamma^{\lambda-2}}, x)^{m_{\lambda-2}}.$$

Für die Bestimmung der Exponenten $m, m_1, m_2, \ldots. m_{\lambda-2}$, welche jetzt allgemein ausgeführt werden soll, ist wesentlich zu bemerken, dafs alle Vielfachen von $p-1$, welche etwa in denselben enthalten sein sollten, gänzlich vernachlässigt werden können; weil nämlich, nach der Eigenschaft der idealen complexen Primfactoren von p,

$$f(\alpha^{\gamma^h}, x)^{p-1} = f(\alpha^\gamma)E(\alpha^{\gamma^h}, x)$$

die $(p-1)^{\text{te}}$ Potenz eines solchen Primfactors einer nur α allein enthaltenden complexen Zahl, multiplicirt mit einer Einheit, gleich ist; so dafs man diese immer mit dem Factor $\varphi(\alpha)$ und der Einheit $E(\alpha, x)$ verbunden annehmen kann. Mit Rücksicht hierauf werden die Exponenten $m, m_1, \ldots. m_{\lambda-2}$ am leichtesten dadurch bestimmt, dafs man den Ausdruck

$$P\Big(\frac{1-x^{g^r}}{1-x}\varepsilon(\alpha, x)\Big)$$

in Betracht zieht, und untersucht, unter welcher Bedingung derselbe einen der idealen Primfactoren von p, z. B. $f(\alpha^{\gamma^h}, x)$ nicht enthält. Die hierzu noth-

wendige und hinreichende Bedingung ist, nach Dem was oben bemerkt worden, die, dafs dieser Ausdruck, für $x=1$, nämlich

$$1+g^r\varepsilon(\alpha,1)+g^{2r}\varepsilon(\alpha,1)^2+\cdots+g^{(p-2)r}\varepsilon(\alpha,1)^{p-2}$$

den Factor $f(\alpha^{\gamma^h})$ nicht enthalte. Jede, nur die eine Wurzel der Einheit α enthaltende complexe Zahl ist aber bekanntlich nach dem Modul $f(\alpha^{\gamma^h})$, welcher ein idealer Primfactor von p ist, einer nichtcomplexen ganzen Zahl congruent, welche sich wiederum als Potenz der primitiven Wurzel g darstellen läfst, wenn sie nicht congruent Null ist. Setzt man daher

$$\varepsilon(\alpha,1)\equiv g^s,\quad \text{Mod.}\, f(\alpha^{\gamma^h}),$$

so geht die obige Bedingung in folgende über:

$$1+g^{r+s}+g^{2r+2s}+\cdots+g^{(p-2)(r+s)}\ \text{nicht}\equiv 0,$$

für den Modul $f(\alpha^{\gamma^h})$, also auch für den Modul p; aus welcher dann unmittelbar folgt, dafs

$$r+s\equiv 0,\quad \text{Mod.}\, p-1,$$

sein mufs. Nun hat man aber vermöge der Grund-Eigenschaft:

$$A\cdot P\Big(\frac{1-x^{g^r}}{1-x}\varepsilon(\alpha,x)\Big)=P\Big(\frac{1-x^{g^r}}{1-x}\Big).P\varepsilon(\alpha,x);$$

wo A von der Wurzel der Einheit x unabhängig ist. Ferner ist aus der Definition der mit $P\varepsilon(x)$ bezeichneten Ausdrücke selbst, leicht zu zeigen, dafs

$$P\Big(\frac{1-x^{g^r}}{1-x}\Big)=\frac{C}{(1-x)(1-x^g)\ldots(1-x^{g^{r-1}})}=\frac{CE(x)}{(1-x)^r}$$

ist, wo C eine ganze Zahl und $E(x)$ eine Einheit ist. Der ideale Primfactor $f(\alpha^{\gamma^h},x)$ von p ist also in $P\Big(\frac{1-x^{g^r}}{1-x}\Big)$ genau $(p-1-r)$ mal enthalten, und da derselbe nach der oben angesetzten Form in $P\varepsilon(\alpha,x)$ genau m_h mal enthalten ist, so folgt, dafs

$$P\Big(\frac{1-x^{g^r}}{1-x}\varepsilon(\alpha,x)\Big)$$

diesen idealen Primfactor $(p-1-r+m_h)$mal enthält; wobei $p-1$, oder jedes beliebige Vielfache von $p-1$, hinzugefügt, oder auch weggelassen werden kann. Die Bedingung, dafs dieser Ausdruck den idealen Primfactor $f(\alpha^{\gamma^h},x)$ nicht enthalte, ist also:

$$m_h-r\equiv 0,\quad \text{Mod.}\, p-1,$$

und weil oben, für dieselbe Bedingung,

$$r+s \equiv 0, \text{ Mod. } p-1$$

gefunden wurde, so ergiebt sich:

$$s \equiv -m_h, \text{ Mod. } p-1,$$

also auch:

$$\varepsilon(\alpha, 1) \equiv g^{-m_h}, \text{ Mod. } f(\alpha^{\gamma^h});$$

welche Congruenz die gesuchte Bestimmung der Exponenten $m, m_1, \ldots m_{\lambda-2}$ enthält.

Um dieselbe in ihrer einfachsten Form darzustellen, verwandle ich α in $\alpha^{\gamma^{-h}}$. Dies giebt

$$\varepsilon(\alpha^{\gamma^{-h}}, 1) \equiv g^{-m_h}, \text{ Mod. } f(\alpha).$$

Ferner bezeichne ich allgemein durch Ind. $\varphi(\alpha)$ den Index der complexen Zahl $\varphi(\alpha)$, für den Modul $f(\alpha)$ und für die primitive Wurzel g; dann ist

$$(7.) \quad m_h \equiv -\text{Ind. } \varepsilon(\alpha^{\gamma^{-h}}, 1), \text{ Mod. } p-1,$$

die gesuchte Bestimmung der Exponenten in dem Ausdrucke

$$(8.) \quad P\varepsilon(\alpha, x) = \varphi(\alpha) E(\alpha, x) . f(\alpha, x)^m . f(\alpha^\gamma, x)^{m_1} . f(\alpha^{\gamma^2}, x)^{m_2} \ldots . f(\alpha^{\gamma^{\lambda-2}}, x)^{m_{\lambda-2}}.$$

In dieser allgemeinen Formel ist unter andern auch die Zerlegung der *Lagrange*schen Resolvente der Kreistheilung, welche oben mit $F(\alpha, x)$ bezeichnet wurde, in ihre idealen Primfactoren enthalten, und es werden für dieselbe, wenn man die Gleichung $F(\alpha, x) F(\alpha^{-1}, x) = p$ zu Hülfe nimmt, die Exponenten $m, m_1, \ldots . m_{\lambda-2}$ nicht nur durch Congruenzen für den Modul $p-1$, sondern vollständig bestimmt. Man erhält nämlich, wenn man $\varepsilon(\alpha, x) = \alpha^{-1} x^{g-1}$ annimmt:

$$F(\alpha^{-1}, x) = E(\alpha, x) f(\alpha, x)^\nu . f(\alpha^\gamma, x)^{\nu\gamma-1} f(\alpha^{\gamma^2}, x)^{\nu\gamma-2} \ldots . f(\alpha^{\gamma^{\lambda-2}}, x)^{\nu\gamma-(\lambda-2)},$$

wo $E(\alpha, x)$ eine Einheit und γ_{-h} die kleinste positive Zahl bezeichnet, welche der Potenz γ^{-h} congruent ist, für den Modul λ, $\nu = \frac{p-1}{\lambda}$; und dieser Ausdruck stimmt vollständig mit demjenigen überein, welchen ich früher für die λ^{te} Potenz dieser *Lagrange*schen Resolvente gegeben habe.

Für die Anwendung, welche hier von der Zerlegung des Ausdrucks $P\varepsilon(\alpha, x)$ in seine idealen Primfactoren gemacht werden soll, nehme man noch eine besondere Einheit für $\varepsilon(\alpha, x)$ an, welche nicht sowohl die Wurzeln x, x^g, u. s. w. selbst, sondern nur die λ Perioden derselben, von je ν Glie-

dern, enthält. Wird eine beliebige von diesen Perioden durch η_r bezeichnet, so dafs

$$\eta_r = x^{g^r} + x^{g^{\lambda+r}} + x^{g^{2\lambda+r}} + \ldots + x^{g^{(\nu-1)\lambda+r}}$$

ist, so ist

$$(1-\alpha x)(1-\alpha x^{g^\lambda})(1-\alpha x^{g^{2\lambda}}) \ldots (1-\alpha x^{g^{(\nu-1)\lambda}}) = e(\alpha, \eta)$$

eine Einheit, welche nur die Perioden η, η_1, $\ldots$ $\eta_{\lambda-1}$ enthält, und deren in Beziehung auf diese Perioden allein genommene Norm gleich ***Eins*** ist. Aus dieser setze man nun die folgende zusammen:

$$E_n(\alpha, \eta) = e(\alpha, \eta) e(\alpha^\gamma, \eta)^{\gamma^{-2n}} e(\alpha^{\gamma^2}, \eta)^{\gamma^{-4n}} \ldots e(\alpha^{\gamma^{\lambda-2}}, \eta)^{\gamma^{-2(\lambda-2)n}},$$

und bilde den Ausdruck

$$PE_n(\alpha, \eta) = \varphi(\alpha) E(\alpha, x) f(\alpha, x)^m f(\alpha^\gamma, x)^{m_1} \ldots f(\alpha^{\gamma^{\lambda-2}}, x)^{m_{\lambda-2}}.$$

Um allgemein den Exponenten m_h zu bestimmen, mufs man in der Einheit $E_n(\alpha^{\gamma^{-h}}, \eta)$ dem x den Werth ***Eins*** geben, wodurch dieselbe in

$$(1-\alpha^{\gamma^{-h}})^\nu (1-\alpha^{\gamma^{1-h}})^{\nu\gamma^{-2n}} (1-\alpha^{\gamma^{2-h}})^{\nu\gamma^{-4n}} \ldots (1-\alpha^{\gamma^{\lambda-2-h}})^{\nu\gamma^{-2(\lambda-2)n}}$$

übergeht. Hieraus folgt sogleich, nach der Congruenz (7.):

$$m_h \equiv -\nu \sum_0^{\lambda-2} \gamma^{-2ni} \operatorname{Ind.}(1-\alpha^{\gamma^{i-h}}), \quad \operatorname{Mod.} p-1,$$

und wenn in dieser Summe i in $i+h$ verwandelt wird:

$$m_h \equiv -\nu\gamma^{-2nh} \sum_0^{\lambda-2} \gamma^{-2ni} \operatorname{Ind.}(1-\alpha^{\gamma^i}), \quad \operatorname{Mod.} p-1.$$

Wird nun der Kürze wegen

$$\sum_0^{\lambda-2} \gamma^{-2ni} \operatorname{Ind.}(1-\alpha^{\gamma^i}) \equiv -s, \quad \operatorname{Mod.} \lambda,$$

gesetzt, so ist

$$m_h \equiv \nu s \gamma^{-2nh},$$

und diesemnach:

$$PE_n(\alpha, \eta) = \varphi(\alpha) E(\alpha, x) \{f(\alpha, x) f(\alpha^\gamma, x)^{\gamma^{-2n}} \ldots f(\alpha^{\gamma^{\lambda-2}}, x)^{\gamma^{-2(\lambda-2)n}}\}^{\nu s}.$$

Die Seite rechts in dieser Gleichung läfst sich ebenfalls leicht als Function der λ Perioden η, η_1, $\ldots$ $\eta_{\lambda-1}$ darstellen. Setzt man nämlich

$$f(\alpha, x) f(\alpha, x^{g^\lambda}) f(\alpha, x^{g^{2\lambda}}) \ldots f(\alpha, x^{g^{(\nu-1)\lambda}}) = f(\alpha, \eta),$$

so ist, weil, abgesehen von den Einheiten, $f(\alpha, x)$, $f(\alpha, x^{g^\lambda})$ u. s. w. einander gleich sind, eben so auch

$$f(\alpha, \eta)^\lambda = f(\alpha) \quad \text{und} \quad f(\alpha, \eta) = f(\alpha, x)^\nu,$$

und wenn man von diesen Ausdrücken Gebrauch macht, so erhält man

$$(9.)\quad PE_n(\alpha,\eta) = \varphi(\alpha)E(\alpha,\eta)\{f(\alpha,\eta)f(\alpha^\gamma,\eta)^{\gamma^{-2n}} \ldots\ldots f(\alpha^{\gamma^{\lambda-2}},\eta)^{\gamma^{-2(\lambda-2)n}}\}^s.$$

Nimmt man auf beiden Seiten die ***Norm*** in Beziehung auf die λ Perioden, und erwägt, dafs $Nf(\alpha,\eta)=f(\alpha)$ ist, so hat man:

$$(10.)\quad NPE_n(\alpha,\eta) = \varphi(\alpha)^\lambda E(\alpha)\{f(\alpha)f(\alpha^\gamma)^{\gamma^{-2n}} \ldots\ldots f(\alpha^{\gamma^{\lambda-2}})^{\gamma^{-2(\lambda-2)n}}\}^s.$$

Damit dieser Ausdruck für die in dem Folgenden davon zu machende Anwendung noch besser zubereitet werde, wende man eine, nur die Perioden $\eta, \eta_1, \ldots\ldots \eta_{\lambda-1}$ enthaltende, von α ganz unabhängige Einheit an, nämlich:

$$\frac{(1-x^g)(1-x^{g^{\lambda+1}})(1-x^{g^{2\lambda+1}})\ldots\ldots(1-x^{g^{(\nu-1)\lambda+1}})}{(1-x)(1-x^{g^\lambda})(1-x^{g^{2\lambda}})\ldots\ldots(1-x^{g^{(\nu-1)\lambda+1}})} = e(\eta),$$

Für diese Einheit findet sich nach den oben gegebenen allgemeinen Regeln sehr leicht:

$$P(e(\eta)^s) = C.E(\eta)\{f(\alpha,\eta)f(\alpha^\gamma,\eta)f(\alpha^{\gamma^2},\eta)\ldots\ldots f(\alpha^{\gamma^{\lambda-2}},\eta)\}^{-s},$$

und wenn man diesen Ausdruck mit dem obigen (9.) multiplicirt, so erhält man, unter Anwendung der Grund-Eigenschaft (5.), folgendes Resultat:

$$(11.)\quad P(e(\eta)^s E_n(\alpha,\eta))$$
$$= \varphi(\alpha)E(\alpha,\eta)\{f(\alpha^\gamma,\eta)^{\gamma^{-2n}-1}.f(\alpha^{\gamma^2},\eta)^{\gamma^{-4n}-1} \ldots\ldots f(\alpha^{\gamma^{\lambda-2}},\eta)^{\gamma^{-2(\lambda-2)n}-1}\}^s.$$

Nimmt man endlich noch die Norm in Beziehung auf die Perioden $\eta, \eta_1, \ldots\ldots \eta_{\lambda-1}$, so ergiebt sich auch

$$(12.)\quad NP(e(\eta)^s E_n(\alpha,\eta))$$
$$= \varphi(\alpha)^\lambda E(\alpha)\{f(\alpha^\gamma)^{\gamma^{-2n}-1}f(\alpha^{\gamma^2})^{\gamma^{-4n}-1} \ldots\ldots f(\alpha^{\gamma^{\lambda-2}})^{\gamma^{-2(\lambda-2)n}-1}\}^s,$$

wo

$$s \equiv -\sum_0^{\lambda-2} \gamma^{-2ni}\,\mathrm{Ind}\,(1-\alpha^{\gamma^i}),\quad \text{Mod. } \lambda \text{ ist.}$$

Die Gröfse s ist aus meiner Abhandlung über die Ergänzungssätze zu den allgemeinen Reciprocitätsgesetzen (Band 44. dieses Journals) näher bekannt. Sie läfst sich, wie daselbst (S. 99) gezeigt, in folgende Form schreiben:

$$(13.)\quad s \equiv \frac{-2\,\mathrm{Ind}\,E_n(\alpha)}{\gamma^{2n}-1},$$

wo $E_n(\alpha)$ die zusammengesetzte Kreistheilungs-Einheit bezeichnet, deren Index in der genannten Abhandlung gefunden wird, nämlich die Einheit

$$E_n(\alpha) = e(\alpha)e(\alpha^\gamma)^{\gamma^{-2n}}e(\alpha^{\gamma^2})^{\gamma^{-4n}} \ldots\ldots e(\alpha^{\gamma^{\mu-1}})^{-2(\mu-1)n},$$

für

$$\mu = \tfrac{1}{2}(\lambda - 1) \quad \text{und} \quad e(\alpha) = \sqrt{\frac{(1-\alpha^{\gamma})(1-\alpha^{-\gamma})}{(1-\alpha)(1-\alpha^{-1})}}.$$

III.

Es sollen jetzt die gefundenen Resultate auf denjenigen Fall der allgemeinen Reciprocitätsgesetze angewendet werden, wo zwei conjugirte complexe Primzahlen mit einander zu vergleichen sind.

Zu diesem Zwecke müssen zunächst die in der Formel (12.) vorkommenden idealen oder wirklichen complexen Primfactoren von p, nämlich $f(\alpha)$, $f(\alpha^{\gamma})$, $f(\alpha^{\gamma^2})$, u. s. w., in Betreff der Einheiten mit welchen sie multiplicirt sein können, näher bestimmt werden. Wenn sie ideal sind, so werden sie zunächst zu einer Potenz des Exponenten H erhoben; was sie zu wirklichen complexen Zahlen macht. Diese wirklichen complexen Zahlen werden sodann durch Multiplication mit passenden Einheiten in die Form gebracht, welche ich als die *primäre* bezeichne, in welcher nämlich die complexe Zahl den beiden Bedingungen genügen mufs: *erstens:* dafs sie für den Modul $(1-\alpha)^2$ einer nicht complexen ganzen Zahl congruent ist; *zweitens:* dafs sie, mit ihrer reciproken multiplicirt, ein Product giebt, welches, für den Modul λ, einer nicht complexen ganzen Zahl congruent ist. Auf diese primäre Form läfst sich auch, wie ich früher bewiesen habe, jede aus λ^{ten} Wurzeln der Einheit gebildete complexe Zahl bringen, aufser wenn λ eine von denjenigen Ausnahmezahlen ist, die in einer der ersten $\frac{1}{2}(\lambda-3)$ *Bernoulli*schen Zahlen als Factoren des Zählers vorkommen (M. s. dieses Journal Bd. 44. S. 138 u. S. 141). Diese Ausnahmezahlen, für welche auch der niedrigste Exponent H derjenigen Potenz von $f(\alpha)$, welche *wirklich* wird, durch λ theilbar sein kann, sollen aus diesem Grunde von der gegenwärtigen Untersuchung ausgeschlossen bleiben.

Unter der Voraussetzung, dafs die Primfactoren $f(\alpha)$, $f(\alpha^{\gamma})$, u. s. w. von p in der primären Form genommen werden, ist nun, wie leicht zu sehen, die H^{te} Potenz des Products

$$f(\alpha^{\gamma})^{\gamma^{-2n}-1} \cdot f(\alpha^{\gamma^2})^{\gamma^{-4n}-1} \ \ldots\ f(\alpha^{\gamma^{\lambda-2}})^{\gamma^{-2(\lambda-2)n}-1}$$

einer nicht complexen ganzen Zahl c für den Modul λ congruent. Wenn man daher beide Seiten der Gleichung (12.) zur H^{ten} Potenz erhebt, und daraus eine Congruenz für den Modul λ bildet, so erhält man:

$$[NP(e(\eta)^s \mathrm{E}_n(\alpha,\eta))]^H \equiv cE(\alpha)^H, \quad \text{Mod. } \lambda.$$

Nach den oben in (§. I.) bewiesenen Grund-Eigenschaften der Ausdrücke $P\varepsilon(x)$ wird nun die Norm eines solchen Ausdrucks folgendermafsen durch eine Potenz desselben ausgedrückt:

$$NP(e(\eta)^s \mathrm{E}_n(\alpha,\eta)) = \sum_0^{\lambda-1} {}_i e(\eta_i)^{si} \mathrm{E}_n(\alpha,\eta_i)^i . (Pe(\eta)^s \mathrm{E}_n(\alpha,\eta))^\lambda .$$

Beachtet man, dafs in Beziehung auf den Modul λ jede λ^{te} Potenz einer complexen Zahl, welche α enthält, einer von α unabhängigen Zahl congruent ist, so findet sich

$$NP(e(\eta)^s \mathrm{E}_n(\alpha,\eta)) \equiv C \sum_0^{\lambda-1} {}_i \mathrm{E}_n(\alpha,\eta_i)^i, \quad \text{Mod. } \lambda,$$

wo C eine complexe Zahl ist, welche zwar die Perioden η, η_1, etc., nicht aber die Wurzel der Einheit α enthält. Aus dieser Congruenz, verglichen mit der vorhergehenden, folgt

$$cE(\alpha)^H \equiv C^H \sum_0^{\lambda-1} {}_i \mathrm{E}_n(\alpha,\eta_i)^{iH}, \quad \text{Mod. } \lambda.$$

Hieraus soll nun die bisher unbestimmte Einheit $E(\alpha)$ näher bestimmt werden. Zu diesem Zwecke nehme ich auf beiden Seiten der Congruenz die *Logarithmen;* und zwar in dem Sinne, in welchem ich die Theorie der logarithmischen Ausdrücke für complexe Zahlen in der mehrmals erwähnten Abhandlung (dieses Journals Bd. 44. S. 130 etc.) entwickelt habe. Dies giebt, wenn man noch durch H, welches nach der Annahme nicht durch λ theilbar ist, dividirt:

$$l\left(\frac{E(\alpha)}{E(1)}\right) \equiv \sum_0^{\lambda-1} {}_i\, i\, l\left(\frac{E_n(\alpha,\eta_i)}{E_n(1,\eta_i)}\right), \quad \text{Mod. } \lambda,$$

und da

$$E_n(\alpha,\eta) = e(\alpha,\eta)\, e(\alpha^\gamma,\eta)^{\gamma^{-2n}} \ldots\ldots e(\alpha^{\gamma^{\lambda-2}},\eta)^{\gamma^{-2(\lambda-2)n}},$$

$$e(\alpha,\eta) = (1-\alpha x)(1-\alpha x^{g^\lambda}) \ldots\ldots (1-\alpha x^{g^{(\nu-1)\lambda}})$$

ist, so verwandelt sich dieser Ausdruck leicht in den folgenden:

$$l\left(\frac{E(\alpha)}{E(1)}\right) \equiv \sum_0^{p-2} {}_i \sum_0^{\lambda-2} {}_h\, i\gamma^{-2nh}\, l\left(\frac{1-\alpha^{\gamma^h} x^{g^i}}{1-x^{g^i}}\right), \quad \text{Mod. } \lambda.$$

Ich mache jetzt von der allgemeinen Formel meiner Abhandlung (Bd. 44. S. 134) Gebrauch, nämlich von der Formel

$$\sum_0^{\lambda-2} \gamma^{-kh}\, l\left(\frac{\varphi(\alpha^{\gamma^h})}{\varphi(1)}\right) \equiv \frac{d_0^k l\varphi(e^v)}{dv^k} X_k(\alpha), \quad \text{Mod. } \lambda,$$

in welcher

$$X_k(\alpha) = \alpha + \gamma^{-k}\alpha^{\gamma} + \gamma^{-2k}\alpha^{\gamma^2} + \ldots + \gamma^{-(\lambda-2)k}\alpha^{\gamma^{\lambda-2}}$$

ist, und vermöge deren, wenn $\varphi(\alpha)$ hier gleich $1-\alpha x^{g^i}$ angenommen wird, der gefundene Ausdruck sich in folgenden verwandelt:

$$l\left(\frac{E(\alpha)}{E(1)}\right) \equiv \sum_{0}^{p-2}{}_i \frac{i d_0^{2n} l(1-e^v x^{g^i})}{dv^{2n}} X_{2n}(\alpha), \quad \text{Mod. } \lambda,$$

oder, wenn der Kürze wegen

$$\text{(14.)} \qquad \sum_{0}^{p-2}{}_i \frac{i d_0^{2n} l(1-e^v x^{g^i})}{dv^{2n}} \equiv D_n, \quad \text{Mod. } \lambda,$$

gesetzt wird, in

$$l\left(\frac{E(\alpha)}{E(1)}\right) \equiv D_n X_{2n}(\alpha), \quad \text{Mod. } \lambda.$$

Für die zusammengesetzte Kreistheilungs-Einheit $E_n(\alpha)$, dieselbe, welche oben in (§. II.) vollständig definirt wurde, hat man aber nach (S. 139.) der erwähnten Abhandlung:

$$l\left(\frac{E_n(\alpha)}{E_n(1)}\right) \equiv \frac{(-1)^{n+1}(\gamma^{2n}-1)B_n}{4n} X_{2n}(\alpha), \quad \text{Mod. } \lambda,$$

wo B_n die n^{te} *Bernoulli*sche Zahl bezeichnet. Also wenn M_n durch die Congruenz

$$\text{(15.)} \qquad \frac{(-1)^{n+1}(\gamma^{2n}-1)B_n}{4n} \cdot M_n \equiv D_n, \quad \text{Mod. } \lambda,$$

bestimmt wird, so ist

$$l\left(\frac{E(\alpha)}{E(1)}\right) \equiv M_n . l\left(\frac{E_n(\alpha)}{E_n(1)}\right);$$

woraus nach der bekannten Theorie dieser logarithmischen Ausdrücke und der Einheiten, ohne Schwierigkeit

$$\text{(16.)} \qquad E(\alpha) = \mathrm{E}_n(\alpha)^{M_n},$$

folgt, und wo die gesuchte Bestimmung der Einheit $E(\alpha)$ in der Gleichung (12.) liegt.

Das besondere Reciprocitätsgesetz, welches hier entwickelt werden soll, liegt nur in der Congruenz (15.), welche M_n und D_n verbindet. Diese Gröfsen lassen sich nämlich beide durch die Indices der complexen Primzahlen $f(\alpha^{\gamma})$, $f(\alpha^{\gamma^2})$, ... $f(\alpha^{\gamma^{\lambda-2}})$, in Beziehung auf den Modul $f(\alpha)$ genommen, ausdrücken, so dafs diese Congruenz für die verschiedenen Werthe 1, 2, 3, ... $\frac{1}{2}(\lambda-3)$ von n, ebensoviele Reciprocitätsgleichungen giebt, aus welchen

das einfache Gesetz, wie ich es längst durch Induction gefunden hatte, sich leicht entwickeln läfst. Ich beginne mit der Entwickelung der Gröfse

$$D_n \equiv \sum_{0}^{p-2}{}_i \frac{i d_v^{2n} l(1-e^v x^{g^i})}{dv^{2n}}, \quad \text{Mod. } \lambda.$$

Zunächst hat man

$$\frac{dl(1-e^v x)}{dv} = \frac{-e^v x}{1-e^v x};$$

was auf folgende Form gebracht werden kann:

$$\frac{-e^v x}{1-e^v x} = \frac{x+(1+e^v)x^2+(1+e^v+e^{2v})x^3+\cdots+(1+e^v+\cdots+e^{(p-1)v})x^p}{1+e^v+e^{2v}+\cdots+e^{(p-1)v}},$$

deren Richtigkeit sogleich durch Multiplication mit dem Nenner $1-e^v x$ ersichtlich wird. Bildet man nun den $(2n-1)^{\text{ten}}$ Differentialquotienten dieses Bruchs, und setzt darin $v=0$, so werden alle Differentialquotienten des Nenners $1+e^v+\cdots+e^{(p-1)v}$, vom ersten bis zum $(2n-1)^{\text{ten}}$, congruent ***Null***, für den Modul λ; dieser Nenner selbst aber wird congruent ***Eins***. Die Differentialquotienten dieses Bruchs sind daher für $v=0$ nur den Differentialquotienten seines Zählers für $v=0$ congruent. Man erhält also:

$$\frac{d_v^{2n} l(1-e^v x)}{dv^{2n}} \equiv 1^{2n-1}x^2+(1^{2n-1}+2^{2n-1})x^3+\cdots$$
$$+(1^{2n-1}+2^{2n-1}+\cdots+(p-1)^{2n-1})x^p,$$

oder, wenn der Kürze wegen

$$1^{2n-1}+2^{2n-1}+3^{2n-1}+\cdots+(k-1)^{2n-1} = S_{2n-1}(k)$$

gesetzt wird, und wenn man beachtet, dafs $S_{2n-1}(p) \equiv 0$ für den Modul λ ist, so hat man

$$\frac{d_v^{2n} l(1-e^v x)}{dv^{2n}} \equiv \sum_{2}^{p-1}{}_k S_{2n-1}(k)x^k, \quad \text{Mod. } \lambda,$$

und demgemäfs:

$$D_n \equiv \sum_{0}^{p-2}{}_i \sum_{2}^{p-1}{}_k i\, S_{2n-1}(k)x^{kg^i}, \quad \text{Mod. } \lambda.$$

Setzt man in dem Exponenten von x, $g^{\text{Ind. }k}$ statt k und verwandelt i in $i-\text{Ind. }k$, wobei man dem veränderten i wieder genau dieselben Werthe $i=0, 1, 2, \ldots p-2$ lassen kann, so wird

$$D_n \equiv \sum_{0}^{p-2}{}_i \sum_{2}^{p-1}{}_k (i-\text{Ind. }k) S_{2n-1}(k)x^{g^i},$$

und da $\sum_{2}^{p-1}{}_k S_{2n-1}(k) \equiv 0$, Mod. λ, $\sum_{0}^{p-2}{}_i x^{g^i} = -1$ ist, so fällt x aus dieser Con-

gruenz gänzlich weg, und es wird

$$D_n \equiv \sum_{2}^{p-1}{}_k S_{2n-1}(k) \operatorname{Ind}. k, \quad \text{Mod. } \lambda.$$

Dieser Ausdruck wird zu dem vorliegenden Zwecke weiter auf folgende Weise eingerichtet. Zunächst wird die einfache Summe, indem man $k+h\lambda$ statt k setzt, in folgende Doppelsumme verwandelt:

$$D_n \equiv \sum_{1}^{\lambda-1}{}_k \sum_{0}^{\nu-1}{}_h S_{2n-1}(k) \operatorname{Ind}.(k+h\lambda).$$

Sodann ist

$$\operatorname{Ind}.(k+h\lambda) \equiv \operatorname{Ind}.(k\nu+h\lambda\nu) - \operatorname{Ind}.\nu,$$

und da $\lambda\nu = p-1$ ist, und da die Vielfachen von p innerhalb der Indices weggelassen werden können,

$$\operatorname{Ind}.(k+h\lambda) \equiv \operatorname{Ind}.(k\nu-h) - \operatorname{Ind}.\nu,$$

also

$$\sum_{0}^{\nu-1}{}_h \operatorname{Ind}.(k+h\lambda) \equiv \operatorname{Ind}.\left(\frac{\Pi k\nu}{\Pi(k-1)\nu}\right) - \nu \operatorname{Ind}.\nu,$$

wenn $\Pi(r) = 1.2.3 \ldots . r$ oder

$$\sum_{0}^{\nu-1}{}_h \operatorname{Ind}.(k+h\lambda) \equiv \operatorname{Ind}.\left(\frac{\Pi k\nu}{\Pi(k-1)\nu\,\Pi\nu}\right) - \nu \operatorname{Ind}.\nu + \operatorname{Ind}.\Pi\nu \text{ ist.}$$

Erwägt man nun, dafs $\sum_{1}^{\lambda-1}{}_k S_{2n-1}(k) \equiv 0$ ist, so folgt hieraus:

$$D_n \equiv \sum_{1}^{\lambda-1}{}_k S_{2n-1}(k) \operatorname{Ind}.\left(\frac{\Pi k\nu}{\Pi(k-1)\nu\,\Pi\nu}\right), \text{ Mod. } \lambda.$$

Der in diesem Ausdrucke vorkommende Binomialcoëfficient kann durch eine der von *Jacobi* mit $\Psi_k(\alpha)$ bezeichneten complexen Kreistheilungszahlen ersetzt werden. Aus der Theorie der Kreistheilung (M. s. eine Notiz von *Jacobi* über die Kreistheilung und ihre Anwendung auf Zahlentheorie in den Monatsberichten der Berliner Akademie vom Jahre 1837, abgedruckt in diesem Journal Bd. 30. S. 166 etc.) hat man nämlich:

$$F(\alpha, x) = x + \alpha x^g + \alpha^2 x^{g^2} + \cdots + \alpha^{p-2} x^{g^{p-2}},$$

$$\frac{F(\alpha^{-1}, x)\, F(\alpha^{-k}, x)}{F(\alpha^{-(k+1)}, x)} = \Psi_k(\alpha^{-1}),$$

und wenn g^ν statt α gesetzt wird:

$$\Psi_{k-1}(g^{-\nu}) \equiv -\frac{\Pi k\nu}{\Pi(k-1)\nu\,\Pi\nu}, \quad \text{Mod. } p.$$

Wird nun $f(\alpha)$ als derjenige ideale Primfactor von p betrachtet, welcher in $g^\nu - \alpha$ enthalten ist, so dafs

$$g^\nu \equiv \alpha, \quad \text{Mod. } f(\alpha)$$

ist, so ist

$$\Psi_{k-1}(\alpha^{-1}) \equiv -\frac{\Pi k\nu}{\Pi(k-1)\nu\,\Pi\nu}, \quad \text{Mod. } f(\alpha).$$

Also, wenn das Zeichen Ind. nicht mehr auf den Modul p, sondern nur auf den Modul $f(\alpha)$, Factor von p, bezogen wird, kann D_n folgendermafsen dargestellt werden:

$$D_n = \sum_{2}^{\lambda-1}{}_k S_{2n-1}(k)\,\text{Ind. } \Psi_{k-1}(\alpha^{-1}), \quad \text{Mod. } \lambda.$$

Es ist noch die complexe Zahl $\Psi_{k-1}(\alpha^{-1})$ in ihre Primfactoren, welche zugleich Primfactoren von p sind, zu zerlegen. Aus der von mir angegebenen Zerlegung der λ^{ten} Potenz des *Lagrange*schen Ausdrucks $F(\alpha, x)$ der Kreistheilung, welche, wenn allgemein $\left|\frac{b}{a}\right|$ die kleinste positive Zahl bezeichnet, die der Congruenz $ax \equiv b$, Mod. λ, genügt, folgendermafsen dargestellt werden kann:

$$F(\alpha^{-1}, x)^\lambda = \pm\alpha^5 f(\alpha)^{\left|\frac{1}{1}\right|}.f(\alpha^2)^{\left|\frac{1}{2}\right|}.f(\alpha^3)^{\left|\frac{1}{3}\right|} \ldots . f(\alpha^{\lambda-2})^{\left|\frac{1}{\lambda-1}\right|},$$

erhält man sehr leicht:

$$\Psi_{k-1}(\alpha^{-1}) = \pm\prod_{1}^{\lambda-1}{}_h f(\alpha^h)^{\left(\frac{\left|\frac{1}{h}\right|+\left|\frac{k-1}{h}\right|-\left|\frac{k}{h}\right|}{\lambda}\right)}$$

und demnach

$$D_n \equiv \sum_{2}^{\lambda-1}{}_k \sum_{1}^{\lambda-1}{}_h S_{2n-1}(k)\left(\frac{\left|\frac{1}{h}\right|+\left|\frac{k-1}{h}\right|-\left|\frac{k}{h}\right|}{\lambda}\right)\text{Ind. } f(\alpha^h), \quad \text{Mod. } \lambda,$$

wo, wenn $f(\alpha^{\gamma^h})$ ideal und H der kleinste Exponent ist, für welchen $f(\alpha^{\gamma^h})^H$ *wirklich* wird, die Bedeutung des Ind. $f(\alpha^{\gamma^h})$ als gleich $\frac{1}{H}$ Ind. $f(\alpha^{\gamma^h})^H$ anzusehen ist.

Man setze nun statt $S_{2n-1}(k)$ die in Beziehung auf den Modul λ congruente Reihe $S_{(2n-1)\lambda}(k)$ und multiplicire mit λ, so erhält man

$$\lambda D_n \equiv \sum_{2}^{\lambda-1}{}_k \sum_{1}^{\lambda-1}{}_h S_{(2n-1)\lambda}(k)\left(\left|\frac{1}{h}\right|+\left|\frac{k-1}{h}\right|-\left|\frac{k}{h}\right|\right)\text{Ind. } f(\alpha^h), \quad \text{Mod. } \lambda^2.$$

Nun ist aus den bekannten Formeln für die Potenzsummen der natürlichen Zahlen leicht zu zeigen, dafs

$$\sum_{2}^{\lambda-1}{}_k S_{(2n-1)\lambda}(k) \equiv -\sum_{1}^{\lambda-1}{}_k k^{(2n-1)\lambda+1} \quad \text{und}$$

$$\sum_{2}^{\lambda-1}{}_{k} S_{(2n-1)\lambda}(k)\left(\left|\frac{k-1}{h}\right|-\left|\frac{k}{h}\right|\right) \equiv \sum_{1}^{\lambda-1}{}_{k} k^{(2n-1)\lambda}\left|\frac{k}{h}\right| \equiv h^{(2n-1)\lambda}\cdot\sum_{1}^{\lambda-1}{}_{k} k^{(2n-1)\lambda+1},$$

$$\sum_{1}^{\lambda-1}{}_{k} k^{(2n-1)\lambda+1} \equiv \frac{(-1)^{n+1}B_n\lambda}{2n}$$

für den Modul λ^2 ist. Setzt man diese Werthe hinein, so wird sich der gemeinschaftliche Factor λ hinwegheben, und man erhält so wieder eine Congruenz für den einfachen Modul λ. Setzt man alsdann noch für $h^{(2n-1)\lambda}$ das einfachere h^{2n-1} zurück, so ergiebt sich endlich:

$$(17.) \qquad D_n \equiv \frac{(-1)^{n+1}B_n}{2n}\sum_{2}^{\lambda-1}{}_{h}\frac{h^{2n}-1}{h}\,\mathrm{Ind.}f(\alpha^h), \quad \mathrm{Mod.}\,\lambda.$$

Nachdem so der schwierigste Theil der gegenwärtigen Untersuchung vollendet ist, wende ich mich zur Bestimmung der Gröfse M_n, die aus der oben gefundenen Gleichung (12.)

$$NP(e(\eta)^s \mathrm{E}_n(\alpha,\eta))$$

$$= \varphi(\alpha)^\lambda E(\alpha)\left\{f(\alpha^\gamma)^{\gamma^{-2n}-1} f(\alpha^\gamma)^{\gamma^{-4n}-1} \ldots\ldots f(\alpha^{\gamma^{\lambda-2}})^{\gamma^{-2(\lambda-2)n}-1}\right\}^s$$

entwickelt werden mufs, in welcher

$$E(\alpha) = \mathrm{E}_n(\alpha)^{M_n} \quad \text{und} \quad s \equiv \frac{-2\,\mathrm{Ind.}\,\mathrm{E}_n(\alpha)}{\gamma^{2n}-1}, \quad \mathrm{Mod.}\,\lambda \text{ ist.}$$

Man erhebe beide Seiten dieser Gleichung zur Potenz p, und mache daraus eine Congruenz für den Modul p. Für diesen Modul wird, wie bekannt, die p^{te} Potenz jeder complexen Zahl, welche α und x, oder auch die Perioden $\eta, \eta_1, \ldots\ldots \eta_{\lambda-1}$ enthält, einer complexen Zahl congruent, welche nur α enthält; also wird die $p$te Potenz von $P(e(\eta)^s \mathrm{E}_n(\alpha,\eta))$ einer complexen Zahl $F(\alpha)$ congruent und mithin wird

$$N(Pe(\eta)^s \mathrm{E}_n(\alpha,\eta))^p \equiv F(\alpha)^\lambda, \quad \mathrm{Mod.}\,p.$$

Die p^{te} Potenz einer nur α allein enthaltenden complexen Zahl aber ist dieser complexen Zahl selbst congruent, wenn nämlich, wie hier, $p = \nu\lambda+1$ ist. Die obige Gleichung giebt daher folgende Congruenz:

$$F(\alpha)^\lambda \equiv \varphi(\alpha)^\lambda \mathrm{E}_n(\alpha)^{M_n}\left\{f(\alpha^\gamma)^{\gamma^{-2n}-1}\cdot f(\alpha^{\gamma^2})^{\gamma^{-4n}-1} \ldots\ldots f(\alpha^{\gamma^{\lambda-2}})^{\gamma^{-2(\lambda-2)n}-1}\right\}^s$$

für den Modul p, und darum auch für den Modul $f(\alpha)$, welcher ein Primfactor von p ist. Nimmt man nun auf beiden Seiten dieser Congruenz die Indices in Beziehung auf den Modul $f(\alpha)$, und setzt für s seinen oben gefundenen Werth, so erhält man:

$$0 \equiv M_n \operatorname{Ind.} \mathrm{E}_n(\alpha) - \frac{2 \operatorname{Ind.} \mathrm{E}_n(\alpha)}{\gamma^{2n}-1} \cdot \sum_{1}^{\lambda-2}{}_i (\gamma^{-2ni}-1) \operatorname{Ind.} f(\alpha^{\gamma^i}), \quad \text{Mod. } \lambda.$$

Unter der Voraussetzung, dafs $\operatorname{Ind.} \mathrm{E}_n(\alpha)$ nicht congruent Null ist, für den Modul λ, kann man $\operatorname{Ind.} \mathrm{E}_n(\alpha)$ aufheben, und man findet dann folgenden Ausdruck von M_n:

$$(18.) \qquad M_n \equiv \frac{2}{\gamma^{2n}-1} \sum_{1}^{\lambda-2}{}_i (\gamma^{-2ni}-1) \operatorname{Ind.} f(\alpha^{\gamma^i}), \quad \text{Mod. } \lambda.$$

Die gefundenen Ausdrücke von D_n und M_n sind nun in die Congruenz

$$\frac{(-1)^{n+1}(\gamma^{2n}-1) B_n}{4n} \cdot M_n \equiv D_n, \quad \text{Mod. } \lambda,$$

zu setzen, wodurch dieselbe, nach Aufhebung der gemeinschaftlichen Factoren, folgende Gestalt annimmt:

$$\sum_{1}^{\lambda-2}{}_i (\gamma^{-2ni}-1) \operatorname{Ind.} f(\alpha^{\gamma^i}) \equiv \sum_{2}^{\lambda-1}{}_h \frac{h^{2n}-1}{1} \operatorname{Ind.} f(\alpha^h).$$

Setzt man $h \equiv \gamma^{-i}$, so wird

$$\sum_{1}^{\lambda-2}{}_i (\gamma^{-2ni}-1)(\operatorname{Ind.} f(\alpha^{\gamma^i}) - \gamma^i \operatorname{Ind.} f(\alpha^{\gamma^{-i}})) \equiv 0.$$

Multiplicirt man mit γ^{2nk}, wo k jede beliebige der Zahlen $1, 2, 3, \ldots . \lambda-1$ bedeuten kann, jedoch mit Ausschlufs von $k = \frac{1}{2}(\lambda-1)$, und nimmt die Summe in Beziehung auf $n = 0, 1, 2, \ldots . \frac{1}{2}(\lambda-3)$, so wird dieselbe stets congruent Null; mit alleiniger Ausnahme des Falles $i = k$, für welchen sich

$$(19.) \qquad \operatorname{Ind.} f(\alpha^{\gamma^k}) \equiv \gamma^k \operatorname{Ind.} f(\alpha^{\gamma^{-k}}), \quad \text{Mod. } \lambda$$

ergiebt.

Diese Congruenz stellt das gesuchte einfache Reciprocitätsgesetz unter je zwei complexen Primfactoren einer und derselben Primzahl p dar. Dasselbe kann in den Zeichen, welche für λ^{te} Potenzreste den *Legendre*schen für quadratische nachgebildet sind, folgendermafsen dargestellt werden:

$$(20.) \qquad \left(\frac{f(\alpha^{\gamma^k})}{f(\alpha)}\right) = \left(\frac{f(\alpha)}{f(\alpha^{\gamma^k})}\right).$$

Nach der Definition des *Legendre*schen Zeichens hat man nämlich:

$$\left(\frac{f(\alpha^{\gamma^k})}{f(\alpha)}\right) = \alpha^{\operatorname{Ind.} f(\alpha^{\gamma^k})},$$

also auch

$$\left(\frac{f(\alpha^{\gamma^{-k}})}{f(\alpha)}\right) = \alpha^{\operatorname{Ind.} f(\alpha^{\gamma^{-k}})},$$

und wenn α in α^{γ^k} verwandelt wird:

$$\left(\frac{f(\alpha)}{f(\alpha^{\gamma^k})}\right) = \alpha^{\gamma^k \operatorname{Ind}.f(\alpha^{\gamma^{-k}})};$$

woraus die Übereinstimmung beider Darstellungen dieses Reciprocitätsgesetzes erhellet.

Da der Fall $k = \frac{1}{2}(\lambda - 1)$ oben ausgeschlossen werden mufste, so sagt dieses Reciprocitätsgesetz über den Index des einen complexen Primfactors $f(\alpha^{-1})$ nichts aus. Dieser Mangel läfst sich durch diejenige Reciprocitätsgleichung, welche die von mir gefundene Formel der Kreistheilung giebt, leicht ergänzen. Aus dem Ausdrucke

$$F(\alpha^{-1}, x)^\lambda = \pm \alpha^s f(\alpha)^1 f(\alpha^\gamma)^{\gamma-1} f(\alpha^{\gamma^2})^{\gamma-2} \ldots . f(\alpha^{\gamma^{\lambda-2}})^{\gamma-(\lambda-2)},$$

in welchem für primäre Werthe von $f(\alpha)$ die Einheit α^s gleich Eins wird, erhält man nämlich, wenn man auf beiden Seiten durch $p = f(\alpha).f(\alpha^\gamma)\ldots.f(\alpha^{\gamma^{\lambda-2}})$ dividirt und die Indices in Beziehung auf den Modul $f(\alpha)$ nimmt:

$$0 \equiv \sum_1^{\lambda-2} {}_h(\gamma^{-h} - 1) \operatorname{Ind}.f(\alpha^{\gamma^h}), \quad \text{Mod. } \lambda.$$

Fasset man in dieser Summe je zwei vom Anfange und Ende gleich weit entfernte Glieder zusammen, so wird, vermöge des oben bewiesenen Reciprocitätsgesetzes, die Summe derselben congruent Null, und es bleibt nur das mittelste Glied, nämlich $-2 \operatorname{Ind}.f(\alpha^{-1})$ übrig. Man erhält also

$$(21.) \quad \operatorname{Ind}.f(\alpha^{-1}) \equiv 0, \quad \text{Mod. } \lambda,$$

oder, nach der *Legendre*schen Bezeichnung:

$$(22.) \quad \left(\frac{f(\alpha^{-1})}{f(\alpha)}\right) = 1.$$

Nach ähnlichen Methoden, jedoch nicht ohne Anwendung einiger andern Hülfsmittel, welche ziemlich bedeutende Vorarbeiten erfordern, habe ich auch den Beweis des allgemeinen Reciprocitätsgesetzes für zwei verschiedene nicht congruente complexe Primzahlen gesucht. Dieser allgemeinere Beweis aber leidet, eben so wie der hier gegebene, an dem Mangel, dafs er, auch für Potenzreste von einem bestimmten Exponenten λ, *nicht alle* complexen Primzahlen umfasset, weil die obige Voraussetzung, dafs $\operatorname{Ind}. E_n(\alpha)$ für den Modul λ nicht congruent Null sein darf, und zwar für keinen der Werthe $n = 1, 2, 3, \ldots . \frac{1}{2}(\lambda - 3)$, nicht für alle Primzahlen $f(\alpha)$ erfüllt wird. Für $\lambda = 5$, also für die *fünften* Potenzreste, giebt es folgende acht Primzahlen

unter Tausend, für deren complexe Primfactoren Ind. $E_n(\alpha) \equiv 0$, Mod. 5 ist nämlich: $p = 211$, 281, 421, 461, 521, 691, 881 und 991, auf welche also auch der vorstehende Beweis des Reciprocitätsgesetzes unter conjugirten Primzahlen sich nicht erstreckt, obgleich, wie die wirkliche Ausrechnung mit Hülfe der Tafeln des Canon arithmeticus von ***Jacobi*** leicht ergiebt, dasselbe auch für diese vollständig richtig ist. Sollte es mir nicht gelingen, diese Unvollständigkeit der auf die Ausdrücke $P\varepsilon(\alpha, x)$ gegründeten Beweise der Reciprocitätsgesetze zu entfernen, so würde ich genöthigt sein, den Weg, welchen ich seit mehreren Jahren ausdauernd verfolgt habe, gänzlich zu verlassen und einen andern zu suchen.

Breslau, den 31. August 1854.

14.

Sur quelques questions de la géométrie de position.

(Par Mr. *F. Brioschi,* professeur à l'université de Pavie.)

1re. Relation entre les distances respectives de cinq points pris dans l'espace.

Soient x_s, y_s, z_s les coordonnées d'un quelconque des cinq points; x_r, y_r, z_r les coordonnées d'un sixième point. Je pose:

$$a_{r,s} = (x_r - x_s)^2 + (y_r - y_s)^2 + (z_r - z_s)^2,$$
$$c_s = x_s^2 + y_s^2 + z_s^2, \quad h = x_r^2 + y_r^2 + z_r^2.$$

On a:

$$a_{r,s} - c_s = h - 2x_r x_s - 2y_r y_s - 2z_r z_s,$$

par conséquent:

$$\begin{vmatrix} a_{r,1} - c_1 & 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ a_{r,2} - c_2 & 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ \cdots\cdots & & \cdots\cdots & & \\ a_{r,5} - c_5 & 1 & x_5 & y_5 & z_5 \end{vmatrix} = 0.$$

Le déterminant, premier membre de cette équation, peut être écrit comme suit:

$$\begin{vmatrix} c_1 & a_{r,1} - c_1 & 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ c_2 & a_{r,2} - c_2 & 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ \cdots\cdots & & \cdots\cdots & & & \\ c_5 & a_{r,5} - c_5 & 1 & x_5 & y_5 & z_5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

En ajoutant aux éléments de la seconde colonne ceux de la première, on aura:

$$\begin{vmatrix} c_1 & a_{r,1} & 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ c_2 & a_{r,2} & 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ \cdots\cdots & & \cdots\cdots & & & \\ c_5 & a_{r,5} & 1 & x_5 & y_5 & z_5 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

De cette équation on conclût que le produit des deux déterminants

$$\begin{vmatrix} c_1 & a_{r,1} & 1 & -2x_1 & -2y_1 & -2z_1 \\ c_2 & a_{r,2} & 1 & -2x_2 & -2y_2 & -2z_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_5 & a_{r,5} & 1 & -2x_5 & -2y_5 & -2z_5 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & a_{r,1} & c_1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & a_{r,2} & c_2 & x_2 & y_2 & z_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_{r,5} & c_5 & x_5 & y_5 & z_5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

est égal à zéro, et l'on aura:

$$\begin{vmatrix} a_{r,1}^2 & a_{r,1}a_{r,2}+a_{1,2} & \cdots & a_{r,1}a_{r,5}+a_{1,5} & a_{r,1}+1 \\ a_{r,1}a_{r,2}+a_{1,2} & a_{r,2}^2 & \cdots & a_{r,2}a_{r,5}+a_{2,5} & a_{r,2}+1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r,1}a_{r,5}+a_{1,5} & a_{r,2}a_{r,5}+a_{2,5} & \cdots & a_{r,5}^2 & a_{r,5}+1 \\ a_{r,1}+1 & a_{r,2}+1 & \cdots & a_{r,5}+1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Supposons que le sixième point coïncide avec le premier; alors on a:

$$a_{r,1}=0, \quad a_{r,2}=a_{1,2}, \quad \cdots \quad a_{r,5}=a_{1,5}.$$

En substituant ces valeurs dans le déterminant, premier membre de la dernière équation, et en ajoutant aux éléments de la seconde ligne ceux de la première, multipliés par $-a_{1,2}$; aux éléments de la troisième ceux de la première, multipliés par $-a_{1,3}$, etc.; et enfin, en ôtant des éléments de la dernière ligne les éléments de la première, on obtient:

$$(1.) \quad \begin{vmatrix} 0 & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,5} & 1 \\ a_{1,2} & 0 & a_{2,3} & \cdots & a_{2,5} & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1,5} & a_{2,5} & a_{3,5} & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation est celle qu'on trouve développée dans le mémoire de *Carnot* „Sur la relation qui existe, etc."

Il est évident que les relations analogues pour *quatre* points dans un *plan,* et *trois* points dans une *droite* seront:

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & 1 \\ a_{1,2} & 0 & a_{2,3} & a_{2,4} & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1,4} & a_{2,4} & a_{3,4} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & a_{1,2} & a_{1,3} & 1 \\ a_{1,2} & 0 & a_{2,3} & 1 \\ a_{1,3} & a_{2,3} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

c'est-à-dire le volume du *tétraèdre,* ayant pour sommets les *quatre* points, est nul; et également l'aire du *triangle* ayant pour sommets les *trois* points.

Et comme, en indiquant par $v_1, v_2, \ldots v_5$ les volumes des cinq tétraèdres qui ont leurs sommets dans cinq points pris dans l'espace, on a:

$$\text{Norme } (\pm v_1 \pm v_2 \pm \cdots \pm v_5) = 0.$$

Ainsi le premier membre de l'équation (1.) sera un facteur du premier membre de cette dernière: propriété établie à priori par M^r. ***Sylvester*** dans son excellent mémoire „On the relation between the volume etc." (The Cambridge and Dublin Mathematical Journal. May 1853.)

2e. Relation entre les distances respectives de cinq points situés sur un ellipsoïde.

Soit

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$$

l'équation de l'ellipsoïde; $\delta_{r,s}$ la distance rectiligne entre le point s et un point quelconque r pris dans l'espace; $D_{r.s}$ le demi-diamètre de l'ellipsoïde parallèle à $\delta_{r,s}$. En posant:

$$\frac{\delta_{r,s}^2}{D_{r,s}} = a_{r,s}, \quad h = 1 + \frac{x_r^2}{\alpha^2} + \frac{y_r^2}{\beta^2} + \frac{z_r^2}{\gamma^2},$$

on a:

$$a_{r,s} = h - \frac{2x_r}{\alpha^2} x_s - \frac{2y_r}{\beta^2} y_s - \frac{2z_r}{\gamma^2} z_s,$$

et par conséquent:

$$\begin{vmatrix} a_{r,1} & 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ a_{r,2} & 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r,5} & 1 & x_5 & y_5 & z_5 \end{vmatrix} = 0 \text{ *).}$$

Le carré du déterminant

$$\begin{vmatrix} a_{r,1} & \sqrt{-1} & \frac{x_1}{\alpha} & \frac{y_1}{\beta} & \frac{z_1}{\gamma} \\ a_{r,2} & \sqrt{-1} & \frac{x_2}{\alpha} & \frac{y_2}{\beta} & \frac{z_2}{\gamma} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r,5} & \sqrt{-1} & \frac{x_5}{\alpha} & \frac{y_5}{\beta} & \frac{z_5}{\gamma} \end{vmatrix}$$

*) Cette relation, dans le cas d'une sphère, a été donnée par M^rs. *Luchterhand, Möbius, Joachimsthal.* T^e. 23, 26, 40 de ce Journal. Je l'ai étendue à un *ellipsoïde,* en supposant le sixième point situé sur la surface, et M^r. *Genocchi* a remarqué qu'elle a lieu encore si le sixième point est situé dans l'espace. (Nouvelles Annales de M^r. *Terquem.* Mai 1853, Novembre 1854.)

sera donc nul, et l'on aura:

$$\begin{vmatrix} a_{r,1}^2 & a_{r,1}a_{r,2} - \frac{1}{2}a_{1,2} & \dots & a_{r,1}a_{r,5} - \frac{1}{2}a_{1,5} \\ a_{r,1}a_{r,2} - \frac{1}{2}a_{1,2} & a_{r,2}^2 & \dots & a_{r,2}a_{r,5} - \frac{1}{2}a_{2,5} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r,1}a_{r,5} - \frac{1}{2}a_{1,5} & a_{r,2}a_{r,5} - \frac{1}{2}a_{2,5} & \dots & a_{r,5}^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Et en supposant que le point r coïncide avec le premier, et en ôtant ensuite des éléments de la seconde ligne ceux de la première multipliés par $a_{1,2}$, etc. on obtiendra la relation cherchée:

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} \\ a_{1,2} & 0 & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1,5} & a_{2,5} & a_{3,5} & a_{4,5} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

La relation analogue entre les distances de *quatre* points situés sur une ellipse sera:

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{1,2} & 0 & a_{2,3} & a_{2,4} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1,4} & a_{2,4} & a_{3,4} & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire:

$$\text{Norme } (\pm a_{1,2}a_{3,4} \pm a_{1,3}a_{2,4} \pm a_{1.4}a_{2,3}) = 0.$$

Les relations entre les distances de *cinq* points situés sur une *sphère*, et de *quatre* points situés sur une *circonférence*, sont des cas particuliers de celles-ci.

3me. Relation entre les plus courtes distances respectives et les inclinaisons mutuelles de sept droites quelconques.

Soient x_s, y_s, z_s les coordonnées d'un point situé sur l'une des droites; α_s, β_s, γ_s les cosinus des angles de la même droite avec les axes; x_r, y_r, z_r; α_r, β_r, γ_r les mêmes quantités pour une huitième droite; $\delta_{r,s}$, la plus courte distance entre les droites r et s; $w_{r,s}$ l'angle de ces deux droites. En posant:

$$y_r\gamma_r - z_r\beta_r = a_r, \quad z_r\alpha_r - x_r\gamma_r = b_r, \quad x_r\beta_r - y_r\alpha_r = c_r, \quad \delta_{r,s}\sin w_{r,s} = a_{r,s},$$

on a:

$$a_{r,s} = a_r\alpha_s + b_r\beta_s + c_r\gamma_s + a_s\alpha_r + b_s\beta_r + c_s\gamma_r,$$

et par conséquent:

$$\begin{vmatrix} a_{r,1} & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & a_1 & b_1 & c_1 \\ a_{r,2} & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & a_2 & b_2 & c_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r,7} & \alpha_7 & \beta_7 & \gamma_7 & a_7 & b_7 & c_7 \end{vmatrix} = 0$$

et le produit de ce déterminant par

$$\begin{vmatrix} a_{r,1} & a_1 & b_1 & c_1 & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ a_{r,2} & a_2 & b_2 & c_2 & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r,7} & a_7 & b_7 & c_7 & \alpha_7 & \beta_7 & \gamma_7 \end{vmatrix}$$

sera nul. En observant que:

$$a_r\alpha_r + b_r\beta_r + c_r\gamma_r = 0,$$

on aura:

$$\begin{vmatrix} a_{r,1}^2 & a_{r,1}a_{r,2} + a_{1,2} & \cdots & a_{r,1}a_{r,7} + a_{1,7} \\ a_{r,1}a_{r,2} + a_{1,2} & a_{r,2}^2 & \cdots & a_{r,2}a_{r,7} + a_{2,7} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r,1}a_{r,7} + a_{1,7} & a_{r,2}a_{r,7} + a_{2,7} & \cdots & a_{r,7}^2 \end{vmatrix} = 0.$$

En supposant que la huitième droite coïncide avec la première, on obtiendra la relation

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,7} \\ a_{1,2} & 0 & a_{2,3} & \cdots & a_{2,7} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1,7} & a_{2,7} & a_{3,7} & \cdots & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Il ist évident que pour *six* droites coupées par une *septième,* on aura:

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{1,2} & \cdots & a_{1,6} \\ a_{1,2} & 0 & \cdots & a_{2,6} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1,6} & a_{2,6} & \cdots & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

En nommant $m_1, m_2, \ldots m_7$ les moments de *sept couples composantes* d'un même système de forces, ayant pour axes les sept droites supérieures, on a:

$$\begin{vmatrix} m_1 & a_1 & b_1 & c_1 & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ m_2 & a_2 & b_2 & c_2 & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ m_7 & a_7 & b_7 & c_7 & \alpha_7 & \beta_7 & \gamma_7 \end{vmatrix} = 0,$$

et pour produit des deux déterminants:

$$\begin{vmatrix} 0 & m_1 & a_1 & \dots & \gamma_1 \\ 0 & m_2 & a_2 & \dots & \gamma_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & m_7 & a_7 & \dots & \gamma_7 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} m_1 & 0 & \alpha_1 & \dots & c_1 \\ m_2 & 0 & \alpha_2 & \dots & c_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_7 & 0 & \alpha_7 & \dots & c_7 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

ou:

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{1,2} & \dots & a_{1,7} & m_1 \\ a_{1,2} & 0 & \dots & a_{2,7} & m_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1,7} & a_{2,7} & \dots & 0 & m_7 \\ m_1 & m_2 & \dots & m_7 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Il en résulte que les équations

$$m_1 = m_2 = \dots = m_6 = 0$$

seront des conditions nécessaires et suffisantes pour l'équilibre du système, pourvu que

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{1,2} & \dots & a_{1,6} \\ a_{1,2} & 0 & \dots & a_{2,6} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1,6} & a_{2,6} & \dots & 0 \end{vmatrix} \text{ non } = 0;$$

et par conséquent les axes des couples ne doivent pas pouvoir être rencontrés par une même droite.

Pavie, 18 Décembre 1854.

15.

Sur deux formules relatives à la théorie de la décomposition des fractions rationnelles.

(Par Mr. *Brioschi*, professeur à l'université de Pavie.)

Lemme 1. Soient $x_1, x_2, \ldots x_n$ les racines, supposées inégales, de l'équation

$$(1.) \quad f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0;$$

on a:

$$(2.) \quad \frac{da_r}{dx_s} = -(a_1 x_s^{r-1} + a_1 x_s^{r-2} + \cdots + a_{r-2} x_s + a_{r-1})$$

pour $r = 1, 2, \ldots n$; et

$$(3.) \quad \frac{dx_s}{da_i} = -\frac{x_s^{n-i}}{f'(x_s)}$$

pour $i = 0, 1, 2, \ldots n$.

Lemme 2. En désignant par Δ le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

et par $\Delta\left(\frac{x^r}{x^s}\right)$, le déterminant qu'on obtient en substituant $x_1^s, x_2^s, \ldots x_n^s$ dans le déterminant Δ aux lieu des éléments $x_1^r, x_2^r, \ldots x_n^r$, on a:

$$(4.) \quad a_r = -\frac{a_0}{\Delta}\Delta\left(\frac{x^{n-r}}{x^n}\right).$$

Lemme 3. Si l'on suppose $s = 1, 2, \ldots r-1, r+1, \ldots n$, et qu'on élimine les quantités $\frac{da_r}{dx_1}, \frac{da_r}{dx_2}, \ldots \frac{da_r}{dx_n}$ des $(n+1)$ équations

$$(5.) \quad \begin{cases} \frac{da_r}{dx_1}\cdot\frac{dx_1}{da_s} + \frac{da_r}{dx_2}\cdot\frac{dx_2}{da_s} + \cdots + \frac{da_r}{dx_n}\cdot\frac{dx_n}{da_s} = 0, \\ \frac{da_r}{dx_1}\cdot\frac{dx_1}{da_r} + \frac{da_r}{dx_2}\cdot\frac{dx_2}{da_r} + \cdots + \frac{da_r}{dx_n}\cdot\frac{dx_n}{da_r} = 1, \\ \frac{da_r}{dx_1}\cdot\frac{dx_1}{da_0} + \frac{da_r}{dx_2}\cdot\frac{dx_2}{da_0} + \cdots + \frac{da_r}{dx_\nu}\cdot\frac{dx_n}{da_0} = P_r, \end{cases}$$

on obtient:

$$\begin{vmatrix} \frac{dx_1}{da_n} & \frac{dx_2}{da_n} & \cdots & \frac{dx_n}{da_n} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{dx_1}{da_r} & \frac{dx_2}{da_r} & \cdots & \frac{dx_n}{da_r} & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{dx_1}{da_1} & \frac{dx_2}{da_1} & \cdots & \frac{dx_n}{da_1} & 0 \\ \frac{dx_1}{da_0} & \frac{dx_2}{da_0} & \cdots & \frac{dx_n}{da_0} & P_r \end{vmatrix} = 0.$$

De cette équation, à cause de l'équation (3.), on tire:

$$P_r \Delta - \Delta\left(\frac{x^{n-r}}{x^n}\right) = 0$$

et en ayant égard à la relation (4.), on a:

$$(6.) \qquad P_r = -\frac{a_r}{a_0}.$$

Théorème 1. Soit:

$$\varphi(x) = c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + \cdots + c_{n-1} x + c_n$$

et

$$S_r = \frac{x_1^r \varphi(x_1)}{f'(x_1)} + \frac{x_2^r \varphi(x_2)}{f'(x_2)} + \cdots + \frac{x_n^r \varphi(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Si l'on suppose $r < n$, on a:

$$(7.) \qquad a_0 S_r + a_1 S_{r-1} + \cdots + a_{r-1} S_1 + a_r S_0 = c_{r+1} - \frac{c_0 a_{r+1}}{a_0}.$$

En effet, en substituant dans le premier membre de cette équation, que je désignerai par L_r, les valeurs de S_r, S_{r-1}, etc. on a:

$$L_r = \sum_1^n{}_s \left[(a_0 x_s^r + a_1 x_s^{r-1} + \cdots + a_r) \frac{\varphi(x_s)}{f'(x)} \right],$$

relation qui, transformée au moyen de l'équation (2.), donne

$$L_r = -\sum_1^n{}_s \left[\frac{da_{r+1}}{dx_s} \cdot \frac{\varphi(x_s)}{f'(x_s)} \right],$$

ou bien:

$$L_r = c_0 \sum_1^n{}_s \left(\frac{da_{r+1}}{dx_s} \cdot \frac{dx_s}{da_0} \right) + c_1 \sum_1^n{}_s \left(\frac{da_{r+1}}{dx_1} \cdot \frac{dx_s}{da_1} \right) + \cdots + c_n \sum_1^n{}_s \left(\frac{da_{r+1}}{dx_s} \cdot \frac{dx_s}{da_n} \right)$$

et ayant égard aux relations (5, 6.), on a:

$$L_r = c_{r+1} - \frac{c_0}{a_0} a_{r+1}.$$

Observons que l'on a évidemment:

$$a_0 S_n + a_1 S_{n-1} + \cdots + a_n S_0 = 0,$$
$$a_0 S_{n+r} + a_1 S_{n+r-1} + \cdots + a_n S_r = 0.$$

L'équation (7.) et ses analogues, donnent la première des formules qu'on voulait établir, savoir:

$$S_r = (-1)^r \frac{1}{a_0^{r+1}} \begin{vmatrix} L_0 & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ L_1 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ L_{r-1} & a_{r-1} & a_{r-2} & \cdots & a_0 \\ L_r & a_r & a_{r-1} & \cdots & a_1 \end{vmatrix}$$

dans laquelle (si $r > n$) on doit poser

$$a_{n+1} = a_{n+2} = \cdots = a_r = 0, \qquad c_{n+1} = c_{n+2} = \cdots = c_r = 0.$$

Il est évident que si le degré de $\varphi(x)$ était $< n$, par exemple égal à $n - i$, on devroit faire $c_0 = c_1 = \cdots = c_{n-i-1} = 0$.

La formule ci-dessus peut être transformée au moyen d'une propriété des déterminants, et l'on obtient:

$$S_r = -(-1)^{r+1} \frac{1}{a_0^{r+2}} \begin{vmatrix} c_0 & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ c_1 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_r & a_r & a_{r-1} & \cdots & a_0 \\ c_{r+1} & a_{r+1} & a_r & \cdots & a_1 \end{vmatrix}$$

J'ajoute quelques exemples. Pour $r = 0$ on a:

$$\sum_1^n{}_s \frac{\varphi(x_s)}{f'(x_s)} = -\frac{1}{a_0^2}(a_1 c_0 - a_0 c_1);$$

formule très- connue. Pour $r = 1$ on a:

$$\sum_1^n{}_s \frac{x_s \varphi(x_s)}{f'(x_s)} = \frac{1}{a_0^3}(a_1^2 c_0 - a_0 a_1 c_1 + a_0^2 (c_2 - c_0)).$$

Théorème 2. Soit:

$$T_r = \frac{x_1^r \varphi(x_1)}{(x - x_1) f'(x_4)} + \frac{x_2^r \varphi(x_2)}{(x - x_2) f'(x_2)} + \cdots + \frac{x_n^r \varphi(x_n)}{(x - x_n) f'(x_n)}$$

et

$$V_r = a_0 T_r + a_1 T_{r-1} + \cdots + a_r T_0,$$

on a:

$$V_r = T_0(a_0 x^r + a_1 x^{r-1} + \cdots + a_r) - (L_0 x^{r-1} + L_1 x^{r-2} + \cdots + L_{r-1}).$$

On tire cette propriété tout de suite de l'expression V_r en observant que

$$T_r = xT_{r-1} - S_{r-1}.$$

La valeur de

$$T_0 = \sum_1^n{}_s \frac{\varphi(x_s)}{(x-x_s)f'(x_s)}$$

s'obtient au moyen de la formule (3.). En effet on a:

$$-T_0 = c_0 \sum_1^n{}_s \frac{1}{x-x_s}\cdot\frac{dx_s}{da_0} + c_1 \sum_1^n{}_s \frac{1}{x-x_s}\cdot\frac{dx_s}{da_1} + \cdots + c_n \sum_1^n{}_s \frac{1}{x-x_s}\cdot\frac{dx_s}{da_n}.$$

Mais:

$$\sum_1^n{}_s \frac{1}{x-x_s}\cdot\frac{dx_s}{da_i} = -\sum_1^n{}_s \frac{d\log(x-x_s)}{da_i},$$

par conséquent:

$$\sum_1^n{}_s \frac{1}{x-x_s}\cdot\frac{dx_s}{da_0} = \frac{1}{a_0} - \frac{x^n}{f(x)},$$

$$\sum_1^n{}_s \frac{1}{x-x_s}\cdot\frac{dx_s}{da_i} = -\frac{x^{n-i}}{f(x)}.$$

En substituant, on arrive à la relation connue:

$$T_0 = -\frac{c_0}{a_0} + \frac{\varphi(x)}{f(x)}.$$

L'équation (8.) et ses analogues donnent, quelques réductions faites la seconde formule

$$T_r = (-1)^{r+1}\frac{1}{a_0^{r+1}}\begin{vmatrix} h_0 & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ h_1 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ h_{r-1} & a_{r-1} & a_{r-2} & \cdots & a_0 \\ h_r & a_r & a_{r-1} & \cdots & a_1 \end{vmatrix} + x^r\frac{\varphi(x)}{f(x)}$$

si l'on pose:

$$h_s = c_0 x^s + c_1 x^{s-1} + \cdots + c_s.$$

Pavie, 8. Février 1855.

16.

Über die Schwingungen eines frei hangenden, biegsamen Fadens.

(Von Herrn Dr. *Minding,* Professor an der Universität zu Dorpat.)

In der „Mécanique analytique t. I. p. 293—396" beschäftigt sich *Lagrange* mit den Schwingungen eines frei hangenden, mit beliebigen Gewichten an beliebigen Stellen beschwerten biegsamen Fadens, verläfst jedoch sehr bald die allgemeine Untersuchung, um sich auf den besondern Fall *gleicher* Gewichte in *gleichen* Abständen zu beschränken; welcher allein vollständig durchgeführt wird. Das dabei gefundene schöne Resultat macht den schon an sich nahe liegenden Wunsch einer *allgemeinen* Lösung der Aufgabe nur um so reger, und veranlafste mich vor mehr als einem Jahre, solche zu suchen. Meine damals der kaiserlich-russischen Akademie d. W. vorgelegte Arbeit ist im ersten Bande der „Mélanges mathématiques et astronomiques (v. J. 1853)" abgedruckt worden. Es möge mir gestattet sein, hier mit einigen weitern Ausführungen auf denselben Gegenstand zurückzukommen.

Ein als *masselos, vollkommen biegsam* aber *nicht dehnbar* angenommener Faden AB (Taf. IV. Fig. 1.) hangt von A frei herab und ist in den Puncten $p_1, p_2, \ldots p_\nu$ mit gleichnamigen Gewichten belastet. Das Gewicht p_1 befindet sich in dem untern Endpuncte B; hierauf folgen die übrigen, aufwärts in den Abständen $p_1p_2 = l_1$, $p_2p_3 = l_2$, $\ldots p_{\nu-1}p_\nu = l_{\nu-1}$; endlich $p_\nu A = l_\nu$. Der Ort, den B (oder auch p_1) in der Gleichgewichtslage des Fadens einnimmt, sei der Anfang der rechtwinkligen Coordinaten x, y, z; BA sei die Axe der x; x_μ, y_μ, z_μ seien die Coordinaten des Gewichts p_μ zu der Zeit t. Für den Punct A ist $x_{\nu+1} = l_1 + l_2 + \cdots l_\nu = L$, $y_{\nu+1} = 0$, $z_{\nu+1} = 0$.

Wird die *Spannung* des Fadens in l_μ durch $q_\mu l_\mu$ und die *Schwere* durch g bezeichnet, so ergeben sich für die Bewegung des Gewichts p_μ die Gleichungen

$$\frac{p_\mu}{g}\frac{d^2x_\mu}{dt^2} = -p_\mu - q_{\mu-1}(x_\mu - x_{\mu-1}) - q_\mu(x_\mu - x_{\mu+1}),$$

$$\frac{p_\mu}{g}\frac{d^2y_\mu}{dt^2} = -q_{\mu-1}(y_\mu - y_{\mu-1}) - q_\mu(y_\mu - y_{\mu+1}),$$

$$\frac{p_\mu}{g}\frac{d^2z_\mu}{dt^2} = -q_{\mu-1}(z_\mu - z_{\mu-1}) - q_\mu(z_\mu - z_{\mu+1}),$$

nebst den Bedingungsgleichungen von der Form

$$U_\mu = (x_\mu - x_{\mu+1})^2 + (y_\mu - y_{\mu+1})^2 + (z_\mu - z_{\mu+1})^2 - l_\mu^2 = 0 \text{ (für } \mu = 1, 2, 3, \ldots \nu).$$

Die Gleichung $U_\mu = 0$ gilt jedoch nur so lange, als die Spannung in l_μ, und mithin q_μ, *positiv* bleibt. Da nämlich der biegsame Faden auch Bewegungen gestattet, bei welchen U_μ ***negativ*** wird, so würde in solchem, hier übrigens nicht weiter in Betracht kommenden Falle, $q_\mu = 0$ zu setzen sein.

Die gegenwärtige Untersuchung beschränkt sich auf die Annahme *sehr kleiner* Schwingungen des Fadens um die Gleichgewichtslage, welche erlauben, die Quadrate der y und z zu vernachlässigen. Dadurch geht die Gleichung $U_\mu = 0$ in $x_{\mu+1} - x_\mu = l_\mu$ über; d. h. es erhalten die $x_1, x_2, \ldots x_\nu$ unveränderliche Werthe, nämlich $x_1 = 0$, $x_2 = l_1$, u. s. f.; mithin verschwinden in den Differentialgleichungen der Bewegung auch die Beschleunigungen $\frac{d^2 x_\mu}{dt^2}$ und die Spannungen bleiben dieselben, wie im Gleichgewichte, nämlich $q_1 l_1 = p_1 = P_1$, $q_2 l_2 = p_1 + p_2 = P_2$, $\ldots . q_\mu l_\mu = p_1 + p_2 + p_3 \cdots + p_\mu = P_\mu$. Es werden dadurch auch die zweite und dritte Gleichung ganz unabhängig von einander; oder es genügt, nur Schwingungen in der Ebene xy zu betrachten, für welche demnach folgende Gleichungen Statt finden:

$$\begin{aligned}
\frac{p_1}{g}\frac{d^2 y_1}{dt^2} &= -q_1(y_1 - y_2), \\
\frac{p_2}{g}\frac{d^2 y_2}{dt^2} &= -q_1(y_2 - y_1) - q_2(y_2 - y_3), \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\frac{p_\mu}{g}\frac{d^2 y_\mu}{dt^2} &= -q_{\mu-1}(y_\mu - y_{\mu-1}) - q_\mu(y_\mu - y_{\mu+1}), \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\frac{p_\nu}{g}\frac{d^2 y_\nu}{dt^2} &= -q_{\nu-1}(y_\nu - y_{\nu-1}) - q_\nu(y_\nu - y_{\nu+1});
\end{aligned}$$

wo $q_{\nu+1} = 0$ ist.

Um diesen Gleichungen zu genügen, sei

$$y_1 = C.\cos t\sqrt{(gk)} + D.\sin t\sqrt{(gk)}$$

und

$y_2 = f_1 y_1$, $y_3 = f_2 y_1$, $\ldots y_\nu = f_{\nu-1} y_1$; endlich $y_{\nu+1} = f_\nu y_1 = 0$, also $f_\nu = 0$.

Die unbekannten Factoren f unterliegen daher folgenden Bedingungen:

$$\text{(I.)}\quad \begin{cases} 0 = p_1 k & -q_1(1-f_1), \\ 0 = p_2 f_1 k + q_1(1-f_1) & -q_2(f_1-f_2), \\ \cdots\cdots\cdots\

Derselbe Werth läfst sich auch also ausdrücken:

$$(\text{III } b.) \qquad \alpha_\mu^\lambda = \sum_{n^\lambda=1}^{n^\lambda=\mu} l_{n^\lambda} \sum_{n^{\lambda-1}=1}^{n^{\lambda-1}=n^\lambda} l_{n^{\lambda-1}} \cdots \sum_{n''=1}^{n''=n'''} l_{n''} \sum_{n'=1}^{n'=n''} l_{n'} . \Pi_{n^\lambda},$$

wo bei der Summation die obere Grenze eingeschlossen ist. In dieser Form treten nämlich, wie leicht zu sehen, zu den so eben angegebenen Combinationen nur noch solche hinzu, in welchen zwei gleiche Zeiger einander folgen; in allen diesen Fällen ist aber $\Pi_{n^\lambda} = 0$.

Die Richtigkeit des angegebenen Werths von α_μ^λ läfst sich wie folgt beweisen.

Werden in dem Ausdrucke (III *a.*) diejenigen Theile, in welchen $n^\lambda = \mu$ ist, von den übrigen abgesondert, wo n^λ höchstens $= \mu - 1$ ist, so geben die letzteren zusammen $\alpha_{\mu-1}^\lambda$, und man erhält:

$$\alpha_\mu^\lambda - \alpha_{\mu-1}^\lambda = l_\mu \overset{(\mu-1)}{\Sigma} l_{n'} l_{n''} \ldots l_{n^{\lambda-1}} . \Pi_{n^{\lambda-1}} . \left(1 - \frac{P_{n^{\lambda-1}}}{P_\mu}\right),$$

oder

$$\frac{\alpha_\mu^\lambda - \alpha_{\mu-1}^\lambda}{l_\mu} = \alpha_{\mu-1}^{\lambda-1} - \frac{1}{P_\mu} \overset{(\mu-1)}{\Sigma} l_{n'} l_{n''} \ldots l_{n^{\lambda-1}} . \Pi_{n^{\lambda-1}} . P_{n^{\lambda-1}}.$$

Ferner ist

$$\alpha_\mu^{\lambda-1} = \alpha_{\mu-1}^{\lambda-1} + l_\mu \overset{(\mu-1)}{\Sigma} l_{n'} l_{n''} \ldots l_{n^{\lambda-2}} . \left(1 - \frac{P_{n^{\lambda-2}}}{P_\mu}\right),$$

folglich:

$$(a.) \qquad P_\mu \left(\frac{\alpha_\mu^\lambda - \alpha_{\mu-1}^\lambda}{l_\mu} - \alpha_\mu^{\lambda-1}\right)$$

$$= - \overset{(\mu-1)}{\Sigma} l_{n'} l_{n''} \ldots l_{n^{\lambda-1}} . \Pi_{n^{\lambda-1}} . P_{n^{\lambda-1}} - l_\mu \overset{(\mu-2)}{\Sigma} l_{n'} l_{n''} \ldots l_{n^{\lambda-2}} . \Pi_{n^{\lambda-2}} . [P_\mu - P_{n^{\lambda-2}}].$$

Eben so ist

$$\alpha_{\mu+1}^\lambda - \alpha_\mu^\lambda = l_{\mu+1} . \alpha_\mu^{\lambda-1} - \frac{l_{\mu+1}}{P_{\mu+1}} \overset{(\mu)}{\Sigma} l_{n'} l_{n''} \ldots l_{n^{\lambda-1}} . \Pi_{n^{\lambda-1}} . P_{n^{\lambda-1}},$$

oder

$$P_{\mu+1} \left(\frac{\alpha_{\mu+1}^\lambda - \alpha_\mu^\lambda}{l_{\mu+1}} - \alpha_\mu^{\lambda-1}\right) = - \overset{(\mu)}{\Sigma} l_{n'} l_{n''} \ldots l_{n^{\lambda-1}} . \Pi_{n^{\lambda-1}} . P_{n^{\lambda-1}}.$$

Werden hier wieder rechter Hand die in l_μ multiplicirten Glieder, für welche $n^{\lambda-1} = \mu$ ist, von den übrigen abgesondert, so erhält man:

$$(b.) \qquad P_{\mu-1} \left(\frac{\alpha_{\mu+1}^\lambda - \alpha_\mu^\lambda}{l_{\mu+1}} - \alpha_\mu^{\lambda-1}\right)$$

$$= - \overset{(\mu-1)}{\Sigma} l_{n'} l_{n''} \ldots l_{n^{\lambda-1}} . \Pi_{n^{\lambda-1}} . P_{n^{\lambda-1}} - l_\mu \overset{(\mu-1)}{\Sigma} l_{n'} l_{n''} \ldots l_{n^{\lambda-2}} . \Pi_{n^{\lambda-2}} . [P_\mu - P_{n^{\lambda-2}}].$$

Die Übereinstimmung der mit (*a.* und *b.*) bezeichneten Werthe beweiset, dafs die Gleichung (III.) der Bedingung (II.) genügt. Indem man sich nun leicht überzeugt, dafs der nach dieser Regel gebildete Ausdruck von f_μ richtig ist für $\mu = 2, 3, \ldots$, und indem man mit Hülfe der Gleichung (I*.) allgemein von f_μ auf $f_{\mu+1}$ übergeht, erhält man schliefslich:

$$\text{(IV.)} \quad f_\mu = 1 - \overset{(\mu)}{\Sigma} l_{n'} . k + \overset{(\mu)}{\Sigma} l_{n'} l_{n''} . \Pi_{n''} . k^2 + \cdots$$

$$+ (-1)^\lambda \overset{(\mu)}{\Sigma} l_{n'} l_{n''} \ldots l_{n^\lambda} . \Pi_{n^\lambda} . k^\lambda \cdots + (-1)^\mu . l_1 l_2 l_3 \ldots l_\mu . \Pi_\mu . k^\mu,$$

indem für $\lambda > \mu$, nach (III.), $\alpha_\mu^\lambda = 0$ ist.

In dem von ***Lagrange*** untersuchten Falle ***gleicher*** Gewichte (p) in ***gleichen*** Abständen (l), wird nach obiger Formel:

$$f_\mu = 1 - \mu lk + \overset{(\mu)}{\Sigma}\left(1 - \frac{n'}{n''}\right) . l^2 k^2 - \overset{(\mu)}{\Sigma}\left(1 - \frac{n'}{n''}\right)\left(1 - \frac{n''}{n'''}\right) . l^3 k^3 + \cdots,$$

während die ***Méc. anal.***

$$f_\mu = 1 - \mu_1 lk + \mu_2 \frac{l^2 k^2}{2'} - \mu_3 \frac{l^3 k^3}{3'} + \cdots$$

angiebt, wo $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \ldots$ die Binomialzahlen μ, $\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}$, u. s. w. bedeuten. Es mufs demnach

$$\overset{(\mu)}{\Sigma}\left(1 - \frac{n'}{n''}\right)\left(1 - \frac{n''}{n'''}\right) \ldots \left(1 - \frac{n^{\lambda-1}}{n^\lambda}\right) = \frac{\mu_\lambda}{\lambda'}$$

sein; welche Summation bemerkenswerth zu sein scheint.

Man findet leicht

$$\overset{(\mu)}{\Sigma}\left(1 - \frac{n'}{n''}\right) = \sum_{n''=1}^{n''=\mu} \sum_{n'=1}^{n'=n''} \left(1 - \frac{n'}{n''}\right)$$

$$= \sum_1^\mu (n'' - \tfrac{1}{2}(n''+1)) = \sum_1^\mu \tfrac{1}{2}(n''-1) = \tfrac{1}{2}\{\tfrac{1}{2}(\mu(\mu+1)) - \mu\} = \tfrac{1}{2}\mu_2,$$

und könnte auf diese Weise zu rechnen fortfahren; ich ziehe indessen den folgenden Gang vor, welcher kürzer ist und zugleich den Nachweis einer zweiten, der vorigen ähnlichen Summationsformel enthält, nämlich der Formel:

$$\overset{(\mu)}{\Sigma}\left(1 - \frac{n'}{n''}\right)\left(1 - \frac{n''}{n'''}\right) \ldots \left(1 - \frac{n^{\lambda-1}}{n^\lambda}\right) n^\lambda = \frac{(\mu+1)_{\lambda+1}}{(\lambda-1)'}.$$

Zur Abkürzung werde die erste Summe durch Σ_λ^μ, die zweite durch $\overset{1}{\Sigma}{}_\lambda^\mu$ bezeichnet, so dafs

$$\Sigma_\lambda^\mu = \frac{\mu_\lambda}{\lambda'} \quad \text{und} \quad \overset{1}{\Sigma}{}_\lambda^\mu = \frac{(\mu+1)_{\lambda+1}}{(\lambda-1)'}$$

sein soll. Die Richtigkeit dieser Werthe ist klar für $\lambda = \mu$, da

$$\Sigma_\mu^\mu = (1-\tfrac{1}{2})(1-\tfrac{2}{3}) \ldots \left(1-\frac{\mu-1}{\mu}\right) = \frac{1}{\mu'} \quad \text{und} \quad \overset{1}{\Sigma}{}_\mu^\mu = \mu\Sigma_\mu^\mu = \frac{1}{(\mu-1)'}$$

ist. Für $\lambda = 1$ ist statt der Factoren unter dem Summenzeichen nur überall 1 zu setzen, daher ist

$$\Sigma_1^\mu = \mu \quad \text{und} \quad \overset{1}{\Sigma}{}_1^\mu = 1+2+3+\cdots+\mu = (\mu+1)_2;$$

ebenfalls dem obigen Werthe entsprechend. Allgemein aber ergeben sich durch Trennung der Glieder, in welchen $n^\lambda = \mu+1$ ist, von den übrigen, folgende recurrente Ausdrücke, nämlich:

$$\Sigma_\lambda^{(\mu+1)} - \Sigma_\lambda^\mu = \Sigma\left(1-\frac{n'}{n''}\right)\left(1-\frac{n''}{n'''}\right) \ldots \left(1-\frac{n^{\lambda-1}}{\mu+1}\right) = \Sigma_{(\lambda-1)}^\mu - \frac{1}{\mu+1}\overset{1}{\Sigma}{}_{(\lambda-1)}^\mu,$$

$$\overset{1}{\Sigma}{}_\lambda^{(\mu+1)} - \overset{1}{\Sigma}{}_\lambda^\mu = \Sigma\left(1-\frac{n'}{n''}\right) \ldots \left(1-\frac{n^{\lambda-1}}{\mu+1}\right)(\mu+1) = (\mu+1)\Sigma_{(\lambda-1)}^\mu - \overset{1}{\Sigma}{}_{(\lambda-1)}^\mu,$$

daher auch

$$\overset{1}{\Sigma}{}_\lambda^{(\mu+1)} - \overset{1}{\Sigma}{}_\lambda^\mu = (\mu+1)\{\Sigma_\lambda^{(\mu+1)} - \Sigma_{\lambda 1}^\mu\}.$$

Diesen Bedingungen genügen die oben angegebenen Werthe von Σ_λ^μ und $\overset{1}{\Sigma}{}_\lambda^\mu$. Denn es ist:

$$(\mu+1)_\lambda = \mu_\lambda \cdot \frac{\mu+1}{\mu+1-\lambda}, \quad (\mu+1)_\lambda - \mu_\lambda = \mu_{\lambda-1} = \mu_\lambda \cdot \frac{\lambda}{\mu+1-\lambda},$$

$$(\mu+2)_{\lambda+1} - (\mu+1)_{\lambda+1} = (\mu+1)_\lambda;$$

daher

$$\Sigma_\lambda^{(\mu+1)} - \Sigma_\lambda^\mu = \frac{(\mu+1)_\lambda - \mu_\lambda}{\lambda'} = \frac{1}{\mu+1-\lambda} \cdot \frac{\mu_\lambda}{(\lambda-1)'},$$

$$\overset{1}{\Sigma}{}_\lambda^{(\mu+1)} - \overset{1}{\Sigma}{}_\lambda^\mu = \frac{(\mu+2)_{\lambda+1} - (\mu+1)_{\lambda+1}}{(\lambda-1)'} = \frac{(\mu+1)_\lambda}{(\lambda-1)'} = \frac{\mu+1}{\mu+1-\lambda} \cdot \frac{\mu_\lambda}{(\lambda-1)'},$$

$$\Sigma_{(\lambda-1)}^\mu - \frac{1}{\mu+1}\overset{1}{\Sigma}{}_{(\lambda-1)}^\mu = \frac{\mu_{\lambda-1}}{(\lambda-1)'} - \frac{1}{\mu+1} \cdot \frac{(\mu+1)_\lambda}{(\lambda-2)'}$$

$$= \frac{\mu_\lambda}{(\lambda-1)'} \cdot \frac{\lambda}{\mu+1-\lambda} - \frac{\mu_\lambda}{(\lambda-2)'} \cdot \frac{1}{\mu+1-\lambda} = \frac{1}{\mu+1-\lambda} \cdot \frac{\mu_\lambda}{(\lambda-1)'};$$

woraus das Behauptete zu ersehen ist.

Es werde noch $\mu = \lambda+\delta$ gesetzt und zur Vereinfachung $\Sigma_\lambda^{(\lambda+\delta)}$ und $\overset{1}{\Sigma}{}_\lambda^{(\lambda+\delta)}$ gemeinschaftlich durch (λ, δ) bezeichnet; so wird nach vorstehenden Recursionsformeln $(\lambda, \delta+1)$ durch (λ, δ) und $(\lambda-1, \delta+1)$ ausgedrückt. Wird nun (λ, δ) für $\lambda = 1, 2, 3, \ldots l$, und für jedes beliebige δ, als bekannt vorausgesetzt, und zugleich bemerkt, dafs $(\lambda, 0)$ für jedes λ bekannt ist, wie oben

gezeigt, so findet man nach und nach durch Anwendung der vorstehenden Formeln:

$$(l+1, 1) \text{ aus } (l+1, 0) \text{ und } (l, 1),$$
$$(l+1, 2) \text{ aus } (l+1, 1) \text{ und } (l, 2), \text{ u. s. f.,}$$

und allgemein

$$(l+1, \delta) \text{ aus } (l+1, \delta-1) \text{ und } (l, \delta);$$

folglich wird $(l+1, \delta)$ für alle δ gefunden, wenn (l, δ) bekannt war. Aus dem für jedes δ bekannten Werthe von $(1, \delta)$ ergeben sich also nach und nach $(2, \delta)$, $(3, \delta)$, u. s. f., und ihre auf diese Weise erhaltenen Werthe sind die den obigen Formeln entsprechenden; W. z. b. w.

Aus dem in (IV.) gefundenen Werthe von f_μ folgt die zur Bestimmung von k nöthige Gleichung, indem für μ die Anzahl sämmtlicher Gewichte gesetzt wird, nämlich

$$\text{(V.)} \quad f_\nu = 0,$$

welche in Hinsicht auf k vom νten Grade ist. Dafs sie ν reelle, positive, ungleiche Wurzeln hat, folgt aus den Gleichungen (I.) auf bekannte Weise. Zuvörderst ist nämlich aus (I*.) zu sehen, dafs $f_{\mu-1}$ und $f_{\mu+1}$ für $f_\mu = 0$ entgegengesetzte Zeichen haben, da alle q *positive,* von Null verschiedene Gröfsen sind; auch würden, wenn mit f_μ zugleich $f_{\mu-1}$ und $f_{\mu+1}$ verschwänden, in Folge der Gleichungen (I.) auch $f_{\mu-2}$, $f_{\mu-3}$, u. s. f. bis f_2 und f_1 verschwinden und (wegen der zweiten Gleichung in I.) $q_1 = 0$ geben; was nicht angeht. Nimmt man nun an, dafs die Gleichung $f_\mu = 0$, μ reelle, positive, ungleiche Wurzeln hat, nämlich $r_1, r_2, \ldots r_\mu$ (nach der Gröfse steigend geordnet), und dafs $f_{\mu-1}$ für diese Werthe von k abwechselnde Zeichen erhält, nämlich $+$ für $k = r_1$, $-$ für $k = r_2$, u. s. f., so bekommt für dieselben Werthe von k, auch $f_{\mu+1}$ abwechselnde Zeichen, nämlich $-$ für $k = r_1$, $+$ für $k = r_2$, u. s. f. und da für $k = 0$, $f_{\mu+1} = 1$ ist, so wechselt $f_{\mu+1}$ sein Zeichen zwischen $k = 0$, und $k = r_1$, $k = r_1$, und $k = r_2$, u. s. f., endlich zwischen $k = r_\mu$ und $k = \infty$; denn für $k = r_\mu$ ist dieses Zeichen $(-1)^\mu$ und für $k = \infty$ ist es $(-1)^{\mu+1}$. Also hat die Gleichung $f_{\mu+1} = 0$ unter den obigen Voraussetzungen $\mu+1$ reelle, positive, ungleiche Wurzeln. Werden diese (nach der Gröfse steigend) durch $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_{\mu+1}$ bezeichnet, so liegt ϱ_1 zwischen 0 und r_1, ϱ_2 zwischen r_1 und r_2, $\ldots$ $\varrho_{\mu+1}$ zwischen r_μ und ∞; also erhält f_μ für ϱ_1 das Zeichen $+$, für ϱ_2 d. Z. $-$, u. s. f., abwechselnd; d. h. wenn die obigen Annahmen für $f_{\mu-1}$ und f_μ gelten, so gelten sie auch für f_μ und $f_{\mu+1}$. Für

f_1 und f_2 sind sie aber richtig, denn aus (I.) erhält man folgende Tafel der Vorzeichen:

	$k=0$	ϱ_1	r_1	ϱ_2	∞
f_1	+	(+)	0	(−)	−
f_2	+	(0)	−	(0)	+

wo die zu ϱ_1 und ϱ_2 gehörigen Zeichen eingeklammert sind, um anzudeuten, dafs ihre Nothwendigkeit aus den übrigen, durch die Gleichung (I.) gegebenen Zeichen gefolgert wird. Hiernach hat $f_2=0$ zwei reelle, positive, ungleiche Wurzeln, welche, in f_1 gesetzt, dieser Gröfse der Reihe nach die Zeichen + und − geben. Auch läfst sich diese Tafel leicht weiter fortsetzen; was aber nicht nöthig ist.

Durch Vertauschung von k mit k' gehe f_μ in f'_μ über. Multiplicirt man nun die ersten $\mu+1$ der Gleichungen (I.) der Reihe nach mit $1, f'_1, f'_2, \dots f'_\mu$ und addirt die Producte, so ergiebt sich:

$$k.\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\mu+1} p_{\lambda+1}f_\lambda f'_\lambda = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\mu} q_{\lambda+1}(f_\lambda - f_{\lambda+1})(f'_\lambda - f'_{\lambda+1}) + q_{\mu+1}(f_\mu - f_{\mu+1})f'_\mu.$$

Verwechselt man hier k mit k', also auch f mit f', so folgt:

$$k'.\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\mu+1} p_{\lambda+1}f_\lambda f'_\lambda = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\mu} q_{\lambda+1}(f_\lambda - f_{\lambda+1})(f'_\lambda - f'_{\lambda+1}) + q_{\mu+1}(f'_\mu - f'_{\mu+1})f_\mu;$$

daher:

$$\text{(VI.)} \qquad (k'-k)\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\mu+1} p_{\lambda+1}f_\lambda f'_\lambda = q_{\mu+1}(f_{\mu+1}f'_\mu - f_\mu f'_{\mu+1})$$

oder

$$(k'-k)[p_1 + p_2f_1f'_1 + p_3f_2f'_2 + \dots + p_{\mu+1}f_\mu f'_\mu] = q_{\mu+1}(f_{\mu+1}f'_\mu - f_\mu f'_{\mu+1}),$$

indem bei der Summation hier überall, wie gewöhnlich, die obere Grenze ausgeschlossen ist.

Aus (VI.) folgt Nachstehendes.

Sind k und k' zwei verschiedene Wurzeln von $f_{\mu+1}=0$, so ist $f_{\mu+1}=0$ und $f'_{\mu+1}=0$, also

$$\text{(VII.)} \qquad \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\mu+1} p_{\lambda+1}f_\lambda f'_\lambda = 0.$$

Sind die Gröfsen k und k' einander gleich, so erhält man für vorstehende Summe zunächst $\frac{0}{0}$. Der wahre Werth findet sich auf bekannte Weise, nämlich:

$$\text{(VIII.)}\quad \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\mu+1} p_{\lambda+1} f_\lambda f_\lambda = \left\{ f_{\mu+1} \cdot \frac{df_\mu}{dk} - f_\mu \cdot \frac{df_{\mu+1}}{dk} \right\} q_{\mu+1}.$$

Wird hier für k eine Wurzel von $f_{\mu+1} = 0$ gesetzt, so ist

$$\text{(IX.)}\quad \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\mu+1} p_{\lambda+1} f_\lambda f_\lambda = -f_\mu \cdot \frac{df_{\mu+1}}{dk} \cdot q_{\mu+1}.$$

Nun seien $k_1, k_2, k_3, \ldots k_\nu$ die Wurzeln k der Gleichung $f_\nu = 0$, nach der Gröfse steigend geordnet, k_λ irgend eine derselben: so ist für die Schwingungen des Gewichts p_1:

$$y_1 = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\nu+1} \{ C_\lambda . \cos t\sqrt{(gk_\lambda)} + D_\lambda . \sin t\sqrt{(gk_\lambda)} \},$$

wo C_λ und D_λ Constanten sind, deren Gesammtzahl 2ν beträgt. Wird ferner durch f_μ^λ der Werth bezeichnet, welchen f_μ durch Einsetzung von k_λ statt k erhält, so findet man für die Schwingungen von $p_{\mu+1}$:

$$\text{(X.)}\quad y_{\mu+1} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\mu+1} f_\mu^\lambda \{ C_\lambda . \cos t\sqrt{(gk_\lambda)} + D_\lambda . \sin t\sqrt{(gk_\lambda)} \}.$$

Zufolge (VII.) ist $\sum_{\mu=0}^{\mu=\nu} p_{\mu+1} f_\mu^\lambda f_\mu^\varepsilon = 0$, wenn die Zeiger λ und ε von einander verschieden sind. Bedeuten nun y_μ^0 und u_μ^0 die Werthe von y_μ und $\frac{dy_\mu}{dt}$ für $t = 0$, und setzt man noch zur Abkürzung

$$N_\lambda = \sum_{\mu=0}^{\mu=\nu} p_{\mu+1} f_\mu^\lambda f_\mu^\lambda,$$

so folgt aus (X.):

$$N_\lambda C_\lambda = \sum_{\mu=0}^{\mu=\nu} p_{\mu+1} f_\mu^\lambda y_{\mu+1}^0, \qquad N_\lambda D_\lambda \sqrt{(gk_\lambda)} = \sum_{\mu=0}^{\mu=\nu} p_{\mu+1} f_\mu^\lambda u_{\mu+1}^0.$$

Hierdurch sind die Constanten C und D dem Anfangszustande gemäfs bestimmt, und damit ist die Aufgabe für einen mit getrennten Gewichten belasteten Faden gelöset. Der Nenner N_λ läfst sich nach (IX.) auch also ausdrücken:

$$N_\lambda = -f_{\nu-1}^\lambda \cdot \frac{df_\nu^\lambda}{dk_\lambda} \cdot q_\nu.$$

Wird vorstehender Werth von C_λ in das System linearer Gleichung gesetzt, welchem dadurch Genüge gethan wird, nämlich in die für $\mu = 0, 1, 2, \ldots \nu - 1$ gültige Gleichung

$$y_{\mu+1}^0 = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\nu+1} C_\lambda f_\mu^\lambda = C_1 f_\mu' + C_2 f_\mu'' + \cdots + C_\nu f_\mu^\nu,$$

so ergeben sich daraus die Werthe gewisser symmetrischer Functionen der Wurzeln $k_1, k_2, \ldots k_\nu$ der Gleichung $f_\nu = 0$, welche ich noch bemerklich machen will. Es ist nämlich für $\mu = 0, 1, 2, \ldots \nu - 1$:

$$p_{\mu+1}\left\{\frac{f'_\mu f'_\mu}{N_1} + \frac{f''_\mu f''_\mu}{N_2} + \cdots + \frac{f^\nu_\mu f^\nu_\mu}{N_\nu}\right\} = 1,$$

und wenn r eine von μ verschiedene Zahl aus derselben Reihe ist:

$$\frac{f'_r f'_\mu}{N_1} + \frac{f''_r f''_\mu}{N_2} + \cdots + \frac{f^\nu_r f^\nu_\mu}{N_\nu} = 0.$$

Auch die Lösung der Aufgabe für eine *stetig* vertheilte Belastung ist in vorstehenden Formeln enthalten, wenn man die Anzahl der Gewichte immer gröfser, ihre Abstände immer kleiner werden läfst. Werden alle Abstände gleich grofs angenommen und mit l bezeichnet, und erinnert man sich, dafs $p_\mu = P_\mu - P_{\mu-1}$ war, so nimmt die im Eingange dieses Aufsatzes angegebene Differentialgleichung für die Bewegung des Gewichts p_μ folgende Gestalt an:

$$\frac{1}{g}\cdot\frac{d^2y_\mu}{dt^2} = \frac{P_\mu(y_{\mu+1}-y_\mu) - P_{\mu-1}(y_\mu - y_{\mu-1})}{(P_\mu - P_{\mu-1})\,l},$$

oder

$$\frac{1}{g}\cdot\frac{d^2y_\mu}{dt^2} = \frac{P_\mu(y_{\mu+1}-2y_\mu+y_{\mu-1}) + (P_\mu - P_{\mu-1})(y_\mu - y_{\mu-1})}{(P_\mu - P_{\mu-1})\,l}.$$

Setzt man nun $l = \Delta x$, $y_\mu = y = \varphi(x)$, $P_\mu = P = \psi(x)$, so wird $y_{\mu+1} = \varphi(x+\Delta x)$, $y_{\mu-1} = \varphi(x-\Delta x)$, $P_{\mu-1} = \psi(x-\Delta x)$, und man erhält für ein verschwindendes Δx, wie leicht zu sehen:

$$\text{(XII.)}\qquad \frac{1}{g}\cdot\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d\left(P\frac{dy}{dx}\right)}{dP} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{g}\cdot\frac{dP}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d\left(P\frac{dy}{dx}\right)}{dx},$$

als Differentialgleichung für eine *stetig* vertheilte Belastung. Das Integral derselben wird aus particularen Integralen von der Form

$$y = f(C.\cos t\sqrt{(gk)} + D\sin t\sqrt{(gk)}$$

gebildet; k, C, D sind Constanten. f ist ein von x abhängiger Factor, der folgender Bedingung genügen mufs, nämlich:

$$\text{(XIII.)}\qquad kf dP + d\left(P\frac{df}{dx}\right) = 0.$$

Es sei

$$f = 1 - X_1 k + X_2 k^2 - X_3 k^3 + \cdots + (-1)^n X_n k^n + \cdots$$

so entspricht diese Reihe genau der oben für f_μ aufgestellten Reihe

$$1 - \alpha'_\mu k + \alpha''_\mu k^2 - \dots$$

Es war $\alpha'_\mu = l_1 + l_2 + \dots + l_\mu$; daher folgt $X_1 = x$. Ferner war

$$\alpha''_\mu = \Sigma l_{n'} \Sigma l_{n''} . \Pi_{n''},$$

wo die erste Summation von $n' = 1$ bis $n' = n''$ und die zweite von $n'' = 1$ bis $n'' = \mu$ geht. Für eine ***stetig*** vertheilte Belastung verwandelt sich dieser Ausdruck in

$$X_2 = \int_0^x dl_2 \int_0^{l_2} dl_1 . \Pi_2,$$

wo $\Pi_2 = 1 - \frac{P_1}{P_2}$ ist und P_1 das Gewicht des Fadens vom unteren Ende bis zur Höhe l_1, oder von $x = 0$ bis $x = l_1$, eben so P_2 das Gewicht von $x = 0$ bis $x = l_2$ bedeutet.

Wird überhaupt

$$\Pi_n = \left(1 - \frac{P_1}{P_2}\right)\left(1 - \frac{P_2}{P_3}\right) \dots \left(1 - \frac{P_{n-1}}{P_n}\right)$$

gesetzt, so ist, dem Werthe von α^λ_μ in (III.) entsprechend, allgemein:

$$\text{(XIV.)} \qquad X_n = \int_0^x dl_n \int_0^{l_n} dl_{n-1} \int_0^{l_{n-1}} dl_{n-2} \dots \int_0^{l_2} dl_1 . \Pi_n .$$

Durch Einsetzung der Reihe für f in die Differentialgleichung (XIII.) würde man unmittelbar

$$X_{n-1} dP = d\left(P \frac{dX_n}{dx}\right) \quad \text{oder} \quad X_n = \int_0^x \frac{dx}{P} \int_0^x X_{n-1} dP$$

erhalten haben. Die Übereinstimmung dieses Werths mit dem vorigen läfst sich leicht nachweisen. Nach (XIV.) ist

$$dX_n = dx \int_0^x dl_{n-1} \int_0^{l_{n-1}} dl_{n-2} \dots \int_0^{l_2} dl_1 . \Pi_{n-1}\left(1 - \frac{P_{n-1}}{P}\right),$$

daher

$$P \frac{dX_n}{dx} = \int_0^x dl_{n-1} \dots \int_0^{l_2} dl_1 . \Pi_{n-1}(P - P_{n-1}).$$

Erwägt man nun, dafs für $l_{n-1} = x$, $P - P_{n-1} = 0$ wird, so folgt daraus:

$d\left(P \frac{dX_n}{dx}\right) = dP . \int_0^x dl_{n-1} \int_0^{l_{n-1}} dl_{n-2} \dots \int_0^{l_2} dl . \Pi_{n-1} = X_{n-1} dP$. W. z. b. w.

Da Π_n stets ein ***positiver echter*** Bruch ist, so ist aus der Formel (XIV.)

sogleich zu sehen, dafs X_n mit wachsendem n sich mehr und mehr der Null nähert; und zwar so schnell, dafs die Reihe $f = 1 - X_1 k + X_2 k^2 \ldots$ für jeden Werth von k, in Folge der Abnahme ihrer Glieder, convergirt. Denn selbst wenn man 1 statt Π_n setzt und alle Glieder positiv nimmt, erhält man die Reihe $1 + \frac{xk}{1} + \frac{x^2k^2}{1.2} + \frac{x^3k^3}{1.2.3} + \cdots$

Da ferner die Reihe f_μ, durch Vermehrung der Anzahl der Gewichte und Verminderung ihrer Abstände, der Reihe f so nahe gebracht werden kann als man will, und da die Reihe f stets convergirt, so folgt, dafs die Gleichung $f = 0$, nach k aufgelöset, unendlich viele reelle, positive, ungleiche Wurzeln hat; und *nur* solche. Dabei kann x in f jeden Werth haben: von $x = 0$ bis zur ganzen Länge des Fadens $x = L$; andere Werthe von x hingegen kommen nicht in Betracht.

Durch Einsetzung von k' für k gehe f in f' über; dann hat man:

$$kf dP + d\left(P\frac{df}{dx}\right) = 0 \quad \text{und} \quad k'f' dP + d\left(P\frac{df'}{dx}\right) = 0,$$

und daher

$$\begin{aligned}(k'-k)ff'dP &= f'd\left(P\frac{df}{dx}\right) - fd\left(P\frac{df'}{dx}\right)\\ &= \left(f'\frac{df}{dx} - f\frac{df'}{dx}\right)dP + \left(f'd\frac{df}{dx} - fd\frac{df'}{dx}\right)P\end{aligned}$$

oder

$$(k'-k)ff'dP = d\left\{P\left(f'\frac{df}{dx} - f\frac{df'}{dx}\right)\right\}$$

und, da P für $x = 0$ verschwindet:

$$\text{(XV.)} \qquad (k'-k)\int_0^x ff'dP = \left(f'\frac{df}{dx} - f\frac{df'}{dx}\right)P.$$

Hieraus folgt für $k' = k$:

$$\text{(XVI.)} \qquad \int_0^x ff dP = \left\{\frac{df}{dk}\cdot\frac{df}{dx} - f\frac{d^2f}{dx\,dk}\right\}P.$$

In diesen Formeln, welche den unter (VI. und VIII.) für getrennte Gewichte aufgestellten entsprechen, ist k, so wie k', ganz willkürlich, und namentlich von der obern Grenze x des Integrals links unabhängig. Sind aber k und k' zwei verschiedene Wurzeln der Gleichung $f = 0$, so ist mit f auch $f' = 0$ und nach (XV.):

$$\text{(XVII.)} \qquad \int_0^x ff'dP = 0.$$

Ist hingegen $k' = k$ und $f = 0$, so wird nach (XVI.):

$$\text{(XVIII.)} \qquad \int_0^x ff\,dP = \frac{df}{dk}\cdot\frac{df}{dx}\cdot P.$$

Der Deutlichkeit wegen kann in der Folge f, als Function von x und k, auch durch $f(x, k)$ bezeichnet werden.

Es seien k_1, k_2, k_3, ... k_λ, ... die nach der Gröfse steigend geordneten Wurzeln der Gleichung $f(L, k) = 0$, welche sämmtlich reell, positiv und von einander verschieden sind; dann folgt schliefslich:

$$\text{(XIX.)} \qquad y = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} f(x, k_\lambda)\{C_\lambda . \cos t\sqrt{(gk_\lambda)} + D_\lambda . \sin t\sqrt{(gk_\lambda)}\},$$

und wenn $y = y^0$ und $\frac{dy}{dt} = u^0$ für $t = 0$ ist, nach (XVII.):

$$\text{(XX.)} \qquad N_\lambda C_\lambda = \int_0^L y^0 f(x, k_\lambda)\,dP, \qquad N_\lambda D_\lambda \sqrt{(gk_\lambda)} = \int_0^L u^0 f(x, k_\lambda)\,dP, \text{ wo}$$

$$N_\lambda = \int_0^L \{f(x, k_\lambda)\}^2\,dP = \frac{df}{dk}\cdot\frac{df}{dx}\cdot P \text{ für } x = L \text{ und } k = k_\lambda.$$

Nach den vorstehenden Formeln zerfällt die Bewegung des Fadens in eine unendliche Anzahl einfacher Schwingungen, deren jede als für sich allein bestehend angesehen werden kann. Betrachtet man die zu k_λ gehörige, oder kürzer, die λte Schwingung für sich allein, so wird die ihr entsprechende Gestalt des Fadens durch die Gleichung

$$y = f(x, k_\lambda)\{C_\lambda . \cos t\sqrt{(gk_\lambda)} + D_\lambda . \sin t\sqrt{(gk_\lambda)}\}$$

gegeben. Sie ist also die einer geraden Linie für alle t, welche der Gleichung $\operatorname{tang}(t\sqrt{(gk_\lambda)}) = -\frac{C_\lambda}{D_\lambda}$ genügen, indem bei der einfachen Schwingung alle Puncte des Fadens gleichzeitig durch die Lage des Gleichgewichts gehen.

Ferner giebt es gewisse Puncte, für welche das vorstehende g immer gleich Null ist, und zwar beträgt die Anzahl solcher ***Schwingungsknoten*** für die λ^{te} Schwingung $\lambda - 1$; d. h. die transcendente Gleichung $f(x, k_\lambda) = 0$ hat $\lambda - 1$ reelle, ungleiche Wurzeln x zwischen 0 und L, ungerechnet die Wurzel $x = L$.

Um Dies zu beweisen, sei

$$k = \frac{1}{z} \quad \text{und} \quad f(x, k) = f\left(x, \frac{1}{z}\right) = f.$$

In der Reihe $f = 1 - X_1 k + X_2 k^2 - \cdots$ ist $X_1 = x$, und man setze

$$X_2 = \gamma_2 . \tfrac{1}{2} x^2, \quad \ldots \quad X_n = \gamma_n \cdot \frac{x^n}{n'}, \quad \ldots$$

dann sind die Gröfsen $\gamma_2, \gamma_3, \ldots \gamma_n$ zwar mit x veränderlich, ihre Zahlenwerthe aber stets *positive echte* Brüche. Hieraus folgt, dafs in der Gleichung

$$f=0 \quad \text{oder} \quad 1-\frac{x}{z}+\tfrac{1}{2}\gamma_2\left(\frac{x}{z}\right)^2-\frac{\gamma_3}{3'}\left(\frac{x}{z}\right)^3+\cdots=0$$

ein sehr kleiner Werth von x einen sehr kleinen Werth von z bedingt, oder dafs die sämmtlichen Wurzeln z dieser Gleichung mit x zugleich verschwinden. Nach dem Vorigen hat die Gleichung $f=0$ für jedes x zwischen 0 und L unendlich viele reelle, positive, ungleiche Wurzeln z; für $x=L$ insbesondere hat sie die Wurzeln

$$\frac{1}{k_1}=h_1, \quad \frac{1}{k_2}=h_2, \ldots,$$

wo $h_1>h_2>h_3\ldots$ und mit steigendem λ, $\frac{1}{k\lambda}=h_\lambda$ gegen Null convergirt. Betrachtet man daher x und z als senkrechte Coordinaten, so hat die durch $f=0$ gegebene Curve unendlich viele Zweige, welche alle vom Anfangspuncte der Coordinaten A (Fig. 2.) ausgehen, und ein im Abstande $x=AB=L$ errichtetes Loth in den Puncten $H_1, H_2, H_3, \ldots$ schneiden; wo $BH_1=h_1$, $BU_2=h_2, \ldots$ ist. Es sei α die Neigung der Tangente eines solchen Zweiges gegen die Axe der x, so ist $\frac{df}{dx}+\frac{df}{dz}\cdot\operatorname{tang}\alpha=0$, und zugleich $f=0$. Oben (XVIII.) war

$$\int_0^x f^2\,dP=\frac{df}{dk}\cdot\frac{df}{dx}\cdot P,$$

und da für k jetzt $\frac{1}{z}$ gesetzt werden mufs:

$$\int_0^x f^2\,dP=-z^2\cdot\frac{df}{dz}\cdot\frac{df}{dx}\cdot P;$$

wo zugleich der Werth von z aus dem Grenzwerthe x durch die Gleichung $f=0$ bestimmt wird. Daher folgt:

$$\int_0^x f^2\,dP=z^2\left(\frac{df}{dz}\right)^2\operatorname{tg}\alpha\,.\,P;$$

woraus hervorgeht, dafs $\operatorname{tg}\alpha$ stets *positiv* ist, d. h. dafs für alle Zweige der Curve die Ordinate z mit wachsender Abscisse x beständig zunimmt. Auch können zwei dieser Zweige nie einander schneiden, indem sonst die Gleichung $f=0$ für irgend ein x zwei gleiche Wurzeln z haben müfste; was niemals der Fall ist Eine der Abscisse parallele Gerade DE mufs daher alle die Zweige AH_1, AH_2, ... der Curve schneiden; und zwar jeden einmal, deren

Endpuncte H_1, H_2, ... in (Fig. 2.) über E liegen, während sie die übrigen Zweige nirgends trifft. Hieraus folgt Nachstehendes. Liegt k zwischen $k_{\lambda-1}$ und k_λ, so giebt es $\lambda-1$ Werthe von x, zwischen 0 und L, welche der Gleichung $f(x,k)=0$ genügen. Ist $k=k_\lambda$, so tritt noch die Wurzel $x=L$ hinzu. Also hat der Faden, vermöge der allein angenommenen λ^{ten} Schwingung, *Schwingungsknoten.*

Zwischen je zwei benachbarten Knoten liegt immer ein, und *nur* ein gröfster oder kleinster Werth von f oder $f(x,k_\lambda)$. Dies ist aus der Gleichung

$$d\left(P\frac{df}{dx}\right)+k_\lambda f dP = 0$$

am leichtesten ersichtlich, wenn man sie wie folgt schreibt:

$$P\frac{df}{dx}+k_\lambda\int_0^x f dP = 0.$$

Diese Form zeigt, wie f, von 1 (für $x=0$) abnehmend, durch Null bis zu einem gewissen kleinsten (negativen) Werthe fortgeht, wo $\frac{df}{dx}=0$ wird, wie von da f, wiederum wechselnd, nochmals durch Null zu einem gröfsten (positiven) Werthe steigt, u. s. f. abwechselnd.

Es seien k_λ, k_μ zwei verschiedene Wurzeln der Gleichung $f(L,k)=0$, und der Kürze wegen sei

$$f(x,k_\lambda)=f_\lambda, \quad f(x,k_\mu)=f_\mu.$$

Wird nun die Gleichung

$$k_\lambda f_\lambda dP+d\left(P\frac{df_\lambda}{dx}\right)$$

mit f_μ multiplicirt und integrirt, so erhält man

$$k_\lambda\int_0^L f_\lambda f_\mu dP+\int_0^L f_\mu d\left(P\frac{df_\lambda}{dx}\right)=0.$$

Das erste Integral ist Null; das zweite führt durch theilweise Integration auf die Form

$$\int_0 f_\mu d\left(P\frac{df_\lambda}{dx}\right)=f_\mu . P\frac{df_\lambda}{dx}-\int_0\frac{df_\lambda}{dx}\cdot\frac{df_\mu}{dx}\cdot P dx;$$

wo der vom Integralzeichen freie Theil an den Grenzen verschwindet, da für $x=0$, $P=0$ und für $x=L$, $f_\mu=0$ ist; mithin folgt:

$$\text{(XXI.)} \quad \int_0^L\frac{df_\lambda}{dx}\cdot\frac{df_\mu}{dx}\cdot P dx = 0.$$

Ist hingegen $k_\mu = k_\lambda$, so ist das obige erste Integral $= N_\lambda$, und man erhält:

$$\text{(XXII.)} \qquad \int_0^L \left(\frac{df_\lambda}{dx}\right)^2 P dx = k_\lambda N_\lambda.$$

Mit Hülfe der vorstehenden Formeln läfst sich ein Beweis für die Convergenz der Reihe (XIX.) geben; wobei es genügt, diese Reihe auf ihren Werth für $t = 0$ zu beschränken.

Es sei y eine gegebene Function von x, welche jedoch überall (nämlich zwischen $x = 0$ und $x = L$) nur endliche bestimmte Werthe hat und für $x = L$ verschwindet. Die Curve, deren Ordinate y ist, kann aus mehreren Bogen beliebig gebildet sein, welche verschiedenen analytischen Gesetzen folgen; ich setze jedoch voraus, dafs $\frac{dy}{dx}$ überhaupt bestimmte Werthe habe, und namentlich, nirgends unendlich grofs werde. Nun sei, wie oben,

$$N_\lambda = \int_0^L f_\lambda f_\lambda dP, \qquad N_\lambda C_\lambda = \int_0^L y f_\lambda dP \quad \text{und}$$

$$\text{(XXIII.)} \qquad y = C_1 f_1 + C_2 f_2 + \cdots + C_\lambda f_\lambda + u.$$

Wird diese Gleichung mit f_μ multiplicirt und integrirt, so erhält man

$$\text{(XXIV.)} \qquad \int_0^L u f_\mu dP = 0,$$

welche Gleichung für $\mu = 1, 2, 3, \ldots \lambda$ gültig ist.

Nach (XXIII.) ist

$$\frac{dy}{dx} = C_1 \frac{df_1}{dx} + \cdots + C_\lambda \frac{df_\lambda}{dx} + \frac{du}{dx},$$

daher, wenn diese Gleichung quadrirt, mit Pdx multiplicirt und von 0 bis L integrirt wird:

$$\int_0^L \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 P dx = \int_0^L \left(\frac{du}{dx}\right)^2 P dx + 2\int_0^L \frac{du}{dx}\left(C_1 \frac{df_1}{dx} + \cdots + C_\lambda \frac{df_\lambda}{dx}\right) P dx$$
$$+ \int_0^L \left\{C_1 \frac{df_1}{dx} + \cdots + C_\lambda \frac{df_\lambda}{dx}\right\}^2 P dx.$$

Das zweite Integral rechts ist aber $= 0$. Denn es ist, wenn f irgend eine der Gröfsen $f_1, f_2, \ldots f_\lambda$ vorstellt:

$$\int_0^L \frac{du}{dx} \cdot \frac{df}{dx} P dx = \int_0^L P \frac{df}{dx} du = \left[u . P \frac{df}{dx}\right]_0^L - \int_0^L u d\left(P \frac{df}{dx}\right),$$

wo für den eingeklammerten Ausdruck der Unterschied seiner Grenzwerthe zu setzen ist. Es ist aber für $x = 0$, $P = 0$ und für $x = L$, $u = 0$;

ferner ist

$$-d\left(P\frac{df}{dx}\right) = kfdP;$$

folglich:

$$\int_0^L \frac{du}{dx}\cdot\frac{df}{dx}Pdx = k\int_0^L ufdP = 0, \quad \text{nach} \quad (XXIV.).$$

In dem dritten Integrale rechterhand verschwinden nach (XXI.) alle Glieder, welche in $C_\mu C_{\mu'}$ multiplicirt sind, wenn μ' von μ verschieden ist; es bleiben also nur die quadratischen Glieder übrig, und nach der Gleichung (XXII.) erhält dieses Integral den Werth

$$C_1^2 N_1 k_1 + C_2^2 N_2 k_2 + \cdots + C_\lambda^2 N_\lambda k_\lambda.$$

Folglich ist

$$\int_0^L \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 Pdx = \int_0^L \left(\frac{du}{dx}\right)^2 Pdx + C_1^2 N_1 k_1 + C_2^2 N_2 k_2 + \cdots + C_\lambda^2 N_\lambda k_\lambda.$$

Da diese Gleichung überall nur positive Glieder enthält, und da der Werth links eine endliche Gröfse ist (sie heifse zur Abkürzung A): so folgt, dafs auch eine beliebige Anzahl von Gliedern rechts, zusammen einer endlichen Gröfse gleichkommen. Also ist, wenn man in vorstehender Gleichung $\lambda+\mu$ statt λ schreibt:

$$C_\lambda^2 N_\lambda k_\lambda + C_{\lambda+1}^2 N_{\lambda+1} k_{\lambda+1} + \cdots + C_{\lambda+\mu}^2 N_{\lambda+\mu} k_{\lambda+\mu} = a;$$

wo $a < A$ ist. Dies gilt, wie grofs auch die Zeiger λ und $\lambda+\mu$ genommen werden mögen. Nun ist $k_\lambda < k_{\lambda+1} \cdots < k_{\lambda+\mu}$; folglich:

$$k_\lambda\{C_\lambda^2 N_\lambda + C_{\lambda+1}^2 N_{\lambda+1} + \cdots + C_{\lambda+\mu}^n N_{\lambda+\mu}\} < a,$$

und mithin:

$$M = C_\lambda^2 N_\lambda + \cdots + C_{\lambda+\mu}^2 N_{\lambda+\mu} < \frac{a}{k_\lambda};$$

folglich ist für ein grofses λ, dem ein sehr grofses k_λ entsprechen wird, der Werth von M unendlich klein. Bezeichnet man zur Abkürzung eine unendlich kleine Gröfse allgemein mit w, so ist für ein grofses λ:

$$M = w.$$

Nun sei $C_1 f_1 + C_2 f_2 + \cdots + C_\lambda f_\lambda = S_\lambda$ und $S_{\lambda+\mu} - S_{\lambda-1} = \Delta$, also

$$\Delta = C_\lambda f_\lambda + C_{\lambda+1} f_{\lambda+1} + \cdots + C_{\lambda+\mu} f_{\lambda+\mu},$$

so findet sich, da $\int_0^L f_\lambda f_\mu dP = 0$ und $\int_0^L f_\lambda f_\lambda dP = N_\lambda$ ist:

$$\int_0^L \Delta^2 dP = M,$$

und mithin für ein grofses λ:

$$\int_0^L \Delta^2 dP = w.$$

Die Gröfse $\frac{dP}{dx}$ ist zwischen 0 und L überall *positiv*, oder auf einer unbelasteten Strecke des Fadens, Null. Es sei $\frac{dP}{dx}$ zwischen α und β stets positiv, so ist

$$\int_0^\beta \Delta^2 dP = w.$$

Hieraus folgt, dafs zwischen α und β stets $\Delta = w$ ist. Denn gesetzt, Δ hätte für irgend einen zwischen diesen Grenzen befindlichen Werth γ von x einen endlichen (nicht unendlich kleinen) Werth, so müfste Δ, da es eine stetige Function von x ist, auch in der Nähe von γ ebenfalls noch endliche Werthe haben; alsdann aber wäre das Integral $\int_0^\beta \Delta^2 dP$ eine endliche Gröfse; was dem Vorstehenden widerstreitet. Also ist auf jedem belasteten Theile des Fadens $\Delta = w$.

Ein unbelasteter Theil des Fadens ist stets eine gerade Linie, welche die Endpuncte der benachbarten belasteten Theile mit einander, oder einen solchen mit dem festen Endpuncte verbindet. Daher ist auch hier $\Delta = w$. Folglich ist für ein grofses λ überall $S_{\lambda+\mu} = S_{\lambda-1} + \Delta = S_{\lambda-1} + w$; d. h. die Summe S_λ nähert sich, mit wachsendem λ, mehr und mehr einem endlichen bestimmten Werthe; oder die Reihe $C_1 f_1 + C_2 f_2 + \cdots$ *convergirt.*

Hiermit ist noch nicht erwiesen, dafs ihre Summe keine andere ist als die gegebene, den Anfangszustand des Fadens betreffende Function y. Um diese Lücke auszufüllen, kann man sich des Überganges von einer endlichen, aber stets wachsend angenommenen Anzahl (ν) getrennter Gewichte zu einer *stetig* vertheilten Belastung bedienen; wobei ich mich auf folgende Andeutung beschränke. Nämlich, indem ν immer gröfser wird, nähert sich der Werth von $\frac{d^2 y_\mu}{dt^2}$ mehr und mehr dem einer *stetigen* Vertheilung entsprechenden Werthe von $\frac{d^2 y}{dt^2}$; wie es oben bei Herleitung der Formel (XII.) gezeigt wurde; es haben daher, bei gehörig festgesetzter Übereinstimmung der Anfangszustände, entsprechende Puncte in beiden Fällen einerlei (d. h. eine unendlich wenig verschiedene) Bewegung. Folglich kann durch die endliche Reihe X auch die Bewegung eines stetig belasteten Fadens so genau ausge-

drückt werden, als man will, wenn nur die Anzahl getrennter Gewichte grofs und ihre Abstände klein genug angenommen werden. Da ferner auch die endliche Reihe (X.) und die congruente unendliche Reihe (XIX.) bei wachsendem ν einander beliebig nahe gebracht werden können, so folgt, dafs die Reihe (XIX.) den richtigen Werth darstellt.

Für bestimmte Werthe von P wird die entwickelte Darstellung der Function $f(x,k)$ wegen der wiederholten Integrationen sehr bald unausführbar. Ein Beispiel, in welchem die Rechnung sich vollständig durchführen läfst, ist folgendes. Es sei $P=x^n$ (n positiv) von $x=0$ bis $x=L^0$. Von $x=L^0$ bis $x=L$ sei der Faden leer, also $P=(L^0)^n$. In diesem Falle erhält man die, auch anderweit bekannte Reihe

$$f(x,k) = 1-xk+\frac{n}{n+1}\cdot\frac{x^2k^2}{2'}-\frac{n.n}{n+1.n+1}\cdot\frac{x^3k^3}{3'}+\cdots,$$

welche von $x=0$ bis $x=L^0$ gilt; für die Strecke von L^0 bis L wird

$$f(x,k)=f(L^0,k)+\frac{df(L^0,k)}{dL^0}(x-L^0);$$

wo der Werth von $f(L^0,k)$ rechts aus der vorhergehenden Gleichung zu entnehmen ist. Also ist zwischen L^0 und L:

$$f(x,k) = 1-xk+\frac{nL^0}{n+1}(x-\tfrac{1}{2}L^0)k^2-\frac{(nL^0)^2}{n+1.n+2}(x-\tfrac{2}{3}L^0)\frac{k^3}{2'}$$
$$+\frac{(nL^0)^3}{(n+1)(n+2)(n+3)}(x-\tfrac{3}{4}L^0)\frac{k^4}{3'}-\cdots$$

Ein zweites Beispiel gewährt ein aus zwei gleichartigen Stücken bestehender Faden, wo $P=x$ ist, von 0 bis L^0, und $P=L^0+a(x-L^0)$, von L^0 bis L. Hier wird zuerst von 0 bis L, da in der obigen Formel nur $u=1$ zu setzen ist:

$$f(x,k) = 1-xk+\frac{x^2k^2}{2^2}-\frac{x^3k^3}{2^2.3^2}+\frac{x^4k^4}{2^2.3^2.4^2}-\cdots;$$

für den zweiten Theil aber ergiebt sich eine ganz andere Form. Es sei für diesen Theil, also zwischen L^0 und L,

$$f(x,k) = 1-xk+G_2.L^{0^2}.k^2-G_3.L^{0^3}.k^3+\cdots;$$

so ist allgemein:

$$G_{n+1}.L^{0^{n+1}} = \int_0^L\frac{dx}{x}\int_0^x\frac{x^n\,dx}{(n')^2}+\int_{L^0}^x\frac{dx}{L^0+a(x-L^0)}\cdot\int_0^{L^0}\frac{x^n\,dx}{(n')^2}$$
$$+a.L^{0^n}\int_{L^0}^x\frac{dx}{L^0+a(x-L^0)}\int_{L^0}^x G_n\,dx.$$

Zur Abkürzung sei

$$1+\frac{a(x-L^0)}{L^0}=\xi$$

und

$$G_n=\frac{\xi^n}{(n')^2.a^n}+\left(1-\frac{1}{a}\right)R_n,$$

so wird

$$R_{n+1}=\frac{1-\frac{1}{a^{n+1}}}{1-\frac{1}{a}}\cdot\frac{1}{\{(n+1)'\}^2}+\frac{\log\xi}{(n')^2.n+1.a}+\frac{1}{a}\int_1^{\xi}\frac{d\xi}{\xi}\int_1^{\xi}R_n\,d\xi.$$

Hiernach findet man, da G_n allgemein von der Form $Q+Q'\log ndt\,\xi$ ist, wenn Q und Q' ganze Polynome in ξ sind, insbesondere:

$$G_2=\frac{\xi^2-1}{4.a^2}+\frac{1}{4}+\left(1-\frac{1}{a}\right)\frac{1}{a}\{\xi-1-\tfrac{1}{2}\log\xi\},$$

$$G_3=\frac{\xi^3-1}{36.a^3}+\frac{1}{36}+\left(1-\frac{1}{a}\right)\frac{1}{2a}\left\{\left(\tfrac{1}{2}+\frac{1}{a}+\frac{1}{2a}\xi\right)(\xi-1)-\left(\tfrac{1}{3}+\frac{1}{3a}+\frac{1}{a}\xi\right)\log\xi\right\}.$$

Dorpat, den 31. Juli 1854.

17.

Nouvelle règle pour reconnaître en plusieurs cas l'absence de racines réelles d'une équation algébrique dans un intervalle donné.

(Par *Juste Bellavitis*, professeur de géométrie déscriptive à l'université de Padoue.)

Pour trouver toutes les racines et toutes les valeurs critiques d'une équation algébrique, le procedé ***Budan-Ruffini-Horner*** ne laisse rien à désirer; mais la détermination des valeurs critiques n'a aucune importance; donc si l'on voit disparoître quelque paire de variations de signe, il est utile de savoir si dans cette intervalle il se trouve le même nombre de valeurs critiques, parcequ'alors on épargne la recherche des racines qui n'existent pas. La règle ***complète*** est dûe à M. ***Sturm;*** mais son application exige beaucoup de travail. Des règles donc, qui ***en de nombreux cas*** montrent avec certitude l'absence de racines dans un intervalle donné, seront utiles, si même parfois elles laissent en doute cette absence. Cette à dire un criterium de l'absence des racines ***suffisant***, quoique ***non nécessaire*** est utile.

La règle proposée dans mon mémoire: „***Sul più facile modo di trovare le radici reali delle equazioni algebriche, e sopra un nuovo metodo per la determinazione delle radici imaginarie,***" me paraît plus commode, et presque toujours plus applicable que celles de ***Budan, Fourier, Lobatto*** etc.

Pour trouver si une équation quelconque, par exemple

$$Ax^6+Bx^5+\cdots+Fx+G=0,$$

puisse avoir des racines entre $x=0$ et $x=a$ (a étant une quantité positive), on calculera les nombres $0, F_5, E_4, D_3, C_2, B_1, A_0, Z$

$$\begin{array}{c|cccccccc} & A & B & C & D & E & F & G \\ \hline a & Z & A_0 & B_1 & C_2 & D_2 & E_4 & F_5 & 0 \end{array}$$

de manière que relativement au chiffre a, les relations mêmes du procédé de ***Budan***, aient lieu, c'est à dire que $aF_5+G=0$, $aE_4+F=F_5$, $aD_3+E=E_4$, ... $aB_1+C=C_2$, $aA_0+B=B_1$, $aZ+A=A_0$. Mais on devra avoir attention que si l'une des différences, par exemple D_3-D a le signe opposé à celui du terme F_5, et est plus grande (faite abstraction

des signes) que D_3, on doit mettre au lieu de $D_3 - D$ la quantité $-\frac{D^2}{4D_3}$, et calculer C_2 moyennant la relation $aC_2 = -\frac{D^2}{4D_3}$, au lieu de $aC_2 = D_3 - D$. Si deux nombres successifs entre E_4, D_3, ... A_0, Z ont des signes opposés à celui de F_5, il faut arrêter l'opération, parceque, ou l'équation a des racines dans l'intervalle entre 0 et a, ou la règle est insuffisante pour indiquer leur absence. Si ce cas n'a pas lieu, et si Z a le même signe que F_5, on en conclura avec toute certitude que l'équation n'a pas de racines dans l'intervalle 0 .... a.

Il est bon d'observer que dans les divisions, qui servent à déterminer les nombres F_5, E_4, ... A_0, Z, on peut se servir de valeurs *approximatives*, pourvu que les fonctions jointes aux valeurs exactes n'aient jamais le même signe que le dernier terme F_5.

Exemple d'une équation pour laquelle on reconnaît qu'elle n'a pas de racines entre $x = 0$ et $x = 3$.

$$1.x^3 - 90x^4 + 400x^3 - 2400x^2 + 11700x - 18000 = 0$$

3	0,6	+ 3	− 81	+ 166	− 1900	+ 6000	0

On a calculé ici les nombres $+6000$, -1900, en divisant par $a = 3$ les nombres -18000, $6000 - 11700$. Au lieu de la valeur exacte du quotient de $-1900 + 2400$ divisé par 3, on a mis le nombre $+166$, moindre que la valeur exacte (parceque le dernier terme $+6000$ est positif). Au lieu de la différence $166 - 400$, qui aurait été de signe opposé à $+6000$ et est plus grande que 166 (abstraction faite du signe), on a dû prendre $-\frac{(400)^2}{4.166} = -241$, qui, divisé par 3, donne un nombre fractionnaire, au lieu duquel il est plus commode de mettre le nombre -81, qui est moindre que le nombre exact. Parmis les nombres $0{,}6 + 3 - 81 + 166 - 1900 + 6000$ il ne se trouve pas deux nombres consécutifs de signe opposé au signe commun aux deux extrêmes; donc il est impossible que l'équation ait des racines entre 0 et 3.

Autre exemple.

$$1.x^5 - 7x^4 + 25x^3 - 6600x^2 + 13120x - 6561 = 0$$

3	+ 0	+ 1	− 4	+ 13	− 6560	+ 2187	0

Tous les deux nombres -6560 $+13$ sont un peu *moindres* que les valeurs exactes $\frac{-(13120)^2}{3.4.2187}$ et $\frac{-6560+6600}{3}$ (parceque $+2187$ est *positif*). Le pre-

mier terme étant $Z = +0$, on pourrait douter que l'équation ait la racine $x = 3$, mais il est facile de lever ce doute. Donc l'équation n'a pas de racines entre 0 et 3.

Exemple tiré d'un mémoire de M. ***Lobatto.***

$$1\,.\,x^4 - 12x^3 + 40x^2 - 30x + 6{,}5 = 0$$

$$\tfrac{1}{2}\,|\,+6\;+4\;-10\;\;+35\;\;-13\;\;0$$

Le terme -13 étant négatif, on a écrit $+35$, qui est un peu plus grand que $\frac{30^2}{\frac{1}{2}.4.13}$. Le premier terme $+6$ a le signe opposé à celui du dernier -13, donc il reste indécis, si l'équation a quelque racine entre 0 et $\frac{1}{2}$. Si on applique la règle à l'équation transformée par $y = -x + \frac{1}{2}$, savoir à

$$1\,.\,y^4 + 10y^3 + 23{,}5y^2 - 1{,}5y + 0{,}0625 = 0$$

$$1\,|\,-25\;-24\;-14\;\;+\;\;9\;\;\;-0{,}0625\;\;0$$

on trouve qu'il n'existe aucune valeur réelle entre 0 et 1; donc l'équation proposée n'a pas de racines entre $x = +\frac{1}{2}$, et $x = -\frac{1}{2}$.

Voici trois autres équations pour lesquelles notre règle indique l'absence de racines entre $x = 0$ et $x = 1$:

$$1\,.\,x^4 - 15x^3 + 37x^2 - 36x + 15 = 0,$$

$$1\,|\,-1\;-0\;-15\;\;+22\;\;\;-15\;\;0$$

$$13x^4 - 5x^3 - 16x^2 + 15x - 8 = 0,$$

$$1\,|\,+1\;+14\;\;+9\;\;\;-7\;\;\;+\;8\;\;0$$

$$1\,.\,x^7 - 4x^6 + 3x^5 + 1\,.\,x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 12x - 3 = 0.$$

$$1\,|\,+0\;+1\;\;\;-3\;\;+1\;\;+2\;\;\;+0\;\;-12\;\;+\;3\;\;\;0$$

Padoue, Février 1855.

18.

Eine Eigenschaft des Dreiecks.

(Von dem Herrn Prof. Dr. *Lehmus* zu Berlin.)

Zu drei gegebenen Puncten A, B, C (Taf. IV. Fig. 3.) einen vierten D, in derselben Ebene, unter der Bedingung zu finden, dafs die Summe S der drei Entfernungen DA, DB, DC ein Minimum sei.

Man nehme $AB = c$ zur Axe der Abscissen, A zu ihrem Anfangspunct an. $AQ = e$ und $QC = h$ seien die rechtwinkligen Coordinaten von C, und $AP = x$, $PD = y$ die von D. Ferner seien φ und ψ die Winkel zwischen DA und DP und DB und DP, und μ der Winkel zwischen CD und CQ. Dann gehen vermöge der Gleichungen

$$\begin{aligned} AD^2 &= x^2 + y^2; \\ BD^2 &= (c-x)^2 + y^2 \text{ und} \\ CD^2 &= (x-c)^2 + (h-y)^2 \end{aligned}$$

die beiden Bedingungen $dS_x = 0$ und $dS_y = 0$ für $S =$ Min. in

$$\sin\varphi - \sin\psi \pm \sin\mu = 0 \quad \text{und} \quad \cos\varphi + \cos\psi - \cos\mu = 0$$

über und aus ihnen folgt

$$\cos(\varphi + \psi) = -\tfrac{1}{2},$$

also

$$\varphi + \psi = \tfrac{2}{3}\pi.$$

Der verlangte Punct D liegt also so, dafs die drei Winkel ADB, BDC und CDA einander gleich sind. Ist einer der drei Winkel des Dreiecks ABC, etwa der in C, $= \frac{2}{3}\pi$, so fällt D in C; ist derselbe $> \frac{2}{3}\pi$, so fällt D aufserhalb des Dreiecks und es ist $DA + DB - DC$ ein Minimum.

Construction des Punctes D.

Bezeichnen a, b, c die Länge der drei Seiten des Dreiecks; α, β, γ die ihnen gegenüber liegenden Winkel, und u, v, w die Längen DA, DB, DC, so folgt aus

$$c^2 = u^2 + v^2 + uv, \quad b^2 = u^2 + w^2 + uw \quad \text{und} \quad a^2 = v^2 + w^2 + vw,$$

verbunden mit

$$[uv+uw+vw]\sin\tfrac{2}{3}\pi = \left\{\begin{matrix} bc\sin\alpha & \text{oder} \\ ac\sin\beta & \text{oder} \\ ab\sin\gamma & \end{matrix}\right\}:$$

$$[u+v+w]^2 \quad \text{oder} \quad S^2 = \left\{\begin{matrix} b^2+c^2-2bc\cos(\tfrac{1}{3}\pi+\alpha) & \text{oder} \\ a^2+c^2-2ac\cos(\tfrac{1}{3}\pi+\beta) & \text{oder} \\ a^2+b^2-2ab\cos(\tfrac{1}{3}\pi+\gamma) & \end{matrix}\right\}.$$

Daraus erhellet, dafs wenn über den Seiten des Dreiecks ABC, aufserhalb desselben, die *gleichseitigen* Dreiecke ABC_1, BCA_1 und ACB_1 gezeichnet werden:

Erstlich. Jede der drei Längen AA_1, BB_1, CC_1 gleich S ist; und

Zweitens. Alle drei sich in dem gesuchten Punct D schneiden.

Die gleiche Construction giebt D, wenn auch einer der drei Winkel, etwa γ, gröfser als $\frac{2}{3}\pi$ ist, so wie auch wenn C in AB fällt; sie giebt dann $DA+DB-DC$ für das Minimum.

Berlin, im November 1854.

19.

Bemerkungen zu einer Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

(Von Herrn Dr. phil. *Dedekind* zu Göttingen.)

In einem der früheren Hefte des „Philosophical Magazine" für 1854 hat *G. Boole* eine von *C. Cayley* gegebene Auflösung einer Wahrscheinlichkeits-Aufgabe angegriffen. Wiewohl nicht zu zweifeln, dafs der in diesem Angriff enthaltene Irrthum auch von Andern schon erkannt sei, so kommen doch die folgenden Bemerkungen Denen, welche sich für diese schöne Theorie interessiren, vielleicht nicht unerwünscht.

Die Aufgabe lautet: Gegeben ist die Wahrscheinlichkeit α, dafs eine Ursache A (welche ein gewisses Ereignifs hervorbringen kann) zur Wirkung kommt, und die Wahrscheinlichkeit p, dafs, wenn A wirkt, das Ereignifs eintritt; eben so die Wahrscheinlichkeit β, dafs eine Ursache B zur Wirkung gelangt, und die Wahrscheinlichkeit q, dafs, wenn B wirkt, das Ereignifs eintritt: gesucht wird die Wahrscheinlichkeit u des Ereignisses, unter der Annahme, dafs dasselbe von keiner andern Ursache als von A und B hervorgebracht werden kann.

Cayley löset die Aufgabe auf folgende Weise: Es sei λ die Wahrscheinlichkeit, dafs, wenn A wirkt, das Ereignifs auch durch A hervorgebracht wird; μ die Wahrscheinlichkeit, dafs, wenn B wirkt, das Ereignifs auch durch B hervorgebracht wird; dann ist

$$p = \lambda + (1-\lambda)\mu\beta; \qquad q = \mu + (1-\mu)\lambda\alpha.$$

Hieraus werden λ, μ bestimmt; und die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist

$$u = \lambda\alpha + \mu\beta - \lambda\mu\alpha\beta.$$

Nachdem nun *Boole* diese Auflösung bei mehren Specialisirungen als richtig bewährt fand, sucht er nachzuweisen, dafs sie in dem Falle $p = 1$, $q = 0$ zu einem falschen Resultat führe. Er sagt: Es ist einleuchtend, dafs die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses in diesem Fall $= \alpha$ sein mufs. Denn wenn die Ursache A das Ereignifs *stets* hervorbringt, die Ursache B *niemals*, und das Eintreten des Ereignisses keiner andern Ursache zugeschrieben

werden kann, so mufs die Wahrscheinlichkeit des „Ereignisses gleich der des Eintretens der Ursache A sein." Da sich gegen diesen Satz natürlich Nichts einwenden läfst, und nun die Auflösung, wie sie *Cayley* darstellt, in diesem Falle entweder $u = 1$, oder $u = \alpha(1-\beta)$ giebt, so schliefst *Boole*, dafs die ganze Auflösung fehlerhaft sein müsse, und giebt die Endformel seiner eigenen Auflösung, mit Hinzufügung besonderer Beschränkungen, aus denen sich allerdings für diesen Fall das gewünschte Resultat $u = \alpha$ ableiten läfst.

Man sieht indessen durchaus nicht, wo *Cayley* einen Fehler gemacht hätte; und in der That ist seine Auflösung auch (bis auf gewisse Beschränkungen, durch welche sie erst *eindeutig* gemacht werden mufs) streng richtig, selbst in dem eben angeführten Fall; denn man findet leicht, dafs $\alpha(1-\beta)$ mit α übereinstimmt, indem α Nichts Anderes als Null sein kann. Wäre nämlich die Möglichkeit des Eintretens der Ursache A offen gelassen, d. h. wäre α nicht Null, so könnte auch unmöglich die Wahrscheinlichkeit q des Ereignisses (unter der Annahme des Eintretens der Ursache B) gänzlich verschwinden, mag p noch so klein, nur nicht Null sein (in diesem Falle war aber $p = 1$ angenommen). Die gestellte Aufgabe ist daher *widersinnig*, wenn $q = 0$, α und p dagegen beide von Null verschieden angenommen werden. Dies ergiebt sich auch durch einen Blick auf die Gleichungen von *Cayley*. Wenn man nämlich beachtet, dafs μ, $(1-\mu)$, λ, α, *der Natur ihrer Bedeutung nach*, nicht *negativ* sein können, so folgt aus der *einen* Gleichung $q = 0$, sowohl $\mu = 0$, als auch $\lambda\alpha = 0$, und die andere Gleichung geht in $p = \lambda$ über. Ist nun p von Null verschieden (es ist nicht nöthig dafs p gerade $= 1$ sei), so mufs auch $\alpha = 0$ sein; und die gesuchte Wahrscheinlichkeit u mufs stets $= 0$ sein, mag q oder p, oder mögen beide $= 0$ sein; wie man es nicht anders erwarten darf.

Wenn nun aber dieser Vorwurf auch die obige Auflösung nicht trifft, so ist sie doch wenigstens noch *unvollständig* zu nennen, da die Bedingungen nicht angegeben sind, unter welchen die Aufgabe wirklich einen reellen Sinn hat, und da ferner zu entscheiden übrig bleibt, welchen der beiden Werthe von u, die den obigen Gleichungen genügen, man zu wählen habe. Dies soll hier geschehen.

Man verfährt mit der meisten Symmetrie, wenn man μ aus den Gleichungen für q und u, und eben so λ aus den Gleichungen für p und u eliminirt. Dies giebt

$$(1.) \quad u - \beta q = (1-\beta)\lambda\alpha; \quad u - \alpha p = (1-\alpha)\mu\beta,$$

und wenn man diese Werthe von $\lambda\alpha$, $\mu\beta$ in die Gleichung für u substituirt, so erhält man eine quadratische Gleichung, durch deren Auflösung sich

$$(2.) \qquad u = \tfrac{1}{2}(1-\alpha\beta+\alpha p+\beta q-\varrho)$$

ergiebt, worin ϱ die *noch zweideutige* Quadratwurzel aus

$$\varrho\varrho = \begin{cases}(1-\alpha\beta+\alpha p+\beta q)^2-4(1-\beta)\alpha p,\\ -4(1-\alpha)\beta q-4\alpha p\,.\,\beta q\end{cases}$$

ist. Damit aber die Aufgabe lösbar sei, ist *nöthig:* zuerst, dafs ϱ *reell,* und weiter, dafs u (als eine Wahrscheinlichkeit) ein *positiver echter Bruch* sei. Aber auch Dies ist noch nicht *genügend;* und darin liegt eigentlich das Haupt-Interesse der ganzen Aufgabe. Sie würde immer noch ohne Sinn bleiben, wenn die Hülfs-Wahrscheinlichkeiten λ, μ nicht ebenfalls zwischen den Grenzen 0 und 1 enthalten wären, und es ist klar, dafs mit diesen *letzten* Bedingungen auch zugleich die *ersten* erfüllt werden müssen. Es kommt daher nur darauf an, die Bedingungen aufzustellen, welche ausdrücken, dafs λ, μ nicht aufserhalb der genannten Grenzen liegen. Dies ist leicht, da man die Werthe von λ, μ aus den Gleichungen (1.) erhält, wenn man in ihnen für u den in (2.) gefundenen Ausdruck substituirt. Bei dieser Untersuchung kommt man auf die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}\varrho\varrho &= (1-2\alpha+\alpha\beta+\alpha p-\beta q)^2+4\alpha(1-\alpha)(1-\beta)(1-p)\\ &= (1-2\beta+\alpha\beta-\alpha p+\beta q)^2+4\beta(1-\beta)(1-\alpha)(1-q)\\ &= (1-\alpha\beta+\alpha p-\beta q)^2-4\alpha(1-\beta)(p-\beta q)\\ &= (1-\alpha\beta-\alpha p+\beta q)^2-4\beta(1-\alpha)(q-\alpha p).\end{aligned}$$

Aus den beiden ersten Formen für $\varrho\varrho$ geht hervor, dafs es keiner besondern Bedingung für die Realität von ϱ bedarf. Setzt man aber die Formen in Verbindung mit den Forderungen für λ, μ, so ergiebt sich, dafs in dem Ausdrucke (2.) für u stets die *positive* Quadratwurzel für ϱ genommen werden mufs. Vergleicht man endlich die beiden letzten Formen für $\varrho\varrho$ mit den Forderungen für λ und μ, so erhält man, als die einzigen nothwendig *erforderlichen,* aber auch vollständig *genügenden* Bedingungen, dafs die beiden Differenzen

$$(3.) \qquad p-\beta q \quad \text{und} \quad q-\alpha p$$

nicht negativ sein dürfen.

Wenn man also, um ein Beispiel zu der Aufgabe zu geben, für α, β, p, q vier beliebige Zahlen innerhalb der Grenzen 0 und 1 angenommen hat,

so mufs man erst untersuchen, ob sie den beiden Bedingungen in (3.) Genüge leisten. Beiläufig bemerkt, kann man bei einer solchen willkürlichen Wahl eben so oft ein widersinniges Beispiel wie ein passendes treffen; denn der Werth des vierfachen Integrals $\int\int\int\int d\alpha\, d\beta\, dp\, dq$ ist $= 1$, wenn man die Integrationen über *alle* Werthe der Veränderlichen zwischen 0 und 1 ausdehnt; dagegen $= \frac{1}{2}$, wenn man diejenigen Werthe ausschliefst, welche den Bedingungen (3.) nicht Genüge leisten. Man kann sich hiervon auch leicht durch *geometrische* Betrachtungen überzeugen.

In dem von *Boole* untersuchten Falle $q = 0$ reduciren sich die Bedingungen (3.) auf $\alpha p = 0$; dann wird $\varrho = 1 - \alpha\beta$, und folglich $u = 0$; ganz in Übereinstimmung mit den obigen Resultaten. Auch der Fall $\alpha = 0$ ist von Interesse. Dann ist $\varrho = 1 - \beta q$, und folglich $u = \beta q$ offenbar das richtige Resultat. Hierbei ist natürlich u von q unabhängig, und dennoch bleibt die Bedingung $p - \beta q \geqq 0$ in voller Kraft, und obgleich zur Bestimmung von u auf den Werth von p gar kein Gewicht fällt, so wäre es doch widersinnig, die Wahrscheinlichkeit p des Ereignisses *unter der Annahme*, dafs die Ursache A zur Wirkung gelangt, kleiner als die Wahrscheinlichkeit βq anzunehmen, wenn auch diese Annahme durch die Bestimmung $\alpha = 0$ *factisch verboten* ist. Und mit dieser Bemerkung, die, wie ich glaube, dazu geeignet ist, auf die Eigenthümlichkeit dieser Art von Aufgaben ein frappantes Licht zu werfen, will ich meine Betrachtungen abbrechen.

Göttingen, 22. Juli 1854.

20.

Ein Satz aus der Theorie der dreiaxigen Coordinatensysteme.

(Von Herrn Dr. phil. *Dedekind* zu Göttingen.)

Wenn die Winkel YOZ, ZOX, XOY eines dreiaxigen Coordinatensystems durch a, b, c bezeichnet werden, so wird der convexe Winkel w zwischen zwei beliebigen Richtungen OM und OM' durch folgende Gleichung bestimmt:

$$(1.)\quad \left.\begin{matrix}\alpha\alpha'\sin a^2+\beta\beta'\sin b^2+\gamma\gamma'\sin c^2+(\beta\gamma'+\gamma\beta')(\cos b\cos c-\cos a)\\ +(\gamma\alpha'+\alpha\gamma')(\cos c\cos a-\cos b)+(\alpha\beta'+\beta\alpha')(\cos a\cos b-\cos c)\end{matrix}\right\} = D\cos w,$$

in welcher α, β, γ die Cosinus der concaven Winkel MOX, MOY, MOZ, eben so α', β', γ' die Cosinus der concaven Winkel $M'OX$, $M'OY$, $M'OZ$ sind, und D folgende Bedeutung hat:

$$(2.)\quad D = 1-\cos a^2-\cos b^2-\cos c^2+2\cos a\cos b\cos c.$$

Dieser bekannte Satz schliefst den andern ein, dafs drei solche Richtungs-Cosinus, wie α, β, γ, stets der Bedingung

$$(3.)\quad \left.\begin{matrix}\alpha\alpha\sin a^2+\beta\beta\sin b^2+\gamma\gamma\sin c^2+2\beta\gamma(\cos b\cos c-\cos a)\\ +2\gamma\alpha(\cos c\cos a-\cos b)+2\alpha\beta(\cos a\cos b-\cos c)\end{matrix}\right\} = D$$

Genüge leisten müssen.

Ist das Coordinatensystem rechtwinklig, so gehen die Gleichungen (1.) und (3.) in die beiden folgenden über:

$$\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma' = \cos w,$$
$$\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma = 1.$$

Um daher auszudrücken, dafs dann die drei Linien OM, OM', OM'' ein zweites rechtwinkliges Coordinatensystem bilden, sind folgende sechs Gleichungen *nöthig:*

$$(4.)\quad \left\{\begin{matrix}\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma=1; & \alpha'\alpha''+\beta'\beta''+\gamma'\gamma''=0;\\ \alpha'\alpha'+\beta'\beta'+\gamma'\gamma'=1; & \alpha''\alpha+\beta''\beta+\gamma''\gamma=0;\\ \alpha''\alpha''+\beta''\beta''+\gamma''\gamma''=1; & \alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma'=0.\end{matrix}\right.$$

Sie sind auch ***hinreichend*** zu diesem Zweck, ***wenn angenommen wird, dafs das erste System rechtwinklig sei.***

Der in der Überschrift angekündigte Satz besteht nun darin, dafs diese letztere Beschränkung ***weggelassen*** werden darf, indem die Gleichungen (4.) unzweifelhaft ausdrücken, ***dafs beide Systeme durchaus rechtwinklig sein müssen.*** Der Beweis dieses merkwürdigen Theorems bildet den Gegenstand des gegenwärtigen Aufsatzes.

Zunächst mögen hier ohne weitern Beweis die bekannten Folgerungen aus den Gleichungen (4.) Platz finden; nämlich:

$$(5.)\quad \begin{cases} \alpha\alpha+\alpha'\alpha'+\alpha''\alpha''=1; & \beta\gamma+\beta'\gamma'+\beta''\gamma''=0; \\ \beta\beta+\beta'\beta'+\beta''\beta''=1; & \gamma\alpha+\gamma'\alpha'+\gamma''\alpha''=0; \\ \gamma\gamma+\gamma'\gamma'+\gamma''\gamma''=1; & \alpha\beta+\alpha'\beta'+\alpha''\beta''=0; \end{cases}$$

und

$$(6.)\quad \begin{cases} \beta'\gamma''-\beta''\gamma'=\varepsilon\alpha; & \gamma'\alpha''-\gamma''\alpha'=\varepsilon\beta; & \alpha'\beta''-\alpha''\beta'=\varepsilon\gamma; \\ \beta''\gamma-\beta\gamma''=\varepsilon\alpha'; & \gamma''\alpha-\gamma\alpha''=\varepsilon\beta'; & \alpha''\beta-\alpha\beta''=\varepsilon\gamma'; \\ \beta\gamma'-\beta'\gamma=\varepsilon\alpha''; & \gamma\alpha'-\gamma'\alpha=\varepsilon\beta''; & \alpha\beta'-\alpha'\beta=\varepsilon\gamma''; \end{cases}$$

wo bekanntlich $\varepsilon\varepsilon=1$ ist.

Die ternäre quadratische Form

$$F \equiv xx+yy+zz+2yz\cos a+2zx\cos b+2xy\cos c,$$

(welche bekanntlich das Quadrat der Entfernung eines beliebigen Punctes (xyz) von dem Nullpuncte O des Coordinatensystems $OXYZ$ ausdrückt) hat zur ***Determinante*** den oben (2.) mit D bezeichneten Ausdruck (das Quadrat des Volumens des von den drei Axen $OX=OY=OZ=1$ als Kanten gebildeten Parallelepipedums), und zur *adjungirten* Form:

$$\begin{aligned} F_1 \equiv\ & xx\sin a^2+yy\sin b^2+zz\sin c^2+2yz(\cos b\cos c-\cos a) \\ & +2zx(\cos c\cos a-\cos b)+2xy(\cos a\cos b-\cos c). \end{aligned}$$

Es ist dann bekanntlich die Determinante von F_1 das Quadrat der von F, also $=DD$, und die adjungirte Form F_2 von F_1 ist $\equiv DF$.

Wenn man folgende Bezeichnung einführt:

$$\begin{Bmatrix} xx'\sin a^2+yy'\sin b^2+zz'\sin c^2+(yz'+zy')(\cos b\cos c-\cos a) \\ +(zx'+xz')(\cos c\cos a-\cos b)+(xy'+yx')(\cos a\cos b-\cos c) \end{Bmatrix} \equiv F_1\begin{pmatrix} x, & y, & z \\ x', & y', & z' \end{pmatrix},$$

so ist aus der Theorie der ternären Formen weiter bekannt, dafs

$$F_1\begin{pmatrix} x, & y, & z \\ x, & y, & z \end{pmatrix} F_1\begin{pmatrix} x', & y', & z' \\ x', & y', & z' \end{pmatrix} - \left[F_1\begin{pmatrix} x, & y, & z \\ x', & y', & z' \end{pmatrix}\right]^2$$
$$\equiv F_2\begin{pmatrix} yz'-zy', & zx'-xz', & xy'-yx' \\ yz'-zy', & zx'-xz', & xy'-yx' \end{pmatrix},$$

also im gegenwärtigen Falle

$$(7.) \quad \equiv D.F\begin{pmatrix} yz'-zy', & zx'-xz', & xy'-yx' \\ yz'-zy', & zx'-xz', & xy'-yx' \end{pmatrix}$$

ist.

Nach diesen Vorbemerkungen ist es nun leicht, den obigen Satz zu beweisen. $OXYZ$ sei das eine Coordinatensystem mit den Winkeln a, b, c; $OMM'M''$ das andere mit den Winkeln m, m', m''. OM bilde mit den drei Axen OX, OY, OZ Winkel, deren Cosinus α, β, γ u. s. w. sind. Dann finden folgende sechs Gleichungen Statt:

$$(8.)\begin{cases} F_1\begin{pmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha, & \beta, & \gamma \end{pmatrix} = D; \quad F_1\begin{pmatrix} \alpha', & \beta', & \gamma' \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \end{pmatrix} = D; \quad F_1\begin{pmatrix} \alpha'', & \beta'', & \gamma'' \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'' \end{pmatrix} = D; \\ F_1\begin{pmatrix} \alpha', & \beta', & \gamma' \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'' \end{pmatrix} = D\cos m; \quad F_1\begin{pmatrix} \alpha'', & \beta'', & \gamma'' \\ \alpha, & \beta, & \gamma \end{pmatrix} = D\cos m'; \\ F_1\begin{pmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \end{pmatrix} = D\cos m'', \end{cases}$$

welche allgemein die Beziehung zwischen irgend zwei dreiaxigen Coordinatensystemen ausdrücken. Wenn nun aber aufserdem die Gleichungen (4.), und folglich auch die (5. und 6.) gelten, so erhält man durch Addition der drei ersten Gleichungen in (8.):

$$(9.) \quad \sin a^2 + \sin b^2 + \sin c^2 = 3D.$$

Ferner ergiebt sich aus dem in (7.) enthaltenen Theorem:

$$F_1\begin{pmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha, & \beta, & \gamma \end{pmatrix} F_1\begin{pmatrix} \alpha', & \beta', & \gamma' \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \end{pmatrix} - \left[F_1\begin{pmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \end{pmatrix}\right]^2$$
$$\equiv D.F\begin{pmatrix} \beta\gamma'-\beta'\gamma, & \gamma\alpha'-\gamma'\alpha, & \alpha\beta'-\alpha'\beta \\ \beta\gamma'-\beta'\gamma, & \gamma\alpha'-\gamma'\alpha, & \alpha\beta'-\alpha'\beta \end{pmatrix} = D.F\begin{pmatrix} \varepsilon\alpha'', & \varepsilon\beta'', & \varepsilon\gamma'' \\ \varepsilon\alpha'', & \varepsilon\beta'', & \varepsilon\gamma'' \end{pmatrix}$$

oder

$$DD - DD\cos m''^2$$
$$= D(\alpha''\alpha'' + \beta''\beta'' + \gamma''\gamma'' + 2\beta''\gamma''\cos a + 2\gamma''\alpha''\cos b + 2\alpha''\beta''\cos c),$$

also

$$D\sin m^2 = 1 + 2\beta\gamma\cos a + 2\gamma\alpha\cos b + 2\alpha\beta\cos c;$$
$$D\sin m'^2 = 1 + 2\beta'\gamma'\cos a + 2\gamma'\alpha'\cos b + 2\alpha'\beta'\cos c;$$
$$D\sin m''^2 = 1 + 2\beta''\gamma''\cos a + 2\gamma''\alpha''\cos b + 2\alpha''\beta''\cos c;$$

und hieraus durch Addition:

$$D(\sin m + \sin m'^2 + \sin m''^2) = 3.$$

Vergleicht man diese Relation mit der in (9.) enthaltenen, so ergiebt sich

$$(\sin a^2 + \sin b^2 + \sin c^2)(\sin m^2 + \sin m'^2 + \sin m''^2) = 3.3,$$

und hieraus

$$\sin a^2 = \sin b^2 = \sin c^2 = \sin m^2 = \sin m'^2 = \sin m''^2 = 1;$$

d. h. alle sechs Coordinatenwinkel müssen *rechte* Winkel sein.

Bei diesem Beweise wurde natürlich vorausgesetzt, dafs D von Null verschieden sei, d. h. dafs OX, OY, OZ nicht in einer Ebene enthalten sind.

Göttingen, 15. Juli 1854.

Druckfehler im 2ten Heft 49ten Bandes.

Page	*Ligne*	*Au lieu de*	*lisez*
130	2	$\alpha_{2,2}-\alpha_{3,3})(u_2u_2-u_3u_3)$	$\alpha_{n,n}u_1u_1+\alpha_{1,1}u_2u_2+\cdots\alpha_{n-1}\alpha_{n-1}u_nu_n$
131	25	$u_1u_1+u_2u_2$	$u_1u_1=u_2u_2$
134	1	à zéro	à l'unité absolue
134	9	$(xb-ya)$	$(xb-ya)$, x^2+y^2 étant égal à l'unité absolue
135	22	$0=u_1u_2$	$0=u_1u_1$

21.

Sept différents mémoires d'analyse.

(Par Mr. *A. Cayley* à Londres.)

No. 1.

Reponse à une question proposée par M. *Steiner*. (Aufgabe 4. t. 31. p. 90.)

En partant des deux théorèmes:

I. Qu'il existe au moins une surface du second ordre qui touche neuf plans donnés quelconques;

II. Que le lieu d'intersection de trois plans rectangles qui touchent une surface du second ordre est une sphère concentrique avec la surface, tandis que pour le paraboloïde cette sphère se réduit à un plan,

M. *Steiner* suppose le cas d'un parallèlepipède rectangle, ou même d'un cube P et d'un point quelconque D, par lequel passent trois plans rectangles. Les six plans du parallèlepipède P et les trois plans passant par le point D seront touchés d'une surface F du second ordre (I.), et les huit angles E du parallèlepipède P et le point D doivent donc se trouver tous les neuf sur la surface d'une sphère, ou dans un plan (II.). Les huits angles E sont en effet situés sur la surface d'une sphère, déterminée par eux; mais le point D étant arbitraire, ce point en général ne sera pas situé sur cette surface sphérique, de manière que les neuf points $8E$ et D ne seront situés, ni dans une surface sphérique, ni dans un plan; ce qui ne s'accorde pas avec le théorème II. Cela étant, M. *Steiner* dit, qu'il y a à prouver que la contradiction n'est qu'apparente et que tout cela n'affaiblit pas la validité générale des deux théorèmes.

Il s'agit de savoir ce que devient dans le cas supposé par M. *Steiner* la surface du second ordre qui touche les six plans du parallèlepipède P et les trois plans qui passent par le point D. Cette surface sera en effet *la conique selon laquelle l'infini, considéré comme plan, est coupé par un cône déterminé, près la position du sommet.* En effet, menons par un point quelconque de l'espace trois plans parallèles aux plans du parallèlepipède P, et par le point D trois autres plans parallèles à ces plans. Ces *six* plans

seront touchés (en vertu d'un théorème connu) par un cône déterminé du second ordre, et on peut dire que ce cône, quelle que soit la position de son sommet, rencontre l'infini considéré comme plan, dans une seule et même conique (cela n'est en effet autre chose que de dire que deux droites parallèles rencontrent l'infini, considéré comme plan, dans un seul et même point). Le cône dont il s'agit aura la propriété d'être touché par une infinité de systèmes de trois plans rectangles. En effet: le plan passant par le sommet, et perpendiculaire à la droite d'intersection de deux plans tangents quelconques, sera un plan tangent le cône; les plans d'un tel système seront aussi des plans tangents la conique mentionnée ci-dessus: donc le sommet du cône sera le point d'intersection de trois plans rectangles de la conique; et ce sommet étant un point entièrement indéterminé, le lieu de l'intersection des trois plans tangents rectangles de la conique, sera de même absolument indéterminé, ou si l'on veut, ce lieu sera l'espace entier aux points près, à une distance infinie. La contradiction apparente dont M. *Steiner* parle, a par conséquent son origine dans l'indétermination qui a lieu dans le cas dont il s'agit. Dans tout autre cas, le point d'intersection des trois plans rectangles de la surface du second ordre est parfaitement déterminé, et les théorèmes I. et II. sont tous deux légitimes.

No. 2.

Sur un théorème de M. *Schläfli*.

On lit dans (§. 13) d'un mémoire très intéressant de M. *Schläfli* intitulé „Über die Resultante eines Systems mehrerer algebraischer Gleichungen" (Mém. de l'Acad. de Vienne t. IV) un très beau théorème sur les *Résultants*.

Pour faire voir plus clairement en quoi consiste ce théorème, je prends un cas particulier. Soit

$$U = ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3 = (a, b, c, d)\widehat{(x, y)^3},$$
$$V = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 = (\alpha, \beta, \gamma)\widehat{(x, y)^2}.$$

Je fais $p = x^2$, $q = xy$, $r = y^2$, et je forme les opérateurs

$$\mathfrak{A} = \xi\partial_a + \tfrac{1}{3}\eta\partial_b + \tfrac{1}{3}\zeta\partial_c,$$
$$\mathfrak{B} = \tfrac{1}{3}\xi\partial_b + \tfrac{1}{3}\eta\partial_c + \zeta\partial_d,$$

qui, opérant sur U, donnent

$$x(p\xi+q\eta+r\zeta);\quad y(p\xi+q\eta+r\zeta).$$

L'opérateur

$$\mathfrak{C} = \xi\partial_a+\tfrac{1}{2}\eta\partial_\beta+\zeta\partial_\gamma,$$

opérant sur V, donne

$$p\xi+q\eta+r\zeta.$$

Cela étant, soit $\varphi=0$ le *résultant* des équations $U=0$, $V=0$, c'est à dire l'équation que l'on obtient en éliminant x, y entre les équations $U=0$, $V=0$, ou autrement dit, soit φ le résultant des fonctions U, V. Pour fixer les idées j'écris la valeur de ce résultant comme suit:

$$\varphi = \begin{vmatrix} a, & 3b, & 3c, & d \\ a, & 3b, & 3c, & d \\ & \alpha, & 2\beta, & \gamma \\ \alpha, & 2\beta, & \gamma & \\ \alpha, & 2\beta, & \gamma & \end{vmatrix}$$

Je suppose que les opérateurs $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ opèrent sur le résultant φ, ce qui donne les fonctions

$$\mathfrak{A}\varphi,\quad \mathfrak{B}\varphi,\quad \mathfrak{C}\varphi,$$

ou en écrivant pour $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ leurs valeurs:

$$(\xi\partial_a+\tfrac{1}{3}\eta\partial_b+\tfrac{1}{3}\zeta\partial_c)\varphi,$$
$$(\tfrac{1}{3}\xi\partial_b+\tfrac{1}{2}\eta\partial_c+\zeta\partial_d)\varphi,$$
$$(\xi\partial_a+\eta\partial_\beta+\zeta\partial_\gamma)\varphi,$$

et en considérant ces expressions comme des fonctions de ξ, η, ζ, j'en forme le résultant Φ, savoir

$$\Phi = \begin{vmatrix} \partial_a\varphi, & \tfrac{1}{3}\partial_b\varphi, & \tfrac{1}{3}\partial_c\varphi \\ \tfrac{1}{3}\partial_b\varphi, & \tfrac{1}{3}\partial_c\varphi, & \partial_d\varphi \\ \partial_a\varphi, & \tfrac{1}{2}\partial_\beta\varphi, & \partial_\gamma\varphi \end{vmatrix}.$$

Ce résultant Φ contiendra le carré de φ *comme facteur;* c'est ce qui donne dans le cas particulier dont il s'agit, le théorème de M. *Schläfli.*

Généralement, en supposant que l'on ait autant de fonctions $U, V, W, \ldots$ que d'indéterminées $x, y, z, \ldots$ on peut supposer que $p, q, \ldots$ soient des monômes $x^l, y^m, z^n, \ldots$ du même degré λ (il n'est pas nécessaire d'avoir la série entière de ces monômes), et on peut former des opérateurs $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, etc.

en même nombre que celui des monômes $p, q, \ldots$ où les indéterminées $\xi, \eta, \ldots$, tels que ces opérateurs $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots$, opérant sur les fonctions $U, V, W, \ldots$ (chacun sur la fonction à l'aquelle il appartient) donnent $t(p\xi + q\eta \ldots)^{\mu}$, $t'(p\xi + q\eta \ldots)^{\mu'}$; etc., t, t' étant des monômes de la forme $x^f y^g z^h, \ldots$

Cela étant, soit φ le résultant des fonctions $U, V, W, \ldots$ En opérant sur ce résultant φ avec les opérateurs $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots$ et en formant ainsi les fonctions $\mathfrak{A}\varphi, \mathfrak{B}\varphi, \ldots$ soit Φ le résultant de ces expressions considérées comme des fonctions de ξ, η, etc. Φ contiendra une puissance de φ ***comme facteur***, et en supposant que μ ne soit plus petit qu'aucun autre des indices $\mu, \mu', \ldots, \pi = \mu\mu', \ldots$ et $\sigma = \frac{\pi}{\mu} + \frac{\pi}{\mu'} + \cdots$, l'indice de cette puissance sera au moins $\sigma - \frac{\pi}{\mu}$. Voilà le théorème général de M. ***Schläfli***.

La démonstration donnée dans le mémoire cité, est, on ne peut plus simple et élégante. Elle repose d'abord sur un théorème connu (démontré au reste §. 6) qui peut être énoncé ainsi. Savoir, en supposant que les équations $U = 0, V = 0, \ldots$ soient satisfaites, on aura (près un facteur indépendant de $\xi, \eta, \ldots$):

$$\mathfrak{A}\varphi = t(p\xi + q\eta \ldots)^{\mu}, \quad \mathfrak{B}\varphi = t'(p\xi + q\eta \ldots)^{\mu'}, \text{ etc.}$$

Puis, elle est fondée sur le théorème démontré (§. 12), savoir: le résultant des fonctions

$$\begin{aligned} &t(p\xi + q\eta \ldots)^{\mu} + f(\xi, \eta \ldots), \\ &t'(p\xi + q\eta \ldots)^{\mu'} + f'(\xi, \eta \ldots), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

(où $f, f', \ldots$ sont des polynômes de degrés $\mu, \mu', \ldots$ en ξ, η, etc., et $p, q, \ldots, t, t', \ldots$ des constantes quelconques) sera, en supposant que μ ne soit plus petit qu'aucun autre des indices $\mu, \mu', \ldots$ et en posant $\pi = \mu\mu' \ldots$, tout au plus du degré $\frac{\pi}{\mu}$ par rapport aux quantités t, t', etc. Voici cette démonstration, qui suppose aussi que le résultant φ soit ***indécomposable.*** Supposons que les coefficients de $U, V, W, \ldots$ soient assujétis à la seule condition d'être tels que le résultant φ soit un infiniment petit du premier ordre, il sera permis de supposer que tous ces coefficients des indéterminées $x, y, \ldots$ ne diffèrent des valeurs qui satisfont aux équations $U = 0, V = 0, W = 0$, que par des incréments infiniment petits du premier ordre; le résultant φ sera un infiniment petit du premier ordre, mais toute autre fonction des coefficients, à moins qu'elle ne contienne une puissance de φ comme

facteur, aura une valeur finie, et toute fonction des coefficients infiniment petite de l'ordre k contiendra φ^k ***comme facteur***. Dans cette supposition les équations $\mathfrak{A}\varphi = 0$, $\mathfrak{B}\varphi = 0$, etc. deviendront:

$$t\,(p\xi + q\eta \ldots)^{\mu} + f(\xi, \eta \ldots) = 0,$$
$$t'(p\xi + q\eta \ldots)^{\mu'} + f'(\xi, \eta \ldots) = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

où f, f', ... sont des polynômes de degrés μ, μ', ... dont les coefficients sont des infiniment petits du premier ordre. En supposant toujours que μ ne soit plus petit qu'aucun autre des indices μ, μ', ... et en posant $\pi = \mu\mu' \ldots$, $\sigma = \frac{\pi}{\mu} + \frac{\pi}{\mu'} \ldots$, le résultant Φ du système sera tout au plus du degré $\frac{\pi}{\mu}$ par rapport aux quantités finies t, t', ... Le degré par rapport à tous les coefficients est σ; le degré par rapport aux coefficients de f, f', ... sera donc au moins $\sigma - \frac{\pi}{\mu}$; c'est à dire, ce résultant sera un infiniment petit de l'ordre $\sigma - \frac{\pi}{\mu}$, ou enfin, Φ contiendra $\varphi^{\sigma - \pi : \mu}$ ***comme facteur***. Or les coefficients de U, V, W, ... (assujétis à la seule condition ci-dessus mentionnée) étant d'ailleurs arbitraires, on voit sans peine qu'il est permis de faire abstraction de la ***condition***, et que Φ contiendra en général cette même puissance $\varphi^{\sigma - \pi : \mu}$ ***comme facteur;*** ce qu'il y avait à démontrer.

Rien n'empêche que Φ ne contienne une plus haute puissance que $\varphi^{\sigma - \pi : \mu}$ comme facteur, ou que Φ ne s'évanouisse identiquement. On peut même assigner de plus près que l'a fait M. ***Schläfli***, des cas où Φ s'évanouit identiquement. Soient m, m', m'', ... les degrés de U, V, W, ... par rapport à x, y, z, ..., $p = mm'm'' \ldots$, $s = \frac{p}{m} + \frac{p}{m'} + \frac{p}{m''} \ldots$, φ sera du degré $\frac{p}{m}$ par rapport aux coefficients de U. Soient aussi $\mu_{\prime}$, $\mu_{\prime\prime}$, ... les degrés de celles des fonctions $\mathfrak{A}\varphi$, $\mathfrak{B}\varphi$, ..., pour lesquelles les opérateurs $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, ... contiennent des différentielles par rapport aux coefficients de U, $\varrho = \frac{\pi}{\mu_{\prime}} + \frac{\pi}{\mu_{\prime\prime}} \cdots$: pour ces fonctions les coefficients seront du degré $\frac{p}{m} - 1$ par rapport aux coefficients de U; pour les autres ils seront du degré $\frac{p}{m}$. Φ sera donc du degré $\left(\frac{p}{m} - 1\right)\varrho + \frac{p}{m}(\sigma - \varrho) = \frac{p}{m}\sigma - \varrho$, par rapport aux coefficients de U, et $\Phi - \varphi^{\sigma - \pi : \mu}$ sera du degré $\frac{p}{m}\sigma - \varrho - \frac{p}{m}\left(\sigma - \frac{\pi}{\mu}\right)$, c'est à dire du degré

$\frac{p}{m}\cdot\frac{\pi}{\mu}-\varrho$ par rapport aux coefficients de U. De même, en supposant que les lettres m', ϱ', ... aient rapport à V etc., $\Phi \div \varphi^{\sigma-\pi:\mu}$ sera du degré $\frac{p}{m'}\cdot\frac{\pi}{\mu}-\varrho'$ etc. par rapport aux coefficients de V etc. Si l'un quelconque des nombres $\frac{p}{m}\cdot\frac{\pi}{\mu}-\varrho$, $\frac{p}{m'}\cdot\frac{\pi}{\mu}-\varrho'$ etc. est ***négatif***, et à plus forte raison, si leur somme $s\cdot\frac{\pi}{\mu}-\sigma$ est ***negative***, Φ doit s'évanouir identiquement. En particulier, en supposant que le nombre des fonctions $\mathfrak{A}\varphi.\mathfrak{B}\varphi\ldots$ (c'est à dire le nombre des indéterminés ξ, η, ...) soit ν, on aura $\sigma > \nu\frac{\pi}{\mu}$, et par cette raison Φ s'évanouira identiquement si $\frac{\pi}{\mu}(\sigma-\nu)$ est négatif, c'est à dire si $\nu > \sigma$. Je ne parlerai pas ici des cas examinés par M. ***Schläfli,*** où Φ contient comme facteur une plus haute puissance que $\varphi^{\sigma-\pi:\mu}$.

No. 3.

Remarques sur la notation des fonctions algébriques.

Je me sers de la notation

$$\begin{vmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma, & \ldots \\ \alpha', & \beta', & \gamma', & \ldots \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'', & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

pour représenter ce que j'appelle une ***matrice;*** savoir un ***système*** de quantités rangées en forme de ***carré,*** mais d'ailleurs tout à fait ***indépendantes*** (je ne parle pas ici des ***matrices rectangulaires***). Cette notation me parait très commode pour la théorie des équations ***linéaires;*** j'écris par ex:

$$(\xi, \eta, \zeta \ldots) = \begin{vmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma & \ldots \\ \alpha', & \beta', & \gamma' & \ldots \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'' & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}\widehat{(x, y, z \ldots)}$$

pour représenter le système des équations

$$\begin{aligned}\xi &= \alpha x + \beta y + \gamma z \ldots\\ \eta &= \alpha' x + \beta' y + \gamma' z \ldots\\ \zeta &= \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z \ldots\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

On obtient par là l'équation:

$$(x, y, z \ldots) = (\begin{vmatrix}\alpha, & \beta, & \gamma, & \ldots\\ \alpha', & \beta', & \gamma', & \ldots\\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'', & \ldots\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\end{vmatrix}^{-1})\widehat{(\xi, \eta, \zeta \ldots)},$$

qui représente le système d'équations qui donne x, y, z, ... en termes de ξ, η, ζ, ..., et on se trouve ainsi conduit à la notation

$$\begin{vmatrix}\alpha, & \beta, & \gamma, & \ldots\\ \alpha', & \beta', & \gamma', & \ldots\\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'', & \ldots\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\end{vmatrix}^{-1}$$

de la matrice ***inverse.*** Les termes de cette matrice sont des fractions, ayant pour ***dénominateur*** commun le ***déterminant*** formé avec les termes de la matrice originale; les ***numérateurs*** sont les déterminants mineurs formés avec les termes de cette même matrice en supprimant l'une quelconque des lignes et l'une quelconque des colonnes.

Soit encore

$$(x, y, z \ldots) = \begin{vmatrix}a, & b, & c & \ldots\\ a', & b', & c' & \ldots\\ a'', & b'', & c'' & \ldots\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\end{vmatrix}\widehat{(x, y, z \ldots)},$$

on peut écrire:

$$(\xi, \eta, \zeta) = (\begin{vmatrix}\alpha, & \beta, & \gamma & \ldots\\ \alpha', & \beta', & \gamma' & \ldots\\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'' & \ldots\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a, & b, & c & \ldots\\ a', & b', & c' & \ldots\\ a'', & b'', & c'' & \ldots\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\end{vmatrix})\widehat{(x, y, z \ldots)}$$

et l'on parvient ainsi à l'idée d'une ***matrice composée***, par ex.

$$\left|\begin{matrix} \alpha, & \beta, & \gamma & \ldots \\ \alpha', & \beta', & \gamma' & \ldots \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma' & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} a, & b, & c & \ldots \\ a', & b', & c' & \ldots \\ a'', & b'', & c'' & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix}\right|$$

On voit d'abord que la valeur de cette matrice composée est

$$\left|\begin{matrix} (\alpha, \beta, \gamma \ldots)\widehat{(}a, a', a'' \ldots), & (\alpha, \beta, \gamma \ldots)\widehat{(}b, b', b'' \ldots), & \ldots \\ (\alpha', \beta', \gamma' \ldots)\widehat{(}a, a', a'' \ldots), & (\alpha', \beta', \gamma' \ldots)\widehat{(}b, b', b'' \ldots), & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix}\right|$$

où $(\alpha, \beta, \gamma \ldots)\widehat{(}a, a', a'' \ldots) = \alpha a + \beta a' + \gamma a'' + \cdots$ Il faut faire attention dans la composition des matrices, de combiner les ***lignes*** de la matrice à gauche avec les ***colonnes*** de la matrice à droite, pour former les ***lignes*** de la matrice composée. Il y aurait bien des choses à dire sur cette théorie des matrices, laquelle doit, il me semble, précéder la théorie des ***Déterminants***.

Une notation semblable peut être employée dans la théorie des fonctions ***quadratiques***. En effet, on peut dénoter par

$$\left|\begin{matrix} \alpha, & \beta, & \gamma & \ldots \\ \alpha', & \beta', & \gamma' & \ldots \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'' & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix}\right| \widehat{(}\xi, \eta, \zeta)\widehat{(}x, y, z)$$

la fonction ***lineo-linéaire***

$$\begin{aligned} &(\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta \ldots)x \\ +&(\alpha'\xi + \beta'\eta + \gamma'\zeta \ldots)y \\ +&(\alpha''\xi + \beta''\eta + \gamma''\zeta \ldots)z \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

et delà par

$$\left|\begin{matrix} a, & h, & g & \ldots \\ h, & b, & f & \ldots \\ g, & f, & c & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix}\right| \widehat{(}x, y, z \ldots)^2$$

la fonction ***quadratique***

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy \ldots$$

que je représente aussi par

$$(a, b, c \ldots f, g, h \ldots)\widehat{(}x, y, z \ldots)^2.$$

Je remarque qu'en général je représente une fonction rationnelle et intégrale, homogène et des *degrés* m, m', etc. par rapport aux indéterminés x, y, etc., x', y', etc. de la manière suivante:

$$(\lozenge)\widehat{(x, y\,..)}^{m}(x', y'\,...)^{m'}\,...)$$

Une fonction rationnelle et intégrale, homogène et du degré m par rapport aux deux indéterminés x, y sera donc représentée par

$$(\lozenge)\widehat{(x, y)}^{m}.$$

En introduisant dans cette notation les *coefficients*, j'écris par ex.

$$(a, b, c, d)\widehat{(x, y)}^{3}$$

pour représenter la fonction

$$ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3,$$

tandis que je me sers de la notation

$$(a, b, c, d)\underset{\smile}{(x, y)}^{3}$$

pour représenter la fonction

$$ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3,$$

et de même pour les fonctions d'un degré quelconque. J'ai trouvé cette distinction très commode.

No. 4.

Note sur les covariants d'une fonction quadratique, cubique, ou biquadratique à deux indéterminées.

La théorie d'une fonction à deux indéterminées d'un degré quelconque, par ex.

$$(\lozenge)\widehat{(x, y)}^{m}$$

dépend du système des *covariants* de la fonction, qui est censé de contenir la fonction elle même.

Pour une fonction *quadratique* le système de covariants est

$$(a, b, c)\widehat{(x, y)}^{2},$$
$$ac - b^2.$$

Pour la fonction ***cubique***, le système est

$$(a, b, c, d)\widehat{(x, y)^3},$$

$$(ac - b^2, ad - bc, bd - c^2)\underbrace{(x, y)^2},$$

$$-a^2d + 3abc - 2b^3,\ -abd + 2ac^2 - b^2c,\ acd - 2b^2d + bc^2,\ ad^2 - 3bcd + 2c^3)\widehat{(x, y)^3},$$

$$-a^2d^2 + 6abcd - 4ac^3 - 4b^3d + 3b^2c^2.$$

Ces fonctions qui, en supposant qu'on les représente par U, H, Φ, $\square$, satisfont identiquement à l'équation

$$\Phi^2 + \square U^2 = -4H^3.$$

Pour la fonction ***biquadratique***, le système est

$$(a, b, c, d, e)\widehat{(x, y)^4},$$

$$ae - 4bd + 3c^2,$$

$$(ac - b^2, 2ad - 2bc, ae + 2bd - 3c^2, 2be - 2cd, ce - d^2)\underbrace{(x, y)^4},$$

$$ace + 2bcd - ad^2 - b^2e - c^3,$$

$$\left.\begin{array}{l} -a^2d + 3abc - 2b^3, \\ -a^2e - 2abd + 9ac^2 - 6b^2c, \\ -5abe + 15acd - 10b^2d, \\ +10a^2d - 10b^2e, \\ +5ade + 10bd^2 - 15bce, \\ +ae^2 + 2bde - 9c^2e + 6cd^2, \\ +be^2 - 3cde + 2d^3, \end{array}\right\}\underbrace{(x, y)^6},$$

et ces fonctions, en supposant qu'on les représente par U, I, H, J, Φ, satisfont identiquement à l'équation

$$JU^3 - IU^2H + 4H^3 = -\Phi^2.$$

J'ajoute à ce système la fonction

$$\begin{aligned} I^3 - 27J^2 = {} & a^3e^3 - 12a^2bde^2 - 18a^2c^2e^2 + 54a^2cd^2e - 27a^2d^4 \\ & + 54ab^2ce^2 - 6ab^2d^2e - 180abc^2de + 108abcd^3 + 81ac^4e \\ & - 54ac^3d^2 - 27b^4e^2 - 64b^3d^3 + 108b^3cde - 54b^2c^3e \\ & + 36b^2c^2d^2, \end{aligned}$$

qui est le ***discriminant*** de la fonction biquadratique.

Pour donner une application de ces formules, soit proposé de resoudre une équation quadratique, cubique ou biquadratique, ou autrement dit: de trouver un ***facteur linéaire*** de la fonction quadratique, cubique ou biquadratique.

Il est assez singulier que pour la fonction quadratique la solution est en quelque sorte plus compliquée que pour les deux autres. En effet, il n'existe pas de solution symétrique, à moins qu'on n'introduise des quantités arbitraires et superflues; savoir, on trouve pour facteur linéaire de $(a, b, c\widehat{)}(x, y)^2$ l'expression

$$(a, b, c\widehat{)}(\alpha, \beta\widehat{)}(x, y) + \sqrt{-\square}(\beta x - \alpha y),$$

où $(a, b, c\widehat{)}(\alpha, \beta\widehat{)}(x, y)$ dénote $a\alpha x + b(\alpha y + \beta x) + c\beta y$.

Pour la fonction *cubique*, l'équation $\Phi^2 + \square U^2 = -4H^3$ fait voir que les deux fonctions $\Phi + U\sqrt{-\square}$, $\Phi - U\sqrt{-\square}$ sont l'une et l'autre des cubes parfaits. L'expression

$$\sqrt[3]{(\tfrac{1}{2}(\Phi + U\sqrt{-\square}))} - \sqrt[3]{(\tfrac{1}{2}(\Phi - U\sqrt{-\square}))}$$

sera donc une fonction linéaire de x, y; et puisque cette fonction s'évanouit pour $U = 0$, elle ne sera autre chose que l'un des facteurs linéaires de $(a, b, c, d\widehat{)}(x, y)^3$.

Pour la fonction *biquadratique*, en partant de l'équation

$$JU^3 - IU^2H + 4H^3 = -\Phi^2,$$

j'écris

$$M = \frac{I^3}{4J^2},$$

et je mets l'équation sous la forme

$$(1, 0, -M, M)\widetilde{(IH, JU)}^3 = -\tfrac{1}{4}I^3\Phi^2.$$

Donc, en supposant que ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3 soient les racines de l'équation

$$(1, 0, -M, M)\widetilde{(\varpi, 1)}^3 = 0,$$

ou plus simplement de l'équation

$$\varpi^3 - M(\varpi - 1) = 0,$$

ces expressions $IH - \varpi_1 JU$, $IH - \varpi_2 JU$, $IH - \varpi_3 JU$ seront toutes trois des carrés de fonctions quadratiques. L'expression

$$(\varpi_2 - \varpi_3)\sqrt{(IH - \varpi_1 JU)} + (\varpi_3 - \varpi_1)\sqrt{(IH - \varpi_2 JU)} + (\varpi_1 - \varpi_2)\sqrt{(IH - \varpi_3 JU)}$$

sera donc une fonction quadratique, et on voit sans peine qu'elle sera le carré d'une fonction *linéaire*. Or cette expression s'évanouit pour $U = 0$; donc ce sera précisément le carré de l'un quelconque des facteurs linéaires de $(a, b, c, d, e\widehat{)}(x, y)^4$. L'équation identique pour les covariants d'une fonction biquadratique donne lieu aussi (remarque que je dois à M. *Hermite*) à une transformation très élégante de *l'intégrale elliptique* $\int dx \div \sqrt{(a, b, c, d, e\widehat{)}(x, 1)^4}$.

No. 5.

Sur la transformation d'une fonction quadratique en elle même par des substitutions linéaires.

Il s'agit de trouver les transformations linéaires d'une fonction quadratique $(\Diamond)\widehat{(x, y, z \ldots)^2}$ ***en elle même,*** c'est à dire de trouver pour $(x, y, z \ldots)$ des fonctions linéaires de $x, y, z, \ldots$ telles que

$$(\Diamond)\widehat{(x, y, z \ldots)^2} = (\Diamond)\widehat{(x, y, z \ldots)^2}.$$

En représentant la fonction quadratique par

$$(\Diamond)\widehat{(x, y, z \ldots)^2} = \begin{vmatrix} a, & h, & g & \ldots \\ h, & b, & f & \ldots \\ g, & f, & c & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} \widehat{(x, y, z \ldots)^2},$$

la solution qu'a donnée M. ***Hermite*** de ce problème peut être resumée dans la seule équation

$$(x, y, z \ldots) =$$

$$\left(\begin{vmatrix} a, h, g \ldots \\ h, b, f \ldots \\ g, f, c \ldots \\ \ldots \end{vmatrix}^{-1} \begin{vmatrix} a, & h-\nu, & g+\mu \ldots \\ h+\nu, & b, & f-\lambda \ldots \\ g-\mu, & f+\lambda, & c \ \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a, & h+\nu, & g-\mu \ldots \\ h-\nu, & b, & f+\lambda \ldots \\ g+\mu, & f-\lambda, & c \ \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}^{-1} \begin{vmatrix} a, h, g \ldots \\ h, b, f \ldots \\ g, f, c \ldots \\ \ldots \end{vmatrix}\right) \widehat{(x, y, z \ldots)},$$

où $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ sont des quantités quelconques.

En effet, pour démontrer que celà est une solution, on n'a qu'à reproduire dans un ordre inverse le procédé de M. ***Hermite.*** En introduisant les quantités auxiliaires $(\xi, \eta, \zeta \ldots)$, on peut remplacer l'équation par les deux équations

$$\begin{vmatrix} a, h, g \ldots \\ h, b, f \ldots \\ g, f, c \ldots \\ \ldots \end{vmatrix} \widehat{(x, y, z \ldots)} = \begin{vmatrix} a, & h+\nu, & g-\mu \ldots \\ h-\nu, & b, & f+\lambda \ldots \\ g+\mu, & f-\lambda, & c \ \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} \widehat{(\xi, \eta, \zeta \ldots)}$$

$$\begin{vmatrix} a, h, g \ldots \\ h, b, f \ldots \\ g, f, c \ldots \\ \ldots \end{vmatrix} \widehat{(x, y, z \ldots)} = \begin{vmatrix} a, & h-\nu, & g+\mu \ldots \\ h+\nu, & b, & f-\lambda \ldots \\ g-\mu, & f+\lambda, & c \ \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} \widehat{(\xi, \eta, \zeta \ldots)}$$

qui donnent tout de suite d'abord

$$(\lozenge)\widehat{(}x, y, z \ldots)\widehat{(}\xi, \eta, \zeta \ldots) = (\lozenge)\widehat{(}\xi, \eta, \zeta \ldots)^2,$$

et puis

$$x + \mathrm{x} = 2\xi, \quad y + \mathrm{y} = 2\eta, \quad z + \mathrm{z} = 2\zeta, \text{ etc.}$$

On obtient par là:

$$\begin{aligned}(\lozenge)\widehat{(}\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z} \ldots)^2 &= (\lozenge)\widehat{(}2\xi - \mathrm{x}, 2\eta - \mathrm{y}, 2\zeta - \mathrm{z}, \ldots)^2 \\ &= 4(\lozenge)\widehat{(}\xi, \eta, \zeta \ldots)^2 - 4(\lozenge)\widehat{(}\xi, \eta, \zeta \ldots)\widehat{(}x, y, z \ldots) \\ &\quad + (\lozenge)\widehat{(}x, y, z \ldots)^2,\end{aligned}$$

c'est à dire l'équation

$$(\lozenge)\widehat{(}\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z} \ldots)^2 = (\lozenge)\widehat{(}x, y, z \ldots)^2,$$

qu'il s'agissait de vérifier.

Je remarque que la transformation est toujours *propre*. En effet, le déterminant de transformation est

$$\left|\begin{matrix} a, & h, & g \ldots \\ h, & b, & f \ldots \\ g, & f, & c \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix}\right|^{-1} \left|\begin{matrix} a, & h-\nu, & g+\mu \ldots \\ h+\nu, & b, & f-\lambda \ldots \\ g-\mu, & f+\lambda, & c \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} a, & h+\nu, & g-\mu \ldots \\ h-\nu, & b, & f+\lambda \ldots \\ g+\mu, & f-\lambda, & c \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix}\right|^{-1} \left|\begin{matrix} a, & h, & g \ldots \\ h, & b, & f \ldots \\ g, & f, & c \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix}\right|$$

Or les déterminants qui entrent dans les deux termes moyens, ne contiennent l'un ou l'autre que les puissances *paires* de $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ Donc ces deux déterminants sont égaux, et les quatre termes du produit sont *réciproques* deux à deux; le déterminant de transformation est donc $+1$, et la transformation est juste.

Pour obtenir une transformation *impropre*, il faut considérer une fonction quadratique qui contient outre les indéterminés $x, y, z, \ldots$ une indéterminée θ, et puis réduire à zéro les coefficients de tous les termes dans lesquels entre cette indéterminée θ. Les valeurs de $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \ldots$ ne contiendront pas θ, et en représentant par ϑ l'indéterminée, il faut l'ajouter à la suite $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \ldots$ La valeur de ϑ sera, comme on voit sans peine, $\vartheta = -\theta$; le déterminant de transformation pour la forme aux indéterminées $x, y, z, \ldots \theta$ sera $+1$, et ce déterminant sera le produit du déterminant de transformation pour la forme aux indéterminées $x, y, z, \ldots$ multiplié par -1. Le déterminant de transformation pour la forme aux indéterminées $x, y, z, \ldots$ sera donc -1, c'est à dire, la transformation sera *impropre*.

Au lieu de la formule de transformation ci-dessus, on peut se servir des formules

$$(\xi, \eta, \zeta \ldots) = \left(\begin{vmatrix} a & h+\nu, & g-\mu & \ldots \\ h-\nu, & b, & f+\lambda & \ldots \\ g+\mu, & f-\lambda, & c & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}^{-1} \begin{vmatrix} a, & h, & g & \ldots \\ h, & b, & f & \ldots \\ g, & f, & c & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \end{vmatrix}\right)\widehat{(x, y, z \ldots)}$$

$$\mathrm{x} = 2\xi - x, \quad \mathrm{y} = 2\eta - y, \quad \mathrm{z} = 2\zeta - z, \quad \ldots$$

Par exemple, en supposant que la forme à transformer soit

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + \text{etc.},$$

on aura

$$(\xi, \eta, \zeta \ldots) = \left(\begin{vmatrix} a, & \nu, & -\mu & \ldots \\ -\nu, & b, & \lambda & \ldots \\ \mu, & -\lambda, & c & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}^{-1}\right)\widehat{(ax, by, cz \ldots)}$$

$$\mathrm{x} = 2\xi - x, \quad \mathrm{y} = 2\eta - y, \quad \mathrm{z} = 2\zeta - z, \text{ etc.}$$

de manière qu'en posant

$$\begin{vmatrix} a, & \nu, & -\mu & \ldots \\ -\nu, & b, & \lambda & \ldots \\ \mu, & -\lambda, & c & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end| = k$$

$$\begin{vmatrix} a, & \nu, & -\mu & \ldots \\ -\nu, & b, & \lambda & \ldots \\ \mu, & -\lambda, & c & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}^{-1} = \frac{1}{k} \begin{vmatrix} A, & B, & C & \ldots \\ A', & B', & C' & \ldots \\ A'', & B'', & C'' & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

on aura

$$(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z} \ldots) = \frac{1}{k} \begin{vmatrix} 2A - \frac{k}{a}, & 2B, & 2C & \ldots \\ 2A', & 2B' - \frac{k}{b}, & 2C' & \ldots \\ 2A'', & 2B'', & 2C'' - \frac{k}{c} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} \widehat{(ax, by, cz \ldots)},$$

ce qui est l'équation pour la transformation en elle même, propre à la fonction $ax^2 + by^2 + cz^2 + \text{etc.}$ On en déduira, comme dans le cas général, la formule

pour la transformation impropre. On trouvera des observations sur cette formule dans le mémoire „Recherches ultérieures sur les déterminants gauches."

Je reviens à l'équation générale

$$(\lozenge)\widehat{(}\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}\ldots)^2 = (\lozenge)\widehat{(}x, y, z\ldots)^2$$

et je suppose seulement que x, y, z, ... soient des fonctions linéaires de x, y, z, ... qui satisfont à cette équation sans ne contenir rien d'avantage par rapport à la forme de la solution. Celà étant, je forme les fonctions linéaires $\mathrm{x} - sx$, $\mathrm{y} - sy$, $\mathrm{z} - sz$, etc. où s est une quantité quelconque, et je considère la fonction

$$(\lozenge)\widehat{(}\mathrm{x} - sx, \mathrm{y} - sy, \mathrm{z} - sz\ldots)^2,$$

laquelle, en la développant, devient

$$(1 + s^2)(\lozenge)\widehat{(}x, y, z\ldots)^2 - 2s(\lozenge)\widehat{(}x, y, z\ldots)\widehat{(}\xi, \eta, \zeta\ldots).$$

Et en développant de la même manière la fonction quadratique

$$(\lozenge)\widehat{\left(}\mathrm{x} - \frac{1}{s}x, \mathrm{y} - \frac{1}{s}y, \mathrm{z} - \frac{1}{s}z, \ldots\right)^2,$$

on obtient l'équation identique

$$(\lozenge)(\mathrm{x} - sx, \mathrm{y} - sy, \mathrm{z} - sz, \ldots)^2 = s^2.(\lozenge)\widehat{\left(}\mathrm{x} - \frac{1}{s}x, \mathrm{y} - \frac{1}{s}y, \mathrm{z} - \frac{1}{s}z, \ldots\right)^2.$$

Soit $\square$ le déterminant formé avec les coefficients des fonctions linéaires $\mathrm{x} - sx$, $\mathrm{y} - sy$, $\mathrm{z} - sz$, etc. En supposant que le nombre des indéterminées x, y, z, etc. est n, $\square$ sera évidemment une fonction rationnelle et intégrale du degré n par rapport à (s). Soit de même $\square'$ le déterminant formé avec les coefficients de $\mathrm{x} - \frac{1}{s}x$, $\mathrm{y} - \frac{1}{s}y$, $\mathrm{z} - \frac{1}{s}z$, etc., l'équation qui vient d'être trouvée, donne $\square^2 = s^{2n}\square'^2$, c'est à dire $\square = \pm s^n \square'$. Cela fait voir que les coefficients du premier et du dernier terme du second, et de l'avant-dernier terme etc. sont égaux, aux signe près. De plus, le coefficient de la plus haute puissance s^n est toujours ± 1, et on voit sans peine qu'en supposant d'abord que n soit *impair*, on a pour la transformation *propre:*

$$\square = (1, P, \ldots P, 1)\widehat{(}-s, 1)^n$$

et pour la transformation *impropre*

$$\square = (1, -P, \ldots P, -1)\widehat{(}-s, 1)^n:$$

équation qui peut être changée en celle-ci: $\square = -(1, P, \ldots P, 1)\widehat{(}s, 1)^n$. Puis,

en supposant que n soit ***pair,*** on a pour la transformation ***propre:***

$$\square = (1, P, \ldots P, 1)\widehat{(}-s, 1)^n$$

et pour la transformation ***impropre:***

$$\square = (1, -P, \ldots P, -1)\widehat{(}-s, 1)^n,$$

le coefficient moyen étant dans ce cas égal à zéro. Ces théorèmes pour la forme du déterminant des fonctions linéaires $x - sx$, $y - sy$, $z - sz$, ... sont dûs à M. ***Hermite.***

Il y a à remarquer que la forme $(\Diamond)\widehat{(}x, y, z \ldots)^2$ est tout à fait indéterminée; c'est à dire, on suppose seulement que x, y, z, ... soient des fonctions linéaires de x, y, z, ..., telles qu'il y ait une forme quadratique $(\Diamond)\widehat{(}x, y, z, \ldots)^2$ pour laquelle l'équation $(\Diamond)\widehat{(}x, y, z \ldots)^2 = (\Diamond)\widehat{(}x, y, z \ldots)^2$ est satisfaite.

Je regarde d'un autre point de vue ce problème de la transformation en elle même, d'une fonction quadratique par des substitutions linéaires. Je suppose que x, y, z, etc. soient des fonctions linéaires données de x, y, z, ... et je cherche une fonction linéaire de x, y, z, etc. qui, par la substitution de x, y, z, etc. au lieu de x, y, z, etc. se transforme en elle même; à un facteur près. Soit $(l, m, n \ldots)\widehat{(}x, y, z \ldots)$ cette fonction linéaire, il faut que $(l, m, n \ldots)\widehat{(}x, y, z \ldots)$ soit identiquement $= s.(l, m, n \ldots)\widehat{(}x, y, z \ldots)$, ou, ce qui est la même chose, que $(l, m, n \ldots)\widehat{(}x - sx, y - sy, z - sz)$ soit $= 0$; c'est à dire, les quantités l, m, n, ... seront déterminées par autant d'équations linéaires dont les coefficients sont précisément ceux de $x - sx$, $y - sy$, $z - sz$, etc.; donc s sera déterminé si l'on rend égal à zéro le déterminant formé avec ces coefficients, et l, m, n, etc. se trouveront donnés rationnellement en termes de s. Celà étant, je suppose que les racines de l'équation en s soient a, b, c, ..., et ces différentes racines corresponderont aux fonctions linéaires x_a, x_b, x_c, ... qui ont la propriété dont il s'agit. Soit $(\Diamond)\widehat{(}x, y, z \ldots)^2$ une fonction quadratique qui se transforme en elle même par la substitution de x, y, z, etc. au lieu de x, y, z, etc. Cette fonction peut être exprimée en fonction quadratique de x_a, x_b, x_c, etc.; quantités qui, en substituant x, y, z, etc. au lieu de x, y, z, ... deviennent ax_a, bx_b, cx_c, ...

Je prends les cas d'une fonction ***binaire, ternaire*** etc., et d'abord le cas d'une fonction ***binaire.***

En écrivant $(\Diamond)\widehat{(}xy)^2 = (A, B, C)\widehat{(}x_a, x_b)^2$, on doit obtenir identiquement $(A, B, C)\widehat{(}ax_a, bx_b)^2 = (A, B, C)\widehat{(}x_a, x_b)^2$, c'est à dire $A(a^2 - 1) = 0$,

$B(ab-1)=0$, $C(b^2-1)=0$. Or la solution $A=B=C=0$ ne signifiant rien, on ne peut satisfaire à ces équations sans supposer des relations entre les quantités a, b; et pour obtenir une solution dans laquelle la fonction quadratique ne se réduit à un carré, il faut supposer, ou $ab-1=0$, ou $a^2-1=0$ et $b^2-1=0$. Le premier cas est celui de la transformation *propre*. Il donne

$$ab=1, \quad (\Diamond)\widehat{(x,y)^2} = l\mathrm{x}_a\mathrm{x}_b.$$

Le second cas est celui de la transformation *impropre*. Il donne

$$a=+1,\ b=-1, \quad (\Diamond)\widehat{(x,y)^2} = l\mathrm{x}_a^2 + m\mathrm{x}_b^2.$$

En passant au cas d'une fonction *ternaire*, soit

$$(\Diamond)\widehat{(x,y,z)^2} = (A,B,C,F,G,H)\widehat{(\mathrm{x}_a,\mathrm{x}_b,\mathrm{x}_c)^2}.$$

On doit avoir identiquement

$$(A,B,C,F,G,H)(a\mathrm{x}_a, b\mathrm{x}_b, c\mathrm{x}_c)^2 = (A,B,C,F,G,H)\widehat{(\mathrm{x}_a,\mathrm{x}_b,\mathrm{x}_c)^2},$$

c'est à dire $A(a^2-1)=0$, $B(b^2-1)=0$, $C(c^2-1)=0$, $F(bc-1)=0$, $G(ca-1)=0$, $H(ab-1)=0$, et on voit que pour obtenir une solution dans laquelle la fonction quadratique ne se réduit pas à un carré, ou à une fonction de deux indéterminés, il faut supposer par ex. $a^2-1=0$, $bc-1=0$. On a donc dans le cas d'une fonction ternaire:

$$a^2=1, \quad bc=1, \quad (\Diamond)\widehat{(x,y,z)^2} = l\mathrm{x}_a^2 + m\mathrm{x}_b\mathrm{x}_c.$$

La transformation sera *propre*, ou *impropre*, selon que $a=+1$ ou $a=-1$.

Dans le cas d'une fonction *quaternaire*, on obtient pour la transformation *propre:*

$$ab=cd=1, \quad (\Diamond)\widehat{(x,y,z,w)^2} = l\mathrm{x}_a\mathrm{x}_b + m\mathrm{x}_c\mathrm{x}_d,$$

et pour la transformation *impropre:*

$$a=+1,\ b=-1,\ cd=1, \quad (\Diamond)\widehat{(x,y,z,w)^2} = l\mathrm{x}_a^2 + m\mathrm{x}_b^2 + n\mathrm{x}_c\mathrm{x}_d.$$

Dans le cas d'une fonction *quinaire* on obtient

$$a^2=1,\ bc=de=1, \quad (\Diamond)\widehat{(x,y,z,w,t)^2} = l\mathrm{x}_a^2 + m\mathrm{x}_b\mathrm{x}_c + n\mathrm{x}_d\mathrm{x}_e$$

et la transformation est propre ou impropre, selon que $a=+1$ ou $a=-1$; et ainsi de suite.

Cette méthode a des difficultés dans le cas où l'équation en (s) a des racines *égales*. Je n'entre pas ici dans ce sujet.

Dans les formules qu'on vient de trouver, on peut considérer les coefficients l, m etc. comme des quantités ***arbitraires***. Mais en supposant que la fonction quadratique soit ***donnée***, ces coefficients deviennent ***déterminés***. On les trouvera par la formule suivante que je ne m'arrête pas à ***démontrer***.

Soient α, β, γ etc. les coefficients de la fonction linéaire x_a, α', β', γ', etc. les coefficients de la fonction linéaire x_b, et ainsi de suite; alors, dans les différentes formules qui viennent d'être données, le coefficient d'un terme x_a^2 à droite sera

$$\frac{-k}{(\dagger)\widehat{(}\alpha, \beta, \gamma \ldots)},$$

et le coefficient d'une terme $x_a x_b$ à gauche sera

$$\frac{-k}{(\dagger)\widehat{(}\alpha, \beta, \gamma \ldots)\widehat{(}\alpha', \beta', \gamma' \ldots)},$$

où k dénote le ***discriminant*** de la fonction quadratique à gauche, et où les coefficients des fonctions quadratiques des dénominateurs sont les coefficients inverses de cette même fonction quadratique à gauche *).

L'application de la méthode à la forme binaire $(a, b, c)\widehat{(}x, y)^2$ donne lieu aux developpements suivants.

J'écris $x = \alpha x + \beta y$, $y = \gamma x + \delta y$ et je représente par $(l, m)\widehat{(}x, y)$ une fonction linéaire qui par cette substitution est transformée en ***elle même***, au facteur s près. Nous aurons donc

$$(l, m)\widehat{(}\alpha x + \beta x, \gamma x + \delta y) = s(l, m)\widehat{(}x, y).$$

L'équation pour (s) sera

$$s^2 - s(\delta + \alpha) + \alpha\delta - \beta\gamma = 0.$$

Cette équation peut aussi être écrite comme suit:

$$(1, -\delta - \alpha, \alpha\delta - \beta\gamma)\underset{\smile}{(}s, 1)^2 = 0.$$

Soient s', s'' les racines de cette équation. (Il n'est à peine nécessaire de remarquer que s', s'', et plus bas P, Q, sont ici ce que dans les formules générales j'ai représenté par a, b et x_a, x_b. De même les équations $\varrho = s's''$, $\varrho = s'^2$, $\varrho = s''^2$ obtenues après, correspondent aux équations $ab = 1$, $a^2 = 1$,

*) Je profite de cette occasion pour remarquer concernant ces recherches que les formules données dans la note sur les fonctions du second ordre (t. 38. p. 105) pour les cas de trois et de quatre indéterminés, sont exactes, mais que je m'étais trompé dans la forme générale du théorème.

$b^2 = 1$.) On aura $s' + s'' = -\delta - \alpha$, $s's'' = \alpha\delta - \beta\gamma$, et les coefficients l, m seront déterminés rationnellement par s. Mais on peut aussi déterminer ces coefficients par l'équation

$$l : m = l\alpha + m\gamma : l\beta + m\delta,$$

qui peut être écrite sous la forme

$$(\beta, \delta - \alpha, -\gamma)\underset{\smile}{(}l, m)^2 = 0,$$

et en éliminant entre cette équation et l'équation $lx + my = 0$ les quantités l, m, on voit que les fonctions linéaires $lx + my$ sont les facteurs de la fonction quadratique $(\beta, \delta - \alpha, -\gamma)\underset{\smile}{(}y, -x)^2$, ou, ce qui est la même chose, de la fonction quadratique

$$(\gamma, \delta - \alpha, -\beta)\widehat{(}x, y)^2.$$

Je représente ces facteurs par P, Q et je remarque encore que l'équation en (s) aura des racines égales si

$$(\delta - \alpha)^2 + 4\beta\gamma = 0,$$

et que dans ce cas, et *exclusivement* dans ce cas, les fonctions P, Q ne forment qu'une seule et même fonction linéaire.

Je suppose maintenant que la fonction $(a, b, c)\widehat{(}x, y)^2$ se transforme en elle même par la substitution $\alpha x + \beta y$, $\gamma x + \delta y$ au lieu de x, y, ou, ce qui est ici plus commode, je suppose que les deux fonctions sont égales, à un facteur près, et j'écris

$$(a, b, c)\widehat{(}\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y)^2 = \varrho(a, b, c)\widehat{(}x, y)^2.$$

En developpant cette équation, on obtient

$$\left.\begin{array}{llll} x^2(a, b, c)\widehat{(}\alpha^2 - \varrho, & 2\alpha\gamma, & \gamma^2) \\ +2xy(a, b, c)\widehat{(}\alpha\beta, & \alpha\delta + \beta\gamma - \varrho, & \gamma\delta) \\ + y^2(a, b, c)\widehat{(}\beta^2, & 2\beta\delta, & \delta^2) \end{array}\right\} = 0.$$

Voilà trois équations linéaires pour déterminer par les quantités α, β, γ, δ, considérées comme données, les coefficients (a, b, c) de la fonction quadratique. Les coefficients de ces équations linéaires sont

$$\begin{array}{lll} \alpha^2 - \varrho, & 2\alpha\gamma, & \gamma^2, \\ \alpha\beta, & \alpha\delta + \beta\gamma - \varrho, & \gamma\delta, \\ \beta^2, & 2\beta\delta, & \delta^2. \end{array}$$

Le système inverse par lequel on trouve les valeurs de a, b, c, est

$$\begin{array}{lll} \delta^2(\alpha\delta-\beta\gamma)-(\alpha\delta+\beta\gamma+\delta^2)\varrho+\varrho^2, & -\beta\delta(\alpha\delta-\beta\gamma)+\alpha\beta\varrho, & \\ -2\gamma\delta(\alpha\delta-\beta\gamma)+2\alpha\gamma\varrho, & \alpha^2\delta^2-\beta^2\gamma^2-(\delta^2+\alpha^2)\varrho+\varrho^2, & \\ \gamma^2(\alpha\delta-\beta\gamma)+\gamma^2\varrho, & -\alpha\gamma(\alpha\delta-\beta\gamma)+\gamma\delta\varrho, & \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \beta^2(\alpha\delta-\beta\gamma)-\beta^2\varrho, \\ -2\alpha\beta(\alpha\delta-\beta\gamma)+2\beta\delta\varrho, \\ \alpha^2(\alpha\delta-\beta\gamma)-(\alpha\delta+\beta\gamma+\alpha^2)\varrho+\varrho^2, \end{array}$$

et le déterminant, égalé à zéro, donne

$$(\alpha\delta-\beta\gamma-\varrho)\{(\alpha\delta-\beta\gamma+\varrho)^2-\varrho(\alpha+\delta)^2\}=0:$$

équation dont les racines sont

$$\varrho=\alpha\delta-\beta\gamma, \quad \varrho=\{\tfrac{1}{2}(\alpha+\delta)\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{((\alpha-\delta)^2+4\beta\gamma}\}^2.$$

En comparant ces valeurs avec celles de s', s'', on voit que les racines de l'équation en (ϱ) sont

$$\varrho=s's'', \quad \varrho=s'^2, \quad \varrho=s''^2,$$

et nous allons voir que ces valeurs de ϱ donnent en général les valeurs $\boldsymbol{PQ}$, $\boldsymbol{P}^2$, $\boldsymbol{Q}^2$, pour la fonction quadratique.

Soit d'abord $\varrho=\alpha\delta-\beta\gamma\ (=s's'')$, et posons pour abréger $\alpha\delta-\beta\gamma-\varrho=\varphi$, le système inverse devient:

$$\begin{array}{lll} (\delta^2-\varrho)\varphi-\beta\varrho.2\gamma, & -\beta\delta\varphi-\beta\varrho(\delta-\alpha), & \beta^2\varphi+\beta\varrho.2\beta, \\ -2\gamma\delta\varphi-\varrho(\delta-\alpha)2\gamma, & (\alpha\delta+\beta\gamma-\varrho)\varphi-\varrho(\delta-\alpha)^2, & -2\alpha\beta\varphi+\varrho(\delta-\alpha)2\beta, \\ -\gamma^2\varphi+\gamma\varrho.2\gamma, & -\alpha\gamma\varphi+\gamma\varrho(\delta-\alpha), & (\alpha^2-\varrho)\varphi-\gamma\varrho.2\beta, \end{array}$$

et en mettant $\varphi=0$, les termes de chaque ligne (en omettant un facteur) deviennent γ, $\frac{1}{2}(\delta-\alpha)$, β. On obtient ainsi dans ce cas, pour la fonction quadratique $(a, b, c)\widehat{(x, y)^2}$ la valeur

$$(\gamma, \delta-\alpha, -\beta)\widehat{(x, y)^2},$$

qui est en effet le produit $\boldsymbol{PQ}$ des fonctions linéaires.

Il y a à remarquer qu'en supposant $(\delta-\alpha)^2+4\beta\gamma=0$, ce qui est le cas pour lequel ϱ sera une racine *triple*, il n'y aura pas de changement à faire dans ce résultat. La fonction quadratique est, comme auparavant, le produit $\boldsymbol{PQ}$ des fonctions linéaires; seulement ces deux fonctions linéaires dans le cas actuel sont identiques, de manière que la fonction quadratique se réduit à $\boldsymbol{P}^2$.

Soit ensuite

$$\varrho=\{\tfrac{1}{2}(\alpha+\delta)\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{((\alpha-\delta)^2+4\beta\gamma)}\}^2 \ (=s'^2 \text{ ou } s''^2).$$

En écrivant $\varrho=s^2$ et en mettant pour abréger $\alpha\delta-\beta\gamma-s(\delta+\alpha)+s^2=\chi$,

le système inverse devient

$$\begin{array}{lll}(\delta^2+s^2)\chi+s(\delta-s)^2(\delta+\alpha), & -\beta\delta\chi-\beta s(\delta-s)(\delta+\alpha), & \\ -2\gamma\delta\chi-2\gamma s(\delta-s)(\delta+\alpha), & (s^2+s\overline{\delta+\alpha}+\alpha\delta+\beta\gamma)\chi+2\beta\gamma s(\delta+\alpha), & \\ \gamma^2\chi+\gamma^2 s(\delta+\alpha), & -\alpha\gamma\chi-\gamma s(\alpha-s)(\delta+\alpha), & \\ & \beta^2\chi+\beta^2 s(\delta+\alpha), & \\ & -2\alpha\beta\chi-2\beta s(\alpha-s)(\delta+\alpha), & \\ & (\alpha^2+s^2)\chi+s(\alpha-s)^2(\delta+\alpha). & \end{array}$$

Donc, en écrivant $\chi=0$ et en omettant le facteur $s(\delta+\alpha)$, le systéme inverse devient

$$\begin{array}{lll}(\delta-s)^2, & -\beta(\delta-s), & \beta^2, \\ \gamma(\delta-s), & \beta\gamma, & -\beta(\alpha-s), \\ \gamma^2, & -\gamma(\alpha-s), & (\alpha-s)^2, \end{array}$$

et les quantités dans chaque ligne sont dans le rapport $l^2 : lm : m^2$, de manière que la fonction quadratique est dans ce cas $\boldsymbol{P}^2$ ou $\boldsymbol{Q}^2$. Celà suppose que $\delta+\alpha$ ne soit égal à zéro. En faisant pour le moment $\varrho=1$, on en tire la conclusion qu'à moins de supposer $\delta+\alpha=0$, il n'existe pas de fonction quadratique binaire proprement dite (fonction non carrée) qui par la substitution ***impropre*** $\alpha x+\beta y$, $\gamma x+\delta y$ pour x, y, se transformât en elle même. L'équation $\delta+\alpha=0$ donne $\varrho=\alpha\delta-\beta\gamma$, qui est une racine double de l'équation cubique. On remarquera en passant que par rapport à la signification de l'équation $\delta+\alpha=0$, l'on a en général:

$$\begin{aligned}&(\alpha,\beta)\widehat{(}\alpha x+\beta y,\gamma x+\delta y):(\gamma,\delta)\widehat{(}\alpha x+\beta y,\gamma x+\delta y)\\ &=(\alpha^2+\beta\gamma)x+\beta(\delta+\alpha)y:\gamma(\delta+\alpha)x+(\delta^2+\beta\gamma)y,\end{aligned}$$

et de là, qu'en supposant $\delta+\alpha=0$, on a

$$(\alpha,\beta)\widehat{(}\alpha x+\beta y,\gamma x+\delta y):(\gamma,\delta)\widehat{(}\alpha x+\beta y,\gamma x+\delta y)=x,y.$$

Celà revient à dire qu'en faisant deux fois la substitntion $\alpha x+\beta y$, $\gamma x+\delta y$ au lieu de x, y, on retrouve les quantités x, y, ou que la substitution est ***périodique*** du second ordre. Il y a aussi à remarquer que dans le cas dont il s'agit, savoir pour $\delta+\alpha=0$, on a $s''=-s'$, et que les deux fonctions linéaires $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$ restent parfaitement déterminées.

Nous venons de voir qu'il n'existe pas de transformation impropre d'une fonction quadratique binaire proprement dite, à moins que $\delta+\alpha$ ne soit pas $=0$. Mais en supposant $\delta+\alpha=0$, on voit que les coefficients des équations pour a, b, c deviennent

$$\begin{matrix} -\beta\gamma, & -\gamma(\delta-\alpha), & \gamma^2, \\ \alpha\beta, & \alpha(\delta-\alpha), & -\alpha\gamma, \\ \beta^2, & \beta(\delta-\alpha), & \beta\gamma, \end{matrix}$$

c'est à dire: les coefficients de chaque équation sont dans le rapport de

$$\beta, \quad \delta-\alpha, \quad -\gamma,$$

de manière qu'en supposant que les coefficients a, b, c satisfont à la seule équation

$$(a, b, c\widehat{)}(\beta, \delta-\alpha, -\gamma),$$

où α, β, γ, δ sont des quantités quelconques, telles que $\delta+\alpha=0$, on aura

$$(a, b, c\widehat{)}(\alpha x+\beta y, \gamma x+\delta y)^2 = -(\alpha\delta-\beta\gamma)(a, b, c\widehat{)}(x, y)^2.$$

Ce n'est là qu'un cas particulier de l'équation identique

$$\begin{aligned}(a, b, c\widehat{)}(\alpha x+\beta y, \gamma x+\delta y)^2 &+ (\alpha\delta-\beta\gamma)(a, b, c\widehat{)}(x, y)^2 \\ &= (\delta+\alpha)(a\alpha+b\gamma, b\overline{\delta+\alpha}, b\beta+c\delta)\widetilde{(x, y)^2} \\ &+ (\beta, \delta-\alpha, -\gamma\widehat{)}(a, b, c)(\beta, \delta-\alpha, -\gamma)\widetilde{(y, -x)^2}.\end{aligned}$$

Il faut remarquer qu'en supposant toujours l'équation

$$(a, b, c\widehat{)}(\beta, \delta-\alpha, -\gamma) = 0,$$

la fonction quadratique $(a, b, c\widehat{)}(x, y)^2$ ***en supposant qu'elle se réduise à un carré***, est, comme auparavant, P^2 ou Q^2, c'est à dire le carré de l'une des fonctions linéaires. En effet: en écrivant $(a, b, c\widehat{)}(x, y)^2 = (lx+my)^2$, l'équation entre l, m serait évidemment $(\beta, \delta-\alpha, -\gamma)\widetilde{(l, m)^2} = 0$, de manière que l, m auraient les mêmes valeurs qu'auparavant. J'ajoute que tout ce qui précède par rapport à l'équation $(a, b, c\widehat{)}(\alpha x+\beta y, +\gamma x+\delta y)^2 = \varrho(a, b, c\widehat{)}(x, y)^2$ fait voir qu'à moins que la fonction quadratique ne soit un carré, on aura toujours $\varrho = \pm(\alpha\delta-\beta\gamma)$; ce qu'on savoit déjà dès le commencement, et ce qui peut être démontré comme à l'ordinaire, en égalant les discriminants $(ac-b^2)(\alpha\delta-\beta\gamma)^2$ et $(ac-b^2)\varrho^2$ des deux côtés. Je fais enfin $\varrho=1$, ce qui donne l'équation

$$(a, b, c\widehat{)}(\alpha x+\beta y, \gamma x+\delta y)^2 = (a, b, c\widehat{)}(x, y)^2,$$

et (en faisant abstraction du cas où la fonction quadratique est un carré) je tire de ce qui précède les résultats connus, savoir, que l'on a:

1. Pour la transformation propre:

$$\begin{aligned}\alpha\delta-\beta\gamma &= 1, \\ a:2b:c &= \gamma:\delta-\alpha:-\beta.\end{aligned}$$

2. Pour la transformation impropre:

$$\alpha\delta - \beta\gamma = -1,$$
$$\delta + \alpha = 0,$$
$$a\beta + b(\delta - \alpha) - c\gamma = 0.$$

Je crois que cette discussion n'ait été inutile pour compléter la théorie algébrique de la forme binaire $(a, b, c)\widehat{(x, y)^2}$.

No. 6.

Recherches ultérieures sur les déterminants gauches.

(Suite du mémoire t. 32. p. 119 et t. 38. p. 93.)

J'ai déjà donné une formule pour le développement d'un *déterminant gauche*. Supposant, pour fixer les idées, un cas particulier. Soit

$$\overline{12345|12345} = \begin{vmatrix} 11, & 12, & 13, & 14, & 15 \\ 21, & 22, & 23, & 24, & 25 \\ 31, & 32, & 33, & 34, & 35 \\ 41, & 42, & 43, & 44, & 45 \\ 51, & 52, & 53, & 54, & 55 \end{vmatrix}$$

(où $12 = -21$, etc., tandis que les quantités 11, 22, etc. ne s'évanouissent pas). Cette formule peut être écrite comme suit:

$$\begin{aligned} \overline{12345|12345} = {} & 11.22.33.44.55 \\ & +11.22.33.(45)^2 \\ & +11.22.44.(35)^2 \\ & +11.22.55.(34)^2 \\ & +11.33.44.(25)^2 \\ & +11.33.55.(24)^2 \\ & +11.44.55.(23)^2 \\ & +22.33.44.(15) \\ & +22.33.55.(14)^2 \\ & +22.44.55.(13)^2 \\ & +33.44.55.(12)^2 \\ & +11.(2345)^2 \\ & +22.(1345)^2 \\ & +33.(1245)^2 \\ & +44.(1235)^2 \\ & +55.(1234)^2 \end{aligned}$$

Les expressions 12, 1234, etc. à droite sont ici des ***Pfaffians***. On a

$$12 = 12,$$
$$1234 = 12.34 + 13.42 + 14.23$$

et en écrivant encore un terme, pour mieux présenter la loi:

$$\begin{aligned} 123456 = {} & 12.34.56 + 13.45.62 + 14.56.23 + 15.62.34 + 16.23.45 \\ & + 12.35.64 + 13.46.25 + 14.52.36 + 15.63.42 + 16.24.53 \\ & + 12.37.45 + 13.42.56 + 14.53.62 + 15.64.23 + 16.25.34. \end{aligned}$$

J'ai trouvé recemment une formule analogue pour le développement d'un ***déterminant gauche*** bordé, tel que

$$\overline{\alpha 1234 | \beta 1234} = \begin{vmatrix} \alpha\beta, & \alpha 1, & \alpha 2, & \alpha 3, & \alpha 4 \\ 1\beta, & 11, & 12, & 13, & 14 \\ 2\beta, & 21, & 22, & 23, & 24 \\ 3\beta, & 31, & 32, & 33, & 34 \\ 4\beta, & 41, & 42, & 43, & 44 \end{vmatrix}$$

Cette formule est:

$$\begin{aligned} \overline{\alpha 1234 | \beta 1234} = {} & \alpha\beta 11.22.33.44 \\ & + \alpha\beta 12.12.33.44 \\ & + \alpha\beta 13.13.22.44 \\ & + \alpha\beta 14.14.22.33 \\ & + \alpha\beta 23.23.11.44 \\ & + \alpha\beta 24.24.11.33 \\ & + \alpha\beta 34.34.11.22 \\ & + \alpha\beta 1234.1234 \\ & + \alpha 1.\beta 1.22.33.44 \\ & + \alpha 2.\beta 2.11.33.44 \\ & + \alpha 3.\beta 3.11.22.44 \\ & + \alpha 4.\beta 4.11.22.33 \\ & + \alpha 123.\beta 123.44 \\ & + \alpha 124.\beta 124.33 \\ & + \alpha 134.\beta 134.22 \\ & + \alpha 234.\beta 234.11. \end{aligned}$$

Il est à peine nécessaire de remarquer que dans les ***Pfaffians*** à droite, où entrent des symboles tels que 1α, $\beta 1$ etc., qui ne se trouvent pas dans le déterminant dont il s'agit, il faut écrire $1\alpha = -\alpha 1$, $\beta 1 = -1\beta$, etc. Le

symbole $\beta\alpha$ ne se trouve ni dans le déterminant, ni au côté droit. Cependant il convient de poser $\beta\alpha = -\alpha\beta$; car cela étant, il serait permis de transformer les ***Pfaffians***, en écrivant par exemple $\alpha\beta 12 = -\beta\alpha 12$.

Je remarque en passant que, si avant de poser l'équation $\beta\alpha = -\alpha\beta$, on suppose que les deux symboles α, β deviennent identiques (si par exemple on écrit $\alpha = \beta = 5$), on aurait par ex.

$$\alpha\beta.12 = \alpha\beta.12 + \alpha 1.2\beta + \alpha 2.\beta 1 = 55.12 + 51.25 + 52.51 = 55.12 \text{ etc.}$$

et on retrouverait ainsi la formule pour le développement de $\overline{12345|12345}$.

La nouvelle formule peut être appliquée immédiatement au développement des ***déterminants mineurs***. En effet, en se servant de la notation des ***matrices***, on aura

$$\begin{vmatrix} 11, & 12, & 13 \\ 21, & 22, & 23 \\ 31, & 32, & 33 \end{vmatrix}^{-1} = \frac{1}{\overline{123|123}} \begin{vmatrix} +\overline{23|23}, & -\overline{13|23}, & -\overline{12|32} \\ -\overline{23|13}, & +\overline{13|13}, & -\overline{21|31} \\ -\overline{32|12}, & -\overline{31|21}, & +\overline{12|12} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 11, & 12, & 13, & 14 \\ 21, & 22, & 23, & 24 \\ 31, & 32, & 33, & 34 \\ 41, & 42, & 43, & 44 \end{vmatrix}^{-1} =$$

$$\frac{1}{\overline{1234|1234}} \begin{vmatrix} +\overline{234|234}, & -\overline{134|234}, & -\overline{124|324}, & -\overline{123|423} \\ -\overline{234|134}, & +\overline{134|134}, & -\overline{214|314}, & -\overline{213|413} \\ -\overline{324|124}, & -\overline{314|214}, & +\overline{214|214}, & -\overline{312|412} \\ -\overline{423|123}, & -\overline{413|213}, & -\overline{412|312}, & +\overline{123|123} \end{vmatrix},$$

et ainsi de suite. On suppose toujours que chaque terme de la matrice à droite soit divisé par le dénominateur commun. On voit que les déterminants ***mineurs*** qui correspondent à des termes tels que $\alpha\alpha$, sont des déterminants ***gauches ordinaires***, avec le signe $+$, tandis que les déterminants mineurs, qui correspondent à des termes tels que $\alpha\beta$, sont des déterminants ***gauches bordés***, tels que $\overline{\beta\ldots|\alpha\ldots}$, avec le signe $(-)$.

Pour donner des exemples de vérification de ces formules, je remarque que l'on doit avoir

$$\begin{aligned}\overline{123|123} = {} & 11.\overline{23|23} \\ & -12.\overline{23|13} \\ & -13.\overline{32|12}:\end{aligned}$$

équation qui peut aussi être écrite sous la forme

$$\begin{aligned}\overline{123|123} = {} & 11.\overline{23|23} \\ & +21.\overline{23|13} \\ & +31.\overline{32|12}.\end{aligned}$$

En effet, en développant des deux côtés, on obtient:

$$\begin{aligned}11.22.33+11.(23)^2+22.(13)^2+33.(12)^2 = {} & 11.(22.33+(23)^2) \\ & +21.(21.33+23.13^{\dagger}) \\ & +31.(31.22+32.12^{\dagger}).\end{aligned}$$

On voit que les deux termes marqués par un † se détruisent et que l'équation est *identique*. On doit avoir de même,

$$\begin{aligned}\overline{1234|1234} = {} & 11.\overline{234|234} \\ & -12.\overline{234|134} \\ & -13.\overline{324|124} \\ & -14.\overline{423|123},\end{aligned}$$

ou, ce qui est la même chose:

$$\begin{aligned}\overline{1234|1234} = {} & 11.\overline{234|234} \\ & +21.\overline{234|134} \\ & +31.\overline{324|124} \\ & +41.\overline{423|123};\end{aligned}$$

c'est à dire, en développant des deux côtés:

$$\begin{aligned}11.22.33.44+11.22.(34)^2+11.33.(24)^2+11.44.(23)^2+22.33.(14)^2 \\ +22.44.(13)^2+33.44.(12)^2+(1234)^2 = \\ 11[22.33.44+22.(34)^2+33(42)^2+44.(23)^2] \\ +21[21.33.44+2134.34^*+23.13.44^{\dagger}+24.14.33^{\dagger}] \\ +31[31.22.44+3124.24^*+32.12.44^{\dagger}+34.14.22^{\dagger}] \\ +41[41.22.33+4123.23^*+42.12.33^{\dagger}+43.13.22^{\dagger}].\end{aligned}$$

Cette expression est en effet identique, comme on le voit en observant que les six termes marqués par un † se détruisent deux à deux, et que les trois termes marqués par un (*) sont ensemble équivalents à $(1234)^2$.

Je remarque que le nombre des termes du développement du déterminant gauche est toujours une *puissance de* **2**, et que de plus, ce nombre se réduit à la moitié, en réduisant à zéro un terme quelconque $\alpha\alpha$. Mais outre celà, le déterminant prend dans cette supposition la forme de déterminant d'un ordre inférieur de l'unité. Je considère par exemple le déterminant gauche $\overline{123|123}$. En y faisant $33=0$ et en accentuant, pour y mettre plus de clarté, tous les symboles, on trouve

$$\overline{123|123}' = 11'.(23')^2+22'.(13')^2.$$

De là, en écrivant

$$11=13'.11',\ 12=11'.23',$$
$$22=13'.22',$$

on obtient

$$\overline{12|12} = 11.22+(12)^2$$
$$= 11'.\{22'.(13')^2+11'.(23')^2\},$$

c'est à dire

$$\overline{12|12} = 11'.\overline{123|123}'.$$

On a de même

$$\overline{1234|1234}' = 11'.22'.(34')^2+11'.33'.(24')^2+22'33'(14')^2+(1234')^2$$

et delà, en écrivant

$$11=14'.11',\quad 12=11'.24',\quad 23=1234',$$
$$22=14'.22',\quad 13=11'.34',$$
$$33=14'.33',$$

on obtient

$$\overline{123|123} = 11.22.33+11.(23)^2+22.(31)^2+33(12)^2$$
$$= 11'.14'\{22'.33'.(14')^2+(1234')^2+11'.22'.(34')^2+11'.33'.(24')^2\},$$

c'est à dire,

$$\overline{123|123} = 11'.14'.\overline{1234|1234}'.$$

De même

$$\overline{12345|12345}' = 11'.22'.33'.(45')^2$$
$$+11'.22'.44'.(35')^2$$
$$+11'.33'.44'.(25')^2$$
$$+22'.33'.44'.(15')^2$$
$$+11'.(2345')^2$$
$$+22'.(1345')^2$$
$$+33'.(1245')^2$$
$$+44'.(1235')^2.$$

Or il est permis d'écrire

$$11 = 15'.11', \quad 12 = 11'.25', \quad 23 = 1235', \quad 1234 = 2345'.11'.15',$$
$$22 = 15'.22', \quad 13 = 11'.35', \quad 24 = 1245',$$
$$33 = 15'.33', \quad 14 = 11'.45', \quad 34 = 1345',$$
$$44 = 15'.44'.$$

En effet, les quantités à gauche ne sont liées entre elles que par la seule équation $1234 = 12.34 + 13.42 + 14.23$ qui est satisfaite identiquement par les valeurs à substituer pour les quantités qui y entrent. Celà étant, on trouve d'abord:

$$\overline{1234|1234} = 11'(15')^2 \overline{12345|12345}'.$$

Je prends encore un exemple. On a

$$\begin{aligned}\overline{123456|123456}' = {} & 11'.22'.33'.44'(56')^2 \\ & + 11'.22'.33'.55'.(46')^2 \\ & + 11'.22'.44'.55'.(36')^2 \\ & + 11'.33'.44'.55'.(26')^2 \\ & + 22'.33'.44'.55'.(16')^2 \\ & + 11'.22'.(3456')^2 \\ & + 11'.33'.(2456')^2 \\ & + 11'.44'.(2356')^2 \\ & + 11'.55'.(2346')^2 \\ & + 22'.33'.(1456')^2 \\ & + 22'.44'.(1356')^2 \\ & + 22'.55'.(1346')^2 \\ & + 33'.44'.(1256')^2 \\ & + 33'.55'.(1246')^2 \\ & + 44'.55'.(1236')^2 \\ & + (123456')^2.\end{aligned}$$

Ici, il est permis d'écrire:

$$11 = 16'.11', \quad 12 = 11'.26', \quad 23 = 1236', \quad 34 = 1346', \quad 45 = 1456',$$
$$22 = 16'.22', \quad 13 = 11'.36', \quad 24 = 1246', \quad 35 = 1356',$$
$$33 = 16'.33', \quad 14 = 11'.46', \quad 25 = 1256',$$
$$44 = 16'.44', \quad 15 = 11'.56',$$
$$55 = 16'.55',$$

$$1234 = 2346'.11'.16', \quad 2345 = 123456'.16',$$
$$1235 = 2356'.11'.16',$$
$$1245 = 2456'.11'.16',$$
$$1345 = 3456'.11'.16.$$

Car les valeurs des quantités à gauche satisfont identiquement aux équations qui ont lieu entre ces mêmes quantités. Par ex. l'équation

$$1234 = 12.34 + 13.42 + 14.23$$

devient

$$\begin{aligned} 2346'.16' = {} & 26'.1346' \\ & + 63'.1246' \\ & + 46'.1236'. \end{aligned}$$

Or l'expression à droite devient, en développant:

$$\begin{aligned} & 26'(13'.46' + 14'.63' + 16'.34') \\ + & 63'(12'.46' + 14'.62' + 16'.24') \\ + & 46'(12'.36' + 13'.62' + 16'.23'), \end{aligned}$$

et les termes qui contiennent le facteur 16', donnent ensemble, 16'.2346', les autres termes se détruisent deux à deux. On obtient enfin, en effectuant la substitution:

$$\overline{12345|12345} = 11'.(16')^3 \overline{123456|123456}';$$

et ainsi de suite.

Je fais les mêmes substitutions dans les *matrices inverses*, en supprimant cependant la dernière ligne et la dernière colonne de chaque matrice. On trouve ainsi, en y ajoutant les équations ci-dessus, trouvées par rapport aux déterminants:

$$11'.\overline{123|123}' = \overline{12|12}$$

$$\frac{1}{13'.\overline{123|123}'} \begin{vmatrix} +\overline{23|23}', & -\overline{13|23}' \\ -\overline{23|13}', & +\overline{13|13}' \end{vmatrix} = \frac{1}{\overline{12|12}} \begin{vmatrix} -\overline{2|2} + \frac{\overline{12|12}}{11}, & -\overline{1|2} \\ +\overline{2|1}, & +\overline{1|1} \end{vmatrix}$$

$$11'.14'.\overline{1234|1234}' = \overline{123|123},$$

$$\frac{1}{14'.\overline{1234|1234}'} \begin{vmatrix} +\overline{234|234}, & -\overline{134|234}, & -\overline{124|324} \\ -\overline{234|124}, & +\overline{134|134}, & -\overline{214|314} \\ -\overline{324|124}, & -\overline{314|214}, & +\overline{124|124} \end{vmatrix} =$$

$$\frac{1}{\overline{123|123}}\begin{vmatrix} -\overline{23|23}+\dfrac{\overline{123|123}}{11}, & -\overline{13|23}, & -\overline{12|32} \\ +\overline{23|13}, & +\overline{13|13}, & -\overline{21|31} \\ +\overline{32|12}, & -\overline{31|21}, & +\overline{12|12} \end{vmatrix}$$

$$11'.(15')^2.\overline{12345|12345} = \overline{1234|1234}$$

$$\frac{1}{15'.\overline{12345|12345}'}\begin{vmatrix} +\overline{2345|2345}', & -\overline{1345|2345}', & -\overline{1245|3245}', & -\overline{1235|4235}' \\ -\overline{2345|1345}', & +\overline{1345|1345}', & -\overline{2145|3145}', & -\overline{2135|4135}' \\ -\overline{3245|1245}', & -\overline{3145|2145}', & +\overline{1245|1245}', & -\overline{3125|4125}' \\ -\overline{4235|1235}', & -\overline{4135|2135}', & -\overline{4125|3125}', & +\overline{1235|1235}' \end{vmatrix} =$$

$$\frac{1}{\overline{1234|1234}}\begin{vmatrix} -\overline{234|234}+\dfrac{\overline{1234|1234}}{11}, & -\overline{134|234}, & -\overline{124|324}, & -\overline{123|423} \\ +\overline{234|134}, & +\overline{134|134}, & -\overline{214|314}, & -\overline{213|413} \\ +\overline{324|124}, & -\overline{314|214}, & +\overline{124|124}, & -\overline{312|412} \\ +\overline{423|123}, & -\overline{413|213}, & -\overline{412|312}, & +\overline{123|123} \end{vmatrix},$$

et ainsi de suite.

Il est bon de changer un peu la forme de ces équations. On en déduit sans peine:

$$\frac{1}{13'.\overline{123|123}'}\begin{vmatrix} 2.\overline{23|23}'-\dfrac{\overline{123|123}'}{11}, & -2.\overline{13|23}' \\ -2.\overline{23|13}', & +2.\overline{13|13}'-\dfrac{\overline{123|123}'}{22} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\overline{12|12}}\begin{vmatrix} -2.\overline{2|2}+\dfrac{\overline{12|12}}{11}, & -2.\overline{1|2} \\ +2.\overline{2|1}, & +2.\overline{1|1}-\dfrac{\overline{12|12}}{22} \end{vmatrix}$$

$$\frac{1}{14'.\overline{1234|1234}'}\begin{vmatrix} 2.\overline{234|234}'-\dfrac{\overline{1234|1234}'}{11'}, & -2.\overline{134|234}', & -2.\overline{124|324}' \\ -2.\overline{234|134}', & 2.\overline{134|134}'-\dfrac{\overline{1234|1234}'}{22'}, & -2.\overline{214|314}' \\ -2.\overline{324|124}', & -2.\overline{314|214}', & 2.\overline{124|124}'-\dfrac{\overline{1234|1234}'}{33} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\overline{123|123}} \begin{vmatrix} -2.\overline{23|23} - \frac{\overline{123|123}}{11}, & -2.\overline{13|23}, & -2.\overline{12|32} \\ +2.\overline{23|13}, & +2.\overline{13|13} - \frac{\overline{123|123}}{22}, & -2.\overline{21|31} \\ +2.\overline{32|12}, & -2.\overline{31|21}, & +2.\overline{12|12} - \frac{\overline{123|123}}{33} \end{vmatrix}$$

et ainsi de suite.

Les formules que je viens de présenter, peuvent être appliquées aussitôt à la solution de la question suivante: „Trouver x_1, x_2, x_3, etc., fonctions linéaires de x_1, x_2, x_3, etc. telles que

$$11x_1^2 + 22x_2^2 + 33x_3^2 + \text{etc.} = 12x_1^2 + 22x_1^2 + 33x_3^2 + \text{etc.},"$$

c'est à dire: transformer une fonction quadratique $11x_1^2 + 22x_2^2 + 33x_3^2 +$ etc. ***en elle même*** par des substitutions linéaires. Il suffira d'écrire la solution pour le cas de trois indéterminées, car on satisfait identiquement à l'équation

$$11x_1^2 + 22x_2^2 + 33x_3^2 = 11x_1^2 + 22x_2^2 + 33x_3^2$$

en écrivant

$$(x_1, x_2, x_3) =$$

$$\frac{1}{\overline{123|123}} \begin{vmatrix} +2.\overline{23|23} - \frac{\overline{123|123}}{11}, & -2.\overline{13|23}, & -2.\overline{12|32} \\ -2.\overline{23|13}, & +2.\overline{13|13} - \frac{\overline{123|123}}{22}, & -2.\overline{21|31} \\ -2.\overline{32|12}, & -2.\overline{31|21}, & +2.\overline{12|12} - \frac{\overline{123|123}}{33} \end{vmatrix} \widehat{(11x_1, 22x_2, 33x_3)}$$

Voilà la transformation ***propre***. On en tire la transformation ***impropre*** de $11x_1^2 + 22x_2^2$ ***en elle même*** en écrivant $33 = 0$. Car, celà posé, les valeurs de x_1, x_2 ne contiennent pas x_3, et l'on n'a plus besoin de la valeur de x_3. On obtient ainsi la solution suivante. Savoir, on satisfait identiquement à l'équation

$$11'x_1^2 + 22'x_2^2 = 11'x_1^2 + 22'x_2^2$$

en écrivant

$$(x_1, x_2) = \frac{1}{\overline{123|123}'} \begin{vmatrix} 2.\overline{23|23}' - \frac{\overline{123|123}'}{11'}, & -2.\overline{13|23}' \\ -2.\overline{23|13}', & 2.\overline{13|13}' - \frac{\overline{123|123}'}{22'} \end{vmatrix} (11'x_1, 22'x_2),$$

ce qui est une transformation ***impropre***. Mais en y faisant la substitution $11 = 13'.11'$, $22 = 13'.22'$, $12 = 11'.23'$, on réduit la solution à celle-ci,

savoir on satisfait identiquement à l'équation $11x_1^2 + 22x_2^2 = 11x_1^2 + 22x_2^2$ en écrivant

$$(x_1, x_2) = \frac{1}{\overline{12|12}} \begin{vmatrix} -2.\overline{2|2} + \frac{\overline{12|12}}{11}, & -2.\overline{1|2} \\ +2.\overline{2|1}, & +2.\overline{1|1} - \frac{\overline{12|12}}{22} \end{vmatrix}\widehat{(11x_1, 22x_2)},$$

ce qui est une transformation *impropre,* qui correspond évidemment à la formule pour la transformation *propre;* la seule différence est que les signes des termes de la première colonne de la matrice en sont changés.

En introduisant des lettres simples a, b etc. à la place des symboles 11, 22 etc., je considère d'abord la transformation *propre*

$$ax^2 + by^2 = ax^2 + by^2.$$

Ici, en écrivant

$$\begin{vmatrix} 11, & 12 \\ 21, & 22 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a, & \nu \\ -\nu, & b \end{vmatrix},$$

la formule donne

$$(x, y) = \frac{1}{ab + \nu^2} \begin{vmatrix} ab - \nu^2, & -2\nu b \\ 2\nu a, & ab - \nu^2 \end{vmatrix}\widehat{(x, y)}.$$

La transformation *impropre*

$$ax^2 + by^2 = ax^2 + by^2$$

s'obtient au moyen de la formule donnée plus bas pour la transformation propre de la fonction $ax^2 + by^2 + cz^2$ *en elle même.* En y écrivant $c = 0$, on obtient

$$(x, y) = \frac{1}{a\lambda^2 + b\mu^2} \begin{vmatrix} a\lambda^2 - b\mu^2, & 2\lambda\mu b \\ 2\lambda\mu a, & -a\lambda^2 + b\mu^2 \end{vmatrix}\widehat{(x, y)}.$$

J'ai déjà fait voir de quelle manière cette formule se rattache à la formule pour la transformation *propre;* la différence entre les formes de ces transformations dans ce cas simple est assez frappante.

Pour obtenir la transformation propre

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = ax^2 + by^2 + cz^2,$$

j'écris

$$\begin{vmatrix} 11, & 12, & 13 \\ 21, & 22, & 22 \\ 31, & 32, & 32 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a, & \nu, & -\mu \\ -\nu, & b, & \lambda \\ \mu, & -\lambda, & c \end{vmatrix}$$

Cette formule donne

$$(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}) = \frac{1}{abc+a\lambda^2+b\mu^2+c\nu^2}$$

$$\times \left| \begin{array}{ccc} abc+a\lambda^2-b\mu^2-c\nu^2, & 2(\lambda\mu-c\nu)b, & 2(\nu\lambda+b\mu)c \\ 2(\lambda\mu+c\nu)a, & abc-a\lambda^2+b\mu^2-c\nu^2, & 2(\mu\nu-a\lambda)c \\ 2(\nu\lambda-b\mu)a, & 2(\mu\nu+a\lambda)b, & abc-a\lambda^2-b\mu^2-c\nu^2 \end{array} \right| \widehat{(x, y, z)}.$$

La transformation *impropre*

$$a\mathrm{x}^2+b\mathrm{y}^2+c\mathrm{z}^2 = ax^2+by^2+cz^2$$

peut être tirée de la transformation *propre en elle même* de la fonction donnée ci-après $ax^2+by^2+cz^2+dw^2$. En y écrivant $d=0$, on obtient

$$(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}) = \frac{1}{bc\varrho^2+ca\sigma^2+ab\tau^2+\varphi^2}$$

$$\times \left| \begin{array}{ccc} -bc\varrho^2+ca\sigma^2+ab\tau^2-\varphi^2, & -2b\tau\varphi-2bc\varrho\sigma, & 2c\sigma\varphi-2bc\tau\varrho \\ 2a\tau\varphi-2ac\varrho\sigma, & bc\varrho^2-ca\sigma^2+ab\tau^2-\varphi^2, & -2c\varrho\varphi-2ca\sigma\tau \\ -2a\sigma\varphi-2ab\varrho\tau, & 2b\varrho\varphi-2ab\sigma\tau, & bc\varrho^2+ca\sigma^2-ab\tau^2-\varphi^2 \end{array} \right| \widehat{(x, y, z)}$$

Pour vérifier que cette expression n'est en effet autre chose que la formule pour la transformation *propre,* en y changeant les signes de tous les termes, j'écris dans la formule pour la transformation propre, $a=b=c=\omega$. On a ainsi pour la transformation propre

$$\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2+\mathrm{z}^2 = x^2+y^2+z^2,$$

l'équation

$$(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}) =$$

$$\frac{1}{\omega^2+\lambda^2+\mu^2+\nu^2} \left| \begin{array}{ccc} \omega^2+\lambda^2-\mu^2-\nu^2, & 2\lambda\mu-2\nu\omega, & 2\nu\lambda+2\mu\omega \\ 2\lambda\mu+2\nu\omega, & \omega^2-\lambda^2+\mu^2-\nu^2, & 2\mu\nu-2\lambda\omega \\ 2\nu\lambda-2\mu\omega, & 2\mu\nu+2\lambda\omega, & \omega^2-\lambda^2+\mu^2-\nu^2 \end{array} \right| \widehat{(x, y, z)},$$

et en écrivant dans la formule pour la transformation impropre, $a=b=c=1$, $d=0$, et λ, μ, ν, $-\omega$ au lieu de ϱ, σ, τ, φ, on obtient pour la transformation impropre

$$\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2+\mathrm{z}^2 = x^2+y^2+z^2,$$

l'équation

$$(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}) = \frac{1}{\omega^2+\lambda^2+\mu^2+\nu^2}$$

$$\times \left| \begin{array}{ccc} -\omega^2-\lambda^2+\mu^2+\nu^2, & -2\lambda\mu+2\nu\omega, & -2\nu\lambda-2\mu\omega \\ -2\lambda\mu-2\nu\omega, & -\omega^2+\lambda^2-\mu^2+\nu^2, & 2\mu\nu-2\lambda\omega \\ -2\nu\lambda+2\mu\omega, & -2\mu\nu-2\lambda\omega, & -\omega^2+\lambda^2+\mu^2-\nu^2 \end{array} \right| \widehat{(x, y, z)}$$

Pour obtenir la transformation propre

$$ax^2+by^2+cz^2+dw^2 = ax^2+by^2+cz^2+dw^2,$$

j'écris

$$\begin{vmatrix} 11, & 12, & 13, & 14 \\ 21, & 22, & 23, & 24 \\ 31, & 32, & 33, & 34 \\ 41, & 42, & 43, & 44 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a, & \nu, & -\mu, & \varrho \\ -\nu, & b, & \lambda, & \sigma \\ \mu, & -\lambda, & c, & \tau \\ -\varrho, & -\sigma, & -\tau, & d \end{vmatrix}.$$

Celà donne d'abord, en mettant pour abréger,

$$\varphi = \lambda\varrho+\mu\sigma+\nu\tau,$$

la valeur du déterminant

$$\overline{1234|1234} = abcd+bc\varrho^2+ca\sigma^2+ab\tau^2+ad\lambda^2+bd\mu^2+cd\nu^2+\varphi^2$$

(que je représente par k).

J'ajoute aussi la valeur de la *matrice* inverse

$$\begin{vmatrix} 11, & 12, & 13, & 14 \\ 21, & 22, & 23, & 24 \\ 31, & 32, & 33, & 24 \\ 41, & 42, & 43, & 44 \end{vmatrix}^{-1},$$

savoir:

$$\frac{1}{k}\begin{vmatrix} bcd+b\tau^2+c\sigma^2+d\lambda^2, & -cd\nu-\tau\varphi+d\lambda\mu-c\varrho\sigma, \\ cd\nu+\tau\varphi+d\lambda\mu-c\varrho\sigma, & acd+b\tau^2+c\varrho^2+d\mu^2, \\ -bd\mu-\sigma\varphi+d\lambda\nu-b\varrho\tau, & ad\lambda+\varrho\varphi+d\mu\nu-a\sigma\tau, \\ bc\varrho+\lambda\varphi+c\nu\sigma-b\mu\tau, & ac\sigma+\mu\varphi-c\nu\varrho+a\lambda\tau, \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} bd\mu+\sigma\varphi+d\lambda\nu-b\varrho\tau, & -bc\varrho-\lambda\varphi+c\nu\sigma-b\mu\tau \\ -ad\lambda-\varrho\varphi+d\mu\nu-a\sigma\tau, & -ac\sigma-\mu\varphi-c\nu\varrho+a\lambda\tau \\ abd+a\sigma^2+b\varrho^2+d\nu^2, & -ab\tau-\nu\varphi+b\mu\varrho-a\lambda\sigma \\ ab\tau+\nu\varphi+b\mu\varrho-a\lambda\sigma, & abc+a\lambda^2+b\mu^2+c\nu^2 \end{vmatrix}$$

On a pour la transformation, l'équation

$$(x, y, z, w) =$$

$$\frac{1}{k}\begin{vmatrix} abcd-bc\varrho^2+ca\sigma^2+ab\tau^2+ad\lambda^2 & 2b(-cd\nu-\tau\varphi+d\lambda\mu-c\varrho\sigma), \\ -bd\mu^2-cd\nu^2-\varphi^2, & abcd+bc\varrho^2-ca\sigma^2+ab\tau^2-ad\lambda^2 \\ 2a(cd\nu+\tau\varphi+d\lambda\mu-c\varrho\sigma), & +bd\mu^2-cd\nu^2-\varphi^2, \\ 2a(-bd\mu-\sigma\varphi+d\lambda\nu-b\varrho\tau), & 2b(ad\lambda+\varrho\varphi+d\mu\nu-a\sigma\tau), \\ 2a(bc\varrho+\lambda\varphi+c\nu\sigma-b\mu\tau), & 2b(ac\sigma+\mu\varphi-c\nu\varrho+a\lambda\tau), \end{vmatrix}$$

$$\left|\begin{array}{ll} 2c(bd\mu+\sigma\varphi+d\lambda\nu-b\varrho\tau), & 2d(-bc\varrho-\lambda\varphi+c\nu\sigma-b\mu\tau) \\ 2c(-ad\lambda-\varrho\varphi+d\mu\nu-a\sigma\tau), & 2d(-ac\sigma-\mu\varphi-c\nu\varrho+a\lambda\tau) \\ abcd+bc\varrho^2+ca\sigma^2-ab\tau^2-ad\lambda^2 & 2d(-ab\tau-\nu\varphi+b\mu\varrho-a\lambda\sigma) \\ \quad -bd\mu^2+cd\nu^2-\varphi^2, & abcd-bc\varrho^2-ca\sigma^2-ab\tau^2+ad\lambda^2 \\ 2c(ab\tau+\nu\varphi+b\mu\varrho-a\lambda\sigma), & \quad +bd\mu^2+cd\nu^2-\varphi^2, \end{array}\right| \widehat{(x,y,z,w)}.$$

Je suppose que l'on ait $a=b=c=d=\omega$, et j'écris $\psi=-\frac{\varphi}{\omega}$, c'est à dire $\psi=-\frac{\lambda\varrho+\mu\sigma+\nu\tau}{\omega}$ ou $\lambda\varrho+\mu\sigma+\nu\tau+\psi\omega=0$. En faisant cette substitution, on trouve d'abord $k=\omega^2 R$ où

$$R=\lambda^2+\mu^2+\nu^2+\psi^2+\varrho^2+\sigma^2+\tau^2+\omega^2,$$

et puis pour la transformation propre

$$x^2+y^2+z^2+w^2 = x^2+y^2+z^2+w^2,$$

l'équation

$$(x, y, z, w) =$$

$$\frac{1}{R}\left|\begin{array}{ll} -\varrho^2+\sigma^2+\tau^2+\omega^2+\lambda^2-\mu^2-\nu^2-\psi^2, & -2\omega\nu+2\tau\psi+2\lambda\mu-2\varrho\sigma, \\ 2\omega\nu-2\tau\psi+2\lambda\mu-2\varrho\sigma, & \varrho^2-\sigma^2+\tau^2+\omega^2-\lambda^2+\mu^2-\nu^2-\psi^2, \\ -2\omega\mu+2\sigma\psi+2\lambda\nu-2\varrho\tau, & 2\omega\lambda-2\varrho\psi+2\mu\nu-2\sigma\tau, \\ 2\omega\varrho-2\lambda\psi+2\nu\sigma-2\mu\tau, & 2\omega\sigma-2\mu\psi-2\nu\varrho+2\lambda\tau, \\ 2\omega\mu-2\sigma\psi+2\lambda\nu-2\varrho\tau, & -2\omega\varrho+2\lambda\psi+2\nu\sigma-2\mu\tau, \\ -2\omega\lambda+2\varrho\psi+2\mu\nu-2\sigma\tau, & -2\omega\sigma+2\mu\psi-2\nu\varrho+2\lambda\tau, \\ \varrho^2+\sigma^2-\tau^2+\omega^2-\lambda^2-\mu^2 & -2\omega\tau+2\nu\psi+2\mu\varrho-2\lambda\sigma, \\ \quad +\nu^2-\psi^2, & -\varrho^2-\sigma^2-\tau^2+\omega^2+\lambda^2+\mu^2 \\ 2\omega\tau-2\nu\psi+2\mu\varrho-2\lambda\sigma, & \quad +\nu^2-\psi^2 \end{array}\right| \widehat{(x, y, z\ w)}.$$

On peut changer la forme de cette expression, en y écrivant

$$\lambda=\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha'),\ \mu=\tfrac{1}{2}(\beta-\beta'),\ \nu=\tfrac{1}{2}(\gamma-\gamma'),\ \psi=\tfrac{1}{2}(\delta-\delta'),$$
$$\varrho=\tfrac{1}{2}(\alpha+\alpha'),\ \sigma=\tfrac{1}{2}(\beta+\beta'),\ \tau=\tfrac{1}{2}(\gamma+\gamma'),\ \omega=\tfrac{1}{2}(\delta+\delta');$$

celà donne

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2-\alpha'^2-\beta'^2-\gamma'^2-\delta'^2 = 0,$$
$$R = \tfrac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2+\delta'^2),$$

de manière qu'en écrivant

$$M = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2,$$
$$M' = \alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2+\delta'^2,$$

on obtient

$$\boldsymbol{R} = \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{M} + \boldsymbol{M}') = \sqrt{(\boldsymbol{M}\boldsymbol{M}')},$$

et la formule pour la transformation devient

$$(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \mathrm{w}) = \frac{1}{\sqrt{(MM')}} \begin{vmatrix} -\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' + \delta\delta', & -\alpha\beta' - \beta\alpha' - \gamma\delta' + \delta\gamma', \\ -\alpha\beta' - \beta\alpha' + \gamma\delta' + \delta\gamma', & \alpha\alpha' - \beta\beta' + \gamma\gamma' + \delta\delta', \\ -\alpha\gamma' - \beta\delta' - \gamma\alpha' + \delta\beta', & \alpha\delta' - \beta\gamma' - \gamma\beta' - \delta\alpha', \\ -\alpha\delta' + \beta\gamma' - \gamma\beta' - \delta\alpha', & -\alpha\gamma' - \beta\delta' + \gamma\alpha' - \delta\beta', \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -\alpha\gamma' + \beta\delta' - \gamma\alpha' - \delta\beta', & \alpha\delta' + \beta\gamma' - \gamma\beta' + \delta\alpha' \\ -\alpha\delta' - \beta\gamma' - \gamma\beta' + \delta\alpha', & -\alpha\gamma' + \beta\delta' + \gamma\alpha' + \delta\beta' \\ \alpha\alpha' + \beta\beta' - \gamma\gamma' + \delta\delta', & \alpha\beta' - \beta\alpha' + \gamma\delta' + \delta\gamma' \\ \alpha\beta' - \beta\alpha' - \gamma\delta' - \delta\gamma', & -\alpha\alpha' - \beta\beta' - \gamma\gamma' + \delta\delta' \end{vmatrix} \widehat{(x, y, z, w)}.$$

On voit donc que même sans supposer l'équation $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}'$, cette formule donne la transformation propre

$$\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 + \mathrm{z}^2 + \mathrm{w}^2 = x^2 + y^2 + z^2 + w^2.$$

Cette solution est à peu près de la même forme que la solution ***impropre*** donnée par ***Euler*** dans son mémoire „Problèma algebraicum ob affectiones prorsus singulares memorabile Nov. Comm. Pelrop. t. XV. 1770 p. 75 et Commen. Arith. collectae t. I. p. 427." Je remarque aussi que cette même solution peut être déduite de la théorie des ***Quaternions***. En effet, i, j, k étant des quantités imaginaires tels que $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $jk = -kj = i$, $ki = -ik = j$, $ij = -ji = k$, on obtient, en effectuant la multiplication:

$$(\mathrm{x}i + \mathrm{y}j + \mathrm{z}k + \mathrm{w})$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{(MM')}}(\alpha i + \beta j + \gamma k + \delta)(xi + yj + zk + w)(\alpha' i + \beta' j + \gamma' k + \delta'),$$

x, y, z, w ayant les mêmes valeurs que dans la dernière formule de transformation.

En changeant les signes des termes de la quatrième colonne, on en tire pour la transformation impropre

$$\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 + \mathrm{z}^2 + \mathrm{w}^2 = x^2 + y^2 + z^2 + w^2,$$

la formule suivante plus symétrique:

$$(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \mathrm{w}) = \frac{1}{\sqrt{(MM')}} \begin{vmatrix} -\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' + \delta\delta', & -\alpha\beta' - \beta\alpha' - \gamma\delta' + \delta\gamma', \\ -\alpha\beta' - \beta\alpha' + \gamma\delta' - \delta\gamma', & \alpha\alpha' - \beta\beta' + \gamma\gamma' + \delta\delta', \\ -\alpha\gamma' - \beta\delta' - \gamma\alpha' + \delta\beta', & \alpha\delta' - \beta\gamma' - \gamma\beta' - \delta\alpha', \\ -\alpha\delta' + \beta\gamma' - \gamma\beta' - \delta\alpha', & -\alpha\gamma' - \beta\delta' + \gamma\alpha' - \delta\beta', \end{vmatrix}$$

$$\left|\begin{array}{cc} -\alpha\gamma'+\beta\delta'-\gamma\alpha'-\delta\beta', & -\alpha\delta'-\beta\gamma'+\gamma\beta'-\delta\alpha' \\ -\alpha\delta'-\beta\gamma'-\gamma\beta'+\delta\alpha', & \alpha\gamma'-\beta\delta'-\gamma\alpha'-\delta\beta' \\ \alpha\alpha'+\beta\beta'-\gamma\gamma'+\delta\delta', & -\alpha\beta'+\beta\alpha'-\gamma\delta'-\delta\gamma' \\ \alpha\beta'-\beta\alpha'-\gamma\delta'-\delta\gamma', & \alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma'-\delta\delta' \end{array}\right| \widehat{(x, y, z, w)}.$$

Ces formules pour la transformation, tant propre qu'impropre, de la fonction $x^2+y^2+z^2+w^2$ ***en elle même,*** sont utiles dans la théorie des *polygones* inscrits dans une surface du second ordre.

No. 7.

Recherches sur les Matrices dont les termes sont des fonctions linéaires d'une seule indéterminée.

Je pose la matrice

$$\left|\begin{array}{cccc} A, & B, & C & \ldots \\ A', & B', & C' & \ldots \\ A'', & B'', & C'' & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}\right|$$

dont les termes (n^2 en nombre) sont des fonctions linéaires d'une quantité s, et je considère le déterminant formé avec cette matrice, et les déterminants mineurs, formés en supprimant un nombre quelconque des lignes et un nombre égal de colonnes de la matrice. En supprimant une ***seule*** ligne et une ***seule*** colonne, on obtient les *premiers mineurs* en supprimant ***deux*** lignes et ***deux*** colonnes, on obtient les *seconds mineurs;* et ainsi de suite. Celà étant, je suppose que la quantité s a été trouvée en égalant à zéro le déterminant formé avec la matrice donnée; ce déterminant sera une fonction de s du $n$ième degré qui généralement ne contiendra pas de facteurs multiples. On voit donc qu'un facteur simple du déterminant ne peut pas entrer comme facteur dans les premiers mineurs (c'est à dire dans ***tous*** les premiers mineurs); mais en supposant que le déterminant ait des facteurs multiples, un facteur multiple du déterminant peut entrer comme facteur (simple ou multiple) dans les premiers mineurs, ou dans les mineurs d'un ordre plus élevé. Il importe de trouver le degré avec lequel un facteur multiple du déterminant peut entrer comme facteur des premiers mineurs ou des mineurs d'un ordre quelconque donné.

Cela se fait très facilement au moyen d'une propriété générale des déterminants, si les mineurs du $(r+1)$ième ordre contiennent le facteur $(s-a)^2$ (c'est à dire, si tous les mineurs de cet ordre contiennent le facteur $(s-a)^\alpha$, mais non pas tous les facteurs $(s-a)^{\alpha+1}$). Et si de même les mineurs du $r$ième ordre contiennent le facteur $(s-a)^\beta$, les mineurs du $(r-1)$ième ordre contiendront *au moins* le facteur $(s-a)^{2\beta-\alpha}$; autrement dit: les mineurs du $(r-1)$ième ordre contiendront le facteur $(s-a)^\gamma$ où $\gamma > 2\beta-\alpha$, ou, ce qui est la même chose, $\alpha-2\beta+\gamma<0$; c'est à dire: en formant la suite des indices des puissances dans lesquelles le facteur $(s-a)$ entre dans les mineurs premiers, seconds etc. (il va sans dire que cette suite sera une suite ***décroissante***), les différences secondes seront *positives*. Je représente par $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ la suite dont il s'agit; je suppose, pour fixer les idées, que δ soit le dernier terme qui ne s'évanouisse pas, et j'écris

$$\begin{array}{cccccc} \alpha, & \beta, & \gamma, & \delta, & 0, & 0, \ldots \\ \alpha-\beta, & \beta-\gamma, & \gamma-\delta, & \delta, & 0, & \ldots \\ \alpha-2\beta+\gamma, & \beta-2\gamma+\delta, & \gamma-2\delta, & \delta, & 0, & \ldots \end{array}$$

De même, quel que soit le nombre des termes, tous les nombres de la troisième ligne seront positifs, et en représentant ces nombres par f, f', f'' etc., on obtient:

$$\begin{array}{rl} \alpha = & f+2f'+3f''+4f'''+\ldots \\ \beta = & f'+2f''+3f'''+\ldots \\ \gamma = & f''+2f'''+\ldots \\ \delta = & f'''+\ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Il y a ici à considérer que le nombre α, indice de la puissance dans laquelle le facteur $(s-a)$ entre dans le déterminant, est donné; il sera donc permis de prendre pour $f, f', f'', \ldots$ des valeurs entières et positives quelconques (zéro y compris) qui satisfont à la première équation; les autres équations donnent alors les valeurs de β, γ, δ, etc. On forme de cette manière une table des particularités que peut présenter un facteur multiple $(s-a)^\alpha$ du déterminant. Cette table est composée des symboles $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ et les nombres $\alpha, \beta, \ldots$ de chaque symbole font voir le degré avec lequel le facteur $(s-a)$ entre dans les déterminants, dans les mineurs premiers, seconds, etc. Or, ce qui est très facile, c'est de former au moyen des tables pour $\alpha=1$,

$\alpha = 2, \ldots \alpha = k$ la table pour $\alpha = k+1$. On a par exemple pour $\alpha = 1$, $\alpha = 2$, $\alpha = 3$, $\alpha = 4$ les tables suivantes:

Pour $\alpha = 1$, 1.
Pour $\alpha = 2$, 2, 21.
Pour $\alpha = 3$, 3, 31, 321.
Pour $\alpha = 4$, 4, 41, 42, 421, 4321.

De là en tire la table pour $\alpha = 5$, savoir:

Pour $\alpha = 5$, 5, 51, 52, 521, 531, 5321, 54321.

En effet, le premier terme est 5, et on obtient les autres termes en mettant le nombre 5 devant les symboles des tables pour $\alpha = 1$, $\alpha = 2$, $\alpha = 3$, $\alpha = 4$, en ayant seulement soin de supprimer les symboles 53, 54, 541, 542, 5421 pour lesquels le premier terme de la suite des différences secondes est négatif. On trouve de même pour $\alpha = 6$, la table suivante, savoir:

Pour $\alpha = 6$, 6, 61, 62, 621, 63, 631, 6321,
642, 6421, 64321, 654321;

et ainsi de suite. Les nombres des symboles pour $\alpha = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ etc. sont 1, 2, 3, 5, 7, 11, 15, 22 etc.; ce sont les coefficients des puissances x^1, x^2, x^3 etc. dans le développement de

$$(1-x)^{-1}.(1-x^2)^{-1}.(1-x^3)^{-1}.(1-x^4)^{-1}.(1-x^5)^{-1} \text{ etc.}$$

fonctions qui se présentent, comme on sait, dans la théorie de la *partition des nombres.*

Maintenant, au lieu de considérer un seul facteur du déterminant, je considère *tous* les facteurs, par ex. pour $n = 4$. Le déterminant peut avoir un facteur double $(s-a)^2$, et un autre facteur double $(s-b)^2$; il peut de plus arriver que le facteur $s-a$ soit facteur simple des premiers mineurs, mais que le facteur $(s-b)$ n'entre pas dans les premiers mineurs. Le symbole qui correspond au facteur $(s-a)$ sera 21, et le symbole qui correspond au facteur $(s-b)$ sera 2. En combinant ces deux symboles, on aura le symbole composé $\left|\begin{matrix}2\,1\\2\end{matrix}\right|$, qui dénote que le déterminant a deux facteurs doubles de la classe dont il s'agit. Je forme de ces symboles composés des tables pour $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$, etc. On a:

Pour $n=1$: $\boxed{1}$,

Pour $n=2$: $\boxed{\begin{matrix}1\\1\end{matrix}}$, $\boxed{2}$, $\boxed{21}$,

Pour $n=3$: $\boxed{\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}}$, $\boxed{\begin{matrix}2\\1\end{matrix}}$, $\boxed{\begin{matrix}21\\1\end{matrix}}$, $\boxed{3}$, $\boxed{31}$, $\boxed{321}$,

Pour $n=4$: $\boxed{\begin{matrix}1\\1\\1\\1\end{matrix}}$, $\boxed{\begin{matrix}2\\1\\1\end{matrix}}$, $\boxed{\begin{matrix}21\\1\\1\end{matrix}}$, $\boxed{\begin{matrix}3\\1\end{matrix}}$, $\boxed{\begin{matrix}321\\1\end{matrix}}$, $\boxed{\begin{matrix}2\\2\end{matrix}}$, $\boxed{\begin{matrix}21\\2\end{matrix}}$, $\boxed{4}$, $\boxed{41}$, $\boxed{42}$, $\boxed{421}$, $\boxed{4321}$,

et ainsi de suite.

Pour donner encore un exemple du sens de ces symboles, le symbole $\boxed{\begin{matrix}321\\1\end{matrix}}$ dénote que le déterminant a un facteur $s-a$ qui entre comme facteur *triple* dans le déterminant, comme facteur *double* dans les premiers mineurs, et comme facteur *simple* dans les seconds mineurs; l'autre facteur du déterminant est un facteur simple $s-b$. Les nombres des symboles pour $n=$ 1. 2. 3. 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 etc. sont 1, 3, 6, 14, 27, 58, 111, 223, 424, 817, 1527 etc.; ces nombres sont les coefficients de x^1, x^2, x^3 etc. dans le développement de

$$(1-x)^{-1}(1-x^2)^{-2}(1-x^3)^{-3}(1-x^4)^{-5}(1-x^5)^{-7}(1-x^6)^{-11}(1-x^7)^{-15}(1-x^8)^{-22}(1-x^9)^{-30}(1-x^{10})^{-42}(1-x^{11})^{-56}$$

etc.

où les indices 1, 2, 3, 5, 7, 11 etc. forment la suite qui se présente dans la théorie de la partition des nombres, dont j'ai parlé plus haut. Il est très facile de démontrer qu'il en est ainsi.

Les résultats que je viens de présenter sont en partie dûs à M. *Sylvester* (Voyez son mémoire „An enumeration of the contacts of lines and surfaces of the second order". Philosophical magazine Febr. 1851). En effet, M. *Sylvester* commence par étendre à des fonctions d'un nombre quelconque d'intéterminés l'idée géométrique des contacts des courbes et des surfaces. En considérant les deux équations quadratiques $U=0$, $V=0$, il forme le discriminant de la fonction quadratique $U+sV$, et il cherche dans quel degré chaque facteur de ce discriminant peut entrer comme facteur dans les mineurs premiers, seconds etc. Le discriminant de M. *Sylvester* est un déterminant symétrique; mais celà ne change rien à la question, et je n'ai fait que reproduire l'analyse

de M. ***Sylvester***, en donnent cependant l'algorithme pour la formation des symboles, et de plus la loi pour le nombre des symboles. M. ***Sylvester*** donne pour $n = 2, 3, 4, 5, 6$ des nombres qui, en ajoutant à chacun le nombre 2, pour embrasser deux cas extrêmes qui ne sont pas comptés, seraient 3, 6, 14, 26, 58. Il se trouve dans le nombre 26 une erreur de calcul; ce nombre devrait être 27, et en suppléant le premier terme 1, on a la suite trouvée plus haut, savoir 1, 3, 6, 14, 26, 58 etc.; il y a de même une erreur de calcul dans les nombres donnés par M. ***Sylvester*** pour $n = 7$ et $n = 8$.

Mais tout celà s'applique à une autre théorie géométrique, savoir à la théorie des figures ***homographes***. Pour fixer les idées, je ne considère que les figures dans le plan. En supposant que x, y, z soient les coordonnés d'un point, et en prenant pour x, y, z des fonctions linéaires de x, y, z, on aura (x, y, z) comme coordonnées d'un point ***homographe*** au point (x, y, z). En cherchant les points qui sont homographes chacun de soi même, on est conduit aux équations $x - sx = 0$, $y - sy = 0$, $z - sz = 0$. Les quantités à gauche $x - sx$, $y - sy$, $z - sz$ sont des fonctions linéaires de x, y, z, ayant pour coefficients des fonctions linéaires de s. On a ainsi une matrice dont les termes sont des fonctions linéaires de s. La théorie entière se rattache aux propriétés de cette matrice. Pour le cas général de ***l'homographie*** ordinaire, on a le symbole $\left|\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}\right|$, pour ***l'homologie***, le symbole $\left|\begin{matrix}2\\1\end{matrix}\right|$; les autres symboles $\left|\begin{matrix}21\\1\end{matrix}\right|$, $|3|$, $|31|$ se rapportent à des cas moins généraux, et le symbole $|321|$ au cas de l'indentité complète des deux figures; y compris ce cas-limite de l'identité complète. Il existe pour le ***plan*** 6 espèces d'homographie; dans ***l'espace*** ordinaire il existe 14 espèces d'homographie. Je reviendrai à cette théorie à une autre occasion.

Londres, 24 Mai 1854.

22.

Additions à l'article No. 15 page 239 de ce tome.

(Par Mr. *Brioschi,* professeur à l'université de Pavie.)

Applications.

I. Soient $\lambda(x)$, $\psi(x)$ deux fonctions algébriques, rationnelles, entières, respectivement des degrés n, $2n$; y une quantité constante, et

$$f(x) = x\lambda^2 - y^2\psi.$$

En désignant par x_1, x_2, ... x_{2n+1} les racines de l'équation

$$f(x) = x^{2n+1} + a_1 x^{2n} + \cdots + a_{2n+1} = 0,$$

on aura identiquement:

$$f(x_r) = x_r\lambda^2(x_r) - y^2\psi(x_r) = 0,$$

d'où l'on tire:

$$f'(x_r)\frac{dx_r}{dy} + \frac{df(x_r)}{dy} = 0.$$

Mais:

$$\frac{df(x_r)}{dy} = -2y\psi(x_r), \quad \text{et} \quad y = \pm\lambda(x_r)\sqrt{\frac{x_r}{\psi(x_r)}},$$

par conséquent:

$$\pm\frac{\frac{dx_r}{dy}}{\sqrt{(x_r\psi(x_r))}} = 2\frac{\lambda(x_r)}{f'(x_r)},$$

En supposant:

$$\lambda(x) = x^n + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \cdots + c_n$$

et $\lambda(x).x^{n+1} = \varphi(x)$, on aura:

$$\Sigma_r \pm \frac{x_r^m \frac{dx^r}{dy}}{\sqrt{(x_r\psi(x_r))}} = 0, \quad \text{pour} \quad m = 0, 1, \ldots n-1,$$

$$\Sigma_r \pm \frac{x_r^n \frac{dx_r}{dy}}{\sqrt{(x_r\psi(x_r))}} = 2, \qquad \Sigma_r \pm \frac{x_r^{n+i} \frac{dx_r}{dy}}{\sqrt{(x_r\psi(x_r))}} = 2S_{i-1}.$$

Par analogie on trouve

$$\Sigma_r \pm \frac{x_r^m \frac{dx_r}{dy}}{(x - x_r)\sqrt{(x_r\psi(x_r))}} = 2\frac{x^m\lambda(x)}{f(x)}, \quad \text{pour } m = 0, 1, \ldots n,$$

et

$$\Sigma_r \pm \frac{x_r^{n+i}\frac{dx_r}{dy}}{(x-x_r)\sqrt{(x_r\psi(x_r))}} = 2T_{i-1}\ ^*).$$

II. Soit:

$$a_0 y_{x+n} + a_1 y_{x+n-1} + a_2 y_{x+n-2} + \cdots + a_n y_x = 0$$

une équation aux différences et à coefficients constants. En faisant dans cette équation $x = 0, 1, 2, \ldots x-1$, on obtient $x+1$ équations, desquelles, en éliminant y_n, y_{n+1}, $\ldots$ y_{x+n-1} et ayant posé

$$h_{r-1} = a_r y_{n-1} + a_{r+1} y_{n-2} \cdots + a_n y_{n-1},$$

on déduit:

$$y_{x+n} = (-1)^{x+1}\begin{vmatrix} h_0 & a_0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ h_1 & a_1 & a_0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ h_{n-1} & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-1} & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_1 & a_0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_2 & a_1 \end{vmatrix}$$

En développant le déterminant on aura:

$$y_{x+n} = (-1)^{x+1}(h_2 k_0 + h_1 k_1 + \cdots + h_{n-1} k_{n-1}),$$

et les déterminants k_0, k_1, $\ldots$ d'ordre $x^{\text{ième}}$, sont fonctions des coefficients seuls. Mais x_1, x_2, $\ldots$ x_n étant les racines de l'équation

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0,$$

on a pour les formules plus haut:

$$k_{r-1} = (-1)^x \Sigma_s \frac{x_s^{x+n-r}}{f'(x_s)};$$

par conséquent, en changeant x en $x-n$, on aura:

$$y_x = -\left\{h_0 \Sigma_s \frac{x_s^{x-1}}{f'(x_s)} + h_1 \Sigma_s \frac{x_s^{x-2}}{f'(x_s)} + \cdots + h_{n-1} \Sigma_s \frac{x_s^{x-n}}{f'(x_s)}\right\},$$

ou aussi:

$$y_x = -\left\{y_0 \Sigma_s \frac{x_s^x}{f'(x_s)} \cdot \frac{da_n}{dx_s} + y_1 \Sigma_s \frac{x_s^x}{f'(x_s)} \cdot \frac{da_{n-1}}{dx_s} + \cdots + y_{n-1} \Sigma_s \frac{x_s^x}{f'(x_s)} \cdot \frac{da_1}{dx_s}\right\}.$$

---

*) *Jacobi*, Über die Additionstheoreme der *Abel*schen Integrale zweiter und dritter Gattung.

Il est ainsi démontré *directement* que l'intégrale complète de l'équation proposée est:

$$y_x = C_1 x_1^x + C_2 x_2^x + \cdots + C_n x_n^x,$$

où

$$C_r = -\frac{1}{f'(x_r)}\left(y_0 \frac{da_n}{dx_r} + y_1 \frac{da_{n-1}}{dx_r} + \cdots + y_{n-1} \frac{da_1}{dx_r}\right).$$

Sur une propriété des déterminants.

Le déterminant que je me propose d'examiner dans cette note est le suivant:

$$H = \begin{vmatrix} m_1 & m_2 & \cdots & m_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ c_{1,1} & c_{1,2} & \cdots & c_{1,n} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & \cdots & c_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n-2,1} & c_{n-2,2} & \cdots & c_{n-2,n} \end{vmatrix}$$

dans lequel les éléments $c_{r,s}$ sont des quantités constantes, les éléments α_r des fonctions linéaires des n variables $x_1, x_2, \ldots x_n$, et les m_r des fonctions quelconques de ces variables. Si l'on suppose:

$$\begin{aligned} c_{r,1}x_1 + c_{r,2}x_2 + \cdots + c_{r,n}x_n &= 0, \\ \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n &= 0, \\ \alpha_r = a_{r,1}x_1 + a_{r,2}x_2 + \cdots + a_{r,n}x_n & \end{aligned}$$

et $a_{r,s} = a_{s,r}$, on a le suivant

Théorème. „*Le déterminant H est égal à*

$$„(m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots + m_n x_n)\sqrt{\Delta},$$

„*Δ étant indépendant de* $x_1, x_2, \ldots x_n$."

Je supposerai, pour abréger, $n = 4$ et

$$H = \begin{vmatrix} m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix}, \qquad \begin{aligned} \alpha_1 &= ax_1 + ex_2 + fx_3 + gx_4, \\ \alpha_2 &= ex_1 + bx_2 + hx_3 + kx_4, \\ \alpha_3 &= fx_1 + hx_2 + cx_3 + lx_4, \\ \alpha_4 &= gx_1 + kx_2 + lx_3 + dx_4. \end{aligned}$$

On a identiquement:

$$H = m_1 \frac{dH}{dm_1} + m_2 \frac{dH}{dm_2} + m_3 \frac{dH}{dm_3} + m_4 \frac{dH}{dm_4},$$

et par une propriété connue des déterminants:

$$\left(\frac{dH}{dm_4}\right)^2 = \begin{vmatrix} a & e & f & \alpha_1 & b_1 & c_1 \\ e & b & h & \alpha_2 & b_2 & c_2 \\ f & h & c & \alpha_3 & b_3 & c_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Le déterminant du second membre peut être transformé en ajoutant aux éléments de la quatrième colonne ceux de la première multipliés par $-x_1$, ceux de la seconde multipliés par $-x_2$, etc. En répétant ensuite l'opération sur les lignes, on obtient:

$$\left(\frac{dH}{dm_4}\right)^3 = x_4^2 \begin{vmatrix} a & e & f & g & b_1 & c_1 \\ e & b & h & k & b_2 & c_2 \\ f & h & c & l & b_3 & c_3 \\ g & k & l & d & b_4 & c_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & 0 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = x_4^2 \Delta,$$

et par conséquent:

$$H = (m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + m_4 x_4) \sqrt{\Delta},$$

comme il y avait à démontrer.

Corollaire. Si l'on fait:

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots + m_n x_n - 1 = \mu\varphi = 0,$$

et qu'on suppose x_n fonction des autres variables $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$, et $a_{r,s}$, $c_{r,s}$ fonctions des nouvelles variables $y_1, y_2, \ldots y_n$; les formules connues pour la transformation des intégrales multiples donnent:

$$\int^{n-1} \frac{U}{\varphi'(x_n) K} dx_1 dx_2 \ldots dx_{n-1} = \int^{n-1} \frac{U}{\psi'(y_n) H} dy_1 dy_2 \ldots dy_{n-1}.$$

De cette équation peuvent être tirés des théorèmes analogues à ceux que Mr. *Jacobi* a démontré dans son mémoire „De intégralibus quibusdam duplicibus etc." (Voir la quatrième des lettres de Mr. *Rosenhain* à Mr. *Jacobi*. Journal de Mr. *Crelle* T. 40.)

23.

Note sur le centre de gravité des figures sphériques.

(Par Mr. *M. Jullien* S. J. à Paris.)

Monsieur. Je lis dans votre journal, tome XLV, page 282, un théorème remarquable de M. *Schellbach*, dont voici l'énoncé:

„Soient OX, OY, OZ trois axes quelconques menés par le centre d'une „sphère dont le rayon est r;

„D l'aire d'une figure tracée à volonté sur la surface de cette sphère;

„A, B, C les projections de cette aire, parallèles aux axes, sur les „plans YOZ, ZOX, XOY;

„OX', OY', OZ' de nouveaux axes respectivement perpendiculaires à „ces plans;

„x', y', z' les coordonnées du centre de gravité de la surface D par „rapport à ces axes."

„On a $\frac{x'}{A} = \frac{y'}{B} = \frac{z'}{C} = \frac{r}{D}$."

La démonstration de l'auteur est assez compliquée; je me propose ici d'en donner une démonstration plus simple et même élémentaire.

Nommons dD un élément de la surface, $\bar{x}'$, $\bar{y}'$, $\bar{z}'$ les coordonnées par rapport aux seconds axes, α l'angle que le rayon mené à cet élément fait avec la normale OX au plan $Y'OZ'$, et θ l'angle des droites OX, OX'.

On a $Dx' = \int \bar{x}' dD$. Or la perpendiculaire abaissé de l'élément dD sur le plan $Y'OZ'$ est égale à $r\cos\alpha$, et, puisque la droite OX' fait un angle θ avec cette perpendiculaire, $\bar{x}' = \frac{r\cos\alpha}{\cos\theta}$, d'où $Dx' = r\int \frac{\cos\alpha}{\cos\theta} dD$.

Projetons l'élément dD sur le plan YOZ parallèlement à la droite OX. Les lignes projetantes font un angle θ avec la normale OX' au plan de projection, et elles font un angle α avec le rayon qui aboutit à l'élément projeté. Or, quand on projette une aire plane P sur un autre plan, si l'on nomme α l'angle que les lignes projetantes font avec la normale au premier plan et θ l'angle qu'elles forment avec la normale au second, la projection est égale à $\frac{\cos\alpha}{\cos\theta} P$. De là il résulte que nous avons $\int \frac{\cos\alpha}{\cos\theta} dD = A$, et par-conséquent $\frac{x'}{A} = \frac{r}{D}$.

Paris, 13 Mars 1854.

24.

Directer Beweis der Gleichheit zweier bestimmter Integrale.

(Von Herrn Prof. *Heine* zu Bonn.)

Jacobi hat im 26ten Bande dieses Journals S. 81 gezeigt, dafs der Coëfficient von α^n in der Entwickelung von

$$\frac{1}{\sqrt{(1-2\alpha z+\alpha^2)}}$$

durch das Integral

$$(A.) \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(x-\sqrt{(x^2-1)}\cos(\varphi-\psi))^n}{(y-\sqrt{(y^2-1)}\cos\psi)^{n+1}}\,d\psi$$

sich ausdrücken läfst, wenn

$$z = xy-\sqrt{(x^2-1)}\sqrt{(y^2-1)}\cos\varphi$$

gesetzt wird. Jener Entwickelungscoëfficient wird aber bekanntlich zu

$$(B.) \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (z-\sqrt{(z^2-1)}\cos\eta)^n\,d\eta,$$

so dafs die Gleichheit der Ausdrücke (*A.* und *B.*) nachgewiesen ist. *Jacobi* hat diese Gleichheit gefunden, indem er auf die erzeugenden Functionen zurückging: hier soll ein *directer* Beweis davon gegeben werden. Dieselbe Methode, welche ich hier anwende, habe ich mit Vortheil auch auf ähnliche Entwickelungen ausgedehnt, deren bereits in einer früheren Abhandlung erwähnt ist, und auf welche ich nächstens zurückkommen werde.

Um imaginäre Substitutionen zu vermeiden, stelle man sich x und y gröfser als 1 vor. Ist das Endresultat, auf welches *Jacobi* hinzielt, für diesen Fall bewiesen, so gilt es offenbar auch noch, wenn x und y beliebige reelle oder imaginäre Gröfsen bezeichnen.

Zunächst zerlege man das Integral in (*A.*) in eines zwischen den Grenzen 0 und π, und in eines zwischen π und 2π. Man bringe das letztere auf die Grenzen 0 und π; dann unterscheidet es sich von dem ersten nur dadurch, dafs in jenem $-\varphi$ steht, wo dieses φ enthält. Setzt man in beiden so entstehenden Integralen:

$$\cos\psi = \frac{y\cos\eta + \sqrt{(y^2-1)}}{y+\cos\eta\sqrt{(y^2-1)}},$$

$$\sin\psi = \frac{\sin\eta}{y+\cos\eta\sqrt{(y^2-1)}},$$

$$d\psi = \frac{d\eta}{y+\cos\eta\sqrt{(y^2-1)}},$$

so wird, während ψ von 0 bis π wächst, auch η von 0 bis π zunehmen. Das erste Integral von den aus (*A.*) entstandenen, verwandelt sich dadurch, ohne dafs es eines weiteren Kunstgriffes bedürfte, in

$$\int_0^{\pi} (z-\sqrt{(z^2-1)}\cos(\theta-\eta))^n\, d\eta,$$

das zweite in

$$\int_0^{\pi} (z-\sqrt{(z^2-1)}\cos(\theta+\eta))^n\, d\eta,$$

wenn θ ein solcher, offenbar reeller Bogen ist, dafs

$$\cos\theta.\sqrt{(z^2-1)} = y.\sqrt{(x^2-1)}\cos\varphi - x.\sqrt{(y^2-1)},$$
$$\sin\theta.\sqrt{(z^2-1)} = \sin\varphi.\sqrt{(x^2-1)}.$$

Ihre Summe ist also

$$\int_0^{2\pi} (z-\sqrt{(z^2-1)}\cos(\theta-\eta))^n\, d\eta, \quad \text{oder} \quad \int_0^{2\pi} (z-\sqrt{(z^2-1)}\cos\eta)^n\, d\eta;$$

wie es sein mufste.

Die Substitution, deren ich mich hier bediente, rührt von *Jacobi* her, der sie anwandte um die Gleichheit der Integrale

$$\int_0^{\pi} (\cos\theta + i\sin\theta\cos\eta)^n\, d\eta \quad \text{und} \quad \int_0^{\pi} \frac{d\eta}{(\cos\theta+i\sin\theta\cos\eta)^{n+1}}$$

nachzuweisen. Ich fand sie in einem nachgelassenen Manuscripte, aus dessen erstem Theile die erwähnte Abhandlung im 26ten Bande des Journals entstanden ist. *Jacobi* hat sie bei der Ausarbeitung nicht erwähnt; vielleicht weil er eine im Wesentlichen gleiche Substitution schon im 15ten Bande des Journals S. 11 zum Beweise eines *Euler*'schen Resultats anwandte, welches mit der im 26ten Bande S. 85 bewiesenen Formel übereinstimmt. Es rührt von mir daher nur der Gedanke her, diese Substitution zum Beweise der Gleichheit der Ausdrücke (*A.* und *B.*) zu benutzen.

Bonn, im November 1854.

Verzeichnisse

des Inhalts und Umfangs der Bände 1 bis 50 dieses Journals.

Tables des matières

des tomes **1—50** *de ce journal.*

Vorbemerkung.

Es sind am Schlusse des 10., 20., 30. und 40. Bandes dieses Journals Inhaltsverzeichnisse

I. Der je vorhergegangenen 10 Bände, nach alphabetischer Ordnung der Namen der Mit-Arbeiter und

II. Je aller vorhergegangenen Bände, nach den Gegenständen

gegeben worden. Es könnte also hier am Schlusse des 50. Bandes wieder Ähnliches für die fünften zehn Bände geschehen.

Aber es würde dann für die Leser des Journals allzu beschwerlich sein, eine Abhandlung, die man sucht, zu finden. Wollte man z. B. einen Aufsatz nachschlagen, von dessen Verfasser man den Namen kennt, so müfste man diesen Namen erst in allen fünf Inhaltsverzeichnissen I. suchen. Wollte man Etwas suchen, blofs nach dem Gegenstande, von welchem es handelt, so müfste man die Nummer der gesuchten Abhandlung, welche das Verzeichnifs II. angiebt, wiederum erst in allen fünf Inhaltsverzeichnissen aufschlagen, und folglich in beiden Fällen die 5 Bände 10, 20, 30, 40 und 50 zur Hand haben.

Deshalb erfolgen hier Inhaltsverzeichnisse:

I. Nach alphabetischer Ordnung der Namen der Mit-Arbeiter;

II. Nach den Gegenständen ihrer Beiträge;

beide alle 50 Bände umfassend; so dafs man also nun beisammen hat, was alle 50 Bände enthalten, und das Gesuchte unmittelbar finden kann.

Avis préliminaire.

Au bout des tomes 10, 20, 30 et 40 de ce journal, on a donné des tables de matières:

I. Par ordre alphabétique des noms des collaborateurs, pour chaque décade des tomes qui précèdent;

II. Selon les sujets des mémoires, pour tous les tomes qui précèdent.

Maintenant donc, au bout du 50me tome, une table de matières pareille à I., pourrait être donnée pour la cinquième décade de tomes, et une table pareille à II., pour tous les 50 tomes.

Mais il serait alors trop incommode pour les lecteurs du journal, de trouver ce qu'on y cherche. Si par ex. on voulait avoir un mémoire dont on connait le nom de l'auteur, il faudrait feuilleter tous les cinq tables I. pour trouver ce nom et l'article désiré. Si l'on voulait avoir les mémoires d'un auteur sur un sujet déterminé, on aurait encore à feuilleter les cinq tables I. pour trouver les numéros des articles qu'indique la table II. Donc, dans les deux cas, il faudrait avoir sous la main tous les cinq tomes 10, 20, 30, 40 et 50.

C'est par cette raison qu'on donne ici, pour faciliter la lecture du journal, des tables des matières suivantes qui embrassent tous les cinquante tomes: savoir:

I. Par ordre alphabétique des noms des collaborateurs,

II. Selon les sujets des articles;

de sorte que ces deux tables offrent un

Diesen Inhaltsverzeichnissen I. und II. gehen folgende allgemeine, sogenannte statistische Übersichten des Journals voraus; nämlich:

A. Der Zeit der Ausgabe der verschiedenen einzelnen Bände, des Umfangs derselben, der Zahl der zugehörigen Figurentafeln, anderer lithographirten Tafeln und der den verschiedenen Bänden beigegebenen Facsimile's der Handschrift berühmter verstorbener Mathematiker.

B. Der Anzahl der Mit-Arbeiter, der ihrer Beiträge und des Umfangs derselben, nach den verschiedenen Ländern und nach den verschiedenen Sprachen gesondert, in welchen die Beiträge geschrieben sind.

C. Der Anzahl der Beiträge der einzelnen Mit-Arbeiter, nach alphabetischer Ordnung ihrer Namen; so wie des Gesammt-Umfangs der Beiträge, in den verschiedenen Sprachen.

Diese allgemeine Übersichten dürften nicht ohne Interesse sein.

Der Herausgeber des Journals wird dasselbe ferner fortsetzen. Am Schlusse des letzten Bandes wird er Nachträge zu den gegenwärtigen Inhaltsverzeichnissen geben, so eingerichtet, dafs sie für die auf den 50. Band folgenden Bände auf eine bequeme Weise die gegenwärtigen Verzeichnisse ergänzen.

aperçu de tout ce qui se trouve dans le journal.

Ces tables I. et II. seront précédés des aperçus suivants, soit-disant statistiques, du journal:

A. Des années dans lesquelles les différents tomes ont paru; des nombres des feuilles et pages qu'ils contiennent; du nombre des tables de figures et d'autres tables lithographiés y relatives, ainsi que des Fac-simile de l'écriture de géomètres célèbres décédés:

B. Du nombre des collaborateurs, des articles qu'ils ont contribués au journal, et des volumes totaux de ces articles; séparés selon les différents pays et les différentes langues dans lesquelles les mémoires sont écrits:

C. Du nombre des mémoires que chaque collaborateur a fourni, par ordre alphabétique des noms des auteurs, et du total des feuilles que contiennent leurs mémoires dans les différentes langues.

Ces aperçus généraux ne seront pas, comme il parait, sans intérêt.

Le rédacteur continuera la publication du journal. Au bout du dernier tome il donnera des supplements de tous les tables qu'on voit ici, arrangés de manière qu'ils les complêteront aisément pour les tomes qui suivront encore le tome 50.

A.

In dieser Überschriftstafel giebt an:
Die Spalte **1.** die Nummer des Bandes;
- - **2.** das Jahr der Ausgabe des Bandes;
- - **3.** die Zahl der Bogen und Seiten, welche der Band einnimmt;
- - **4.** die Anzahl der zu dem Bande gehörigen Figurentafeln;
- - **5.** die Zahl anderer zu dem Bande gehörigen lithographirten Tafeln;
- - **6.** die Zahl der dem Bande angehängten Fac-similes der Handschrift verstorbener berühmter Mathematiker.

Cet aperçu donne dans la
Colonne **1.** *le numéro du tome;*
- **2.** *l'année de sa publication;*
- **3.** *le nombre des feuilles et des pages que le tome contient;*
- **4.** *le nombre des tables des figures qui appartiennent au tome;*
- **5.** *le nombre des autres tables lithographiées relatives au tome;*
- **6.** *le nombre des Fac-simile de l'écriture de géomètres célèbres décédés.*

1.	2.	3.		4.	5.	6.	1.	2.	3.		4.	5.	6.
1.	1826	48	4	5	–	–	26.	1843	46	–	3	–	4
2.	1827	50	–	5	–	–	27.	1844	47	4	–	1	4
3.	1828	51	4	4	–	–	28.	1844	47	4	3	–	4
4.	1829	50	4	3	–	–	29.	1845	47	–	–	–	4
5.	1830	52	2	3	–	–	30.	4846	46	–	2	1	4
6.	1830	52	6	4	–	–	31.	1846	44	6	7	–	4
7.	1831	52	–	3	–	–	32.	1846	45	4	4	–	4
8.	1832	52	4	4	–	–	33.	1846	47	–	–	–	4
9.	1832	51	4	1	–	–	34.	1847	47	–	3	–	4
10.	1833	49	4	4	1	–	35.	1847	46	–	1	–	4
11.	1834	51	–	5	–	–	36.	1848	45	4	4	–	4
12.	1834	45	4	2	–	–	37.	1848	46	4	3	–	4
13.	1835	45	4	3	–	–	38.	1849	46	2	1	–	4
14.	1835	47	4	3	–	–	39.	1850	45	6	–	–	4
15.	1836	47	2	1	–	–	40.	1850	48	2	5	–	4
16.	1837	47	–	3	–	–	41.	1851	46	4	2	–	–
17.	1837	49	2	3	–	–	42.	1851	47	2	2	–	–
18.	1838	47	–	5	–	–	43.	1852	46	6	6	–	3
19.	1839	48	4	3	–	–	44.	1852	47	–	4	–	–
20.	1840	47	2	4	–	–	45.	1853	47	4	10	–	–
21.	1840	47	4	2	–	–	46.	1853	48	4	7	–	–
22.	1841	47	4	2	–	–	47.	1854	47	4	–	–	–
23.	1842	47	4	1	–	5	48.	1854	52	–	2	–	–
24.	1842	47	6	4	–	4	49.	1854	46	2	8	–	–
25.	1843	49	4	2	–	4	50.	1855	50	4	4	–	1
							Zusammen (Total.)		**2402**	**6**	**160**	**3**	**77**

B.

In dieser Übersicht giebt an:
Die Spalte **1.** die Anzahl der Mit-Arbeiter, gesondert nach den verschiedenen Ländern;
- - **2.** die Anzahl ihrer Beiträge;
- - **3.** den Umfang ihrer Beiträge, in Bogen.

Cet aperçu donne dans la
Colonne **1.** *le nombre des collaborateurs, specifiés selon les différents pays;*
- **2.** *le nombre de leurs mémoires;*
- **3.** *le nombre des feuilles qu'ils contiennent.*

	1.	**2.**	**3.**		**1.**	**2.**	**3.**
Aus dem Preufsischen Staate	111	664	1394	*Des États de la Prusse* .	111	664	1394
Aus dem übrigen Deutschland	41	193	404	*Des autres pays Allemands*	41	193	404
Aus der Schweiz	7	53	77	*De la Suisse*	7	53	77
Aus Holland	4	9	11	*Des Pays-bas*	4	9	11
Aus Belgien	4	18	50	*De la Belgique*	4	18	50
Aus Frankreich	17	57	142	*De la France*	17	57	142
Aus Italien	9	20	56	*De l'Italie*	9	20	56
Aus England	10	32	46	*De l'Angleterre*	10	32	46
Aus Dänemark	3	18	16	*Du Danemarc*	3	18	16
Aus Schweden und Norwegen	8	55	108	*De la Suède et du Norvègue*	8	55	108
Aus Rufsland	16	51	62	*De la Russie*	16	51	62
Ungenannte	28	47	15	*Anonymes*	28	47	15
Zusammen	258	1216	2381	*Total*	258	1216	2381
Also aus dem Preufsischen Staate	111	664	1394	*Donc des États de la Prusse*	111	664	1394
Von aufserhalb Preufsen . .	145	553	987	*D'autres pays*	145	553	987

Von den Beiträgen sind geschrieben:
1480 Bogen in deutscher Sprache,
303 - - lateinischer Sprache,
573 - - französischer Sprache,
14 - - englischer Sprache,
11 - - italienischer Sprache.
2381 Bogen zusammen. Also
1480 Bogen in deutscher Sprache,
901 - - andern Sprachen.

Die 50 Bände sind herausgekommen in 29 Jahren und 8 Monaten.

Du contenu du Journal sont écrits:
1480 *feuilles en allemand,*
303 - - *latin,*
573 - - *français,*
14 - - *anglais,*
11 - - *italien.*
Total 2381 *feuilles; donc*
1480 *feuilles en allemand,*
901 - - *d'autres langues.*

Les 50 tomes du Journal ont été publiés en 29 ans et 8 mois.

C.

In der folgenden Übersicht giebt an:
Die Spalte **1.** die Nummer und
- - **2.** die Namen und Heimath der einzelnen Mit-Arbeiter aus dem folgenden Inhaltsverzeichnifs I.;
- - **3.** die Anzahl ihrer Beiträge;
- - **4. 5. 6. 7. 8.** den Umfang der von den einzelnen Mit-Arbeitern in deutscher, lateinischer, französischer, englischer oder italienischer Sprache geschriebenen Aufsätze;
- - **9.** den gesammten Umfang der Beiträge der einzelnen Mit-Arbeiter.

L'aperçu suivant donne dans la
Colonne **1.** *les numéros;*
- **2.** *les noms et les domiciles des différents collaborateurs suivant la table des matières I. qui suit;*
- **3.** *le nombre de leurs mémoires;*
- **4. 5. 6. 7. 8.** *le nombre des pages que contiennent leurs mémoires en langue allemande, latine, française, anglaise ou italienne;*
- **9.** *le nombre des feuilles et pages que contiennent en total les articles de chaque collaborateur.*

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
1.	†*N. H. Abel* aus Christiania	24	133	–	249	–	–	47, 6
2.	*Amsler* zu Zürich	3	34	–	–	–	–	4, 2
3.	*Aoust* zu Besançon	1	–	–	7	–	–	– 7
4.	*F. Arendt* zu Berlin	10	47	30	–	–	–	9, 5
5.	*S. Aronhold* zu Berlin	1	20	–	–	–	–	2, 4
6.	*O. G. D. Aubert* zu Christiania	1	11	–	–	–	–	1, 3
7.	*Aubertin* zu Mühlheim am Rhein	1	9	–	–	–	–	1, 1
8.	*August* zu Berlin	2	9	–	–	–	–	1, 1
9.	*Balzer* zu Dresden	1	19	–	–	–	–	2, 3
10.	*Bellavitis* zu Padua	1	–	–	3	–	–	– 3
11.	*Bauer* zu Stettin	1	26	–	–	–	–	3, 2
12.	*Bergius* zu Upsâla	1	–	27	–	–	–	3, 3
13.	*Bernardi* zu Modena	1	–	–	–	–	6	– 6
14.	*Beyer* zu Neu-Stettin	1	7	–	–	–	–	– 7
15.	*E. G. Björling* zu Upsâla	1	–	5	–	–	–	– 5
16.	*Buoncompagni* zu Rom	1	–	–	23	–	–	2, 7
17.	*C. A. Borchardt* zu Berlin	2	8	–	36	–	–	5, 4
18.	*v. Bouniakowsky* zu St. Petersburg	1	4	–	–	–	–	– 4
19.	*Brenneke* zu Berlin	1	–	–	5	–	–	– 5
20.	*C. A. Brettschneider* zu Gotha	3	46	29	–	–	–	9, 3
21.	*Brioschi* zu Pavia	3	–	–	14	–	–	1, 6
22.	*Brix* zu Berlin	1	17	–	–	–	–	2, 1
23.	*O. J. Broch* zu Christiania	3	2	–	105	–	–	13, 3
24.	*Ch. Brooke* zu Cambridge	1	–	–	–	2	–	– 2
25.	*Brune* zu Berlin	4	13	–	–	–	–	1, 5
26.	*Bruun* zu Odessa	1	4	–	–	–	–	– 4
27.	*Burg* zu Wien	3	5	–	–	–	–	– 5
28.	*Catalan* zu Paris	1	–	–	1	–	–	– 1
29.	*Cayley* zu London	19	–	–	220	–	–	27, 4
30.	*Chelini* zu Rom	1	–	–	–	–	1	– 1
31.	*Clausen* zu Altona	36	113	12	–	–	–	15, 5
32.	*Clausius* zu Berlin	2	57	–	–	–	–	7, 1
33.	*Collins* zu St. Petersburg	1	8	–	–	–	–	1 –
34.	*A. Cournot* zu Paris	2	–	–	69	–	–	8, 5
35.	*A. L. Crelle* zu Berlin	44	689	–	498	–	–	148, 3
36.	*Dahse* zu Berlin	1	1	–	–	–	–	– 1

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
37.	*A. v. Davidof* in Moskau	1	4	–	–	–	–	– 4
38.	*Deahna* zu Cassel	2	13	–	–	–	–	1, 5
39.	*Dedekind* zu Göttingen	3	10	–	–	–	–	1, 2
40.	*Despeyrous* zu Paris	1	–	–	31	–	–	3, 7
41.	*Dienger* zu Carlsruhe	14	174	–	–	–	–	21, 6
42.	† *Dietlein* zu Berlin	2	16	–	–	–	–	2 –
43.	*Dippe* zu Halle	1	12	–	–	–	–	1, 4
44.	*Lejeune-Dirichlet* zu Berlin	26	54	6	330	–	–	48, 6
45.	† *E. H. Dirksen* zu Berlin	4	33	–	–	–	–	4, 1
46.	*Druckenmüller* zu Berlin	2	41	–	–	–	–	5, 1
47.	*Dumas* zu Berlin	1	88	–	–	–	–	11 –
48.	*Eberti* zu Berlin	1	3	–	–	–	–	– 3
49.	*Eisenlohr* zu Carlsruhe	2	58	–	–	–	–	7, 2
50.	† *G. Eisenstein* zu Berlin.	37	656	1	41	–	–	87, 2
51.	*Enke* zu Berlin	2	66	–	–	–	–	8, 2
52.	† *J. A. Eytelwein* zu Berlin	1	10	–	–	–	–	1, 2
53.	*Fasbender* zu Iserlohn	4	12	–	–	–	–	1, 4
54.	*L. Feldt* zu Braunsberg	1	4	–	–	–	–	– 4
55.	*A. Fischer* zu Königsberg in Pr.	1	–	18	–	–	–	2, 2
56.	† *W. A. Förstemann* zu Danzig	5	37	–	–	–	–	4, 5
57	*Frh. v. Forstner* zu Berlin	1	2	–	–	–	–	– 2
58.	*M. L. Frankenheim* zu Breslau	1	9	–	–	–	–	1, 1
59.	*G. Friedländer.*	1	–	11	–	–	–	1, 3
60.	*Garbinsky* zu Warschau	1	–	–	8	–	–	1 –
61.	† *Gauſs* zu Göttingen	3	9	–	–	–	–	1, 1
62.	*Gerling* zu Marburg	1	5	–	–	–	–	– 5
63.	† *Mad. S. Germain* zu Paris	2	–	–	33	–	–	4, 1
64.	*Gerwien* u. *v. Holleben* zu Berlin	1	1	–	–	–	–	– 1
65.	*Gerwien* zu Berlin	4	26	–	–	–	–	3, 2
66.	† *A. Göpel* zu Berlin	4	40	50	–	–	–	11, 2
67.	*Gräfe* zu Zürich	1	3	–	–	–	–	– 3
68.	*H. Grassmann* zu Stettin	13	191	–	19	–	–	26, 2
69.	*Ch. Graves* zu Dublin	1	–	–	–	–	–	– 1
70.	† *G. Green* zu Cambridge	1	–	–	–	97	–	12, 1
71.	*Grüson* zu Berlin	1	4	–	–	–	–	– 4
72.	*J. A. Grunert* zu Greifswalde	11	109	–	2	–	–	13, 7
73.	† *Gudermann* zu Münster	38	1210	279	–	–	–	186, 1
74.	*Gützlaff* zu Marienburg	1	–	5	–	–	–	– 5
75.	*Bierens de Haan* zu Deventer	1	3	–	–	–	–	– 3
76.	† *Hachette* zu Paris	3	14	–	2	–	–	2 –
77.	*Hadenkamp* zu Hamm	5	24	4	–	–	–	3, 4
78.	*Hansen* zu Gotha	1	11	–	–	–	–	1, 3
79.	*Heilermann* zu Trier	4	57	–	–	–	–	7, 1
80.	*v. Heim* zu Stuttgart	4	210	–	–	–	–	26, 2
81.	*E. Heine* zu Bonn	13	179	–	–	–	–	22, 3
82.	*Heinen* zu Düsseldorf	5	39	2	–	–	–	5, 1
83.	*Hellerung* zu Wismar	1	1	–	–	–	–	– 1
84.	*C. Hermite* zu Paris	8	–	–	180	–	–	22, 4
85.	*O. Hesse* zu Königsberg in Pr.	25	308	21	–	–	–	41, 1
86.	*Hessel* zu Marburg	1	8	–	–	–	–	1 –
87.	*C. J. Hill* zu Lund	16	59	121	1	–	–	22, 5
88.	*Hittorf* zu Bonn	1	4	–	–	–	–	– 4

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
89.	*H. Hoffmann* zu Danzig	1	16	–	–	–	–	2 –
90.	*R. Hoppe* zu Berlin	4	12	–	21	–	–	4, 1
91.	*W. Horn* zu Potsdam	3	19	–	–	–	–	2, 3
92.	*Frh. Alex. v. Humboldt Exc.*	2	30	–	–	–	–	3, 6
93.	*A. Jacobi* zu Breslau	3	78	–	–	–	–	9, 6
94	*M. H. Jacobi* zu St. Petersburg	1	10	–	–	–	–	1, 2
95.	† *C. G. J. Jacobi* zu Berlin	98	587	871	122	–	5	198, 1
96.	*Jahn* zu Leipzig	1	7	–	–	–	–	– 7
97.	*F. Joachimsthal* zu Halle	11	62	21	44	–	–	15, 7
98.	*Jordann* zu Münster	2	6	1	–	–	–	– 7
99.	*M. Jullien* zu Paris	1	–	–	1	–	–	– 1
100.	*Jürgensen* zu Kopenhagen	6	–	–	55	–	–	6, 7
101.	*M. Kartscher* zu Berlin	1	1	–	–	–	–	– 1
102.	*G. Kirchhof* zu Breslau	2	67	–	–	–	–	8, 3
103.	*E. Köhlau* zu Berlin	1	2	–	–	–	–	– 2
104.	*Koppe* zu Soest	2	9	–	–	–	–	1, 1
105.	*Kossack* zu Potsdam	1	1	–	–	–	–	– 1
106.	*A. Kramer* zu Berlin	1	4	–	–	–	–	– 4
107.	*L. Kronecker* zu Berlin	1	1	–	–	–	–	– 1
108.	*R. Krusemark* zu Berlin	1	45	–	–	–	–	5, 5
109.	*Kulik* zu Prag	2	28	–	–	–	–	3, 4
110.	*E. E. Kummer* zu Breslau	25	445	61	17	–	–	65, 3
111.	*Lamé* u. *Clapeyron* zu Paris	2	–	–	78	–	–	9, 6
112.	*Lebesque* zu Paris	1	–	–	6	–	–	– 6
113.	*Lehmann* zu Berlin	1	18	–	–	–	–	2, 2
114.	*Lehmus* zu Berlin	11	34	–	–	–	–	4, 2
115.	*Leithold* zu Berlin	1	8	–	–	–	–	1 –
116.	*G. Libri* zu London	10	–	–	214	–	–	26, 5
117.	*R. Liouville* zu Paris	6	–	–	93	–	–	11, 5
118.	*J. J. Littrow* zu Wien	1	9	–	–	–	–	1, 1
119.	*Lobatschewsky* zu Kasan	2	–	–	34	–	–	4, 2
120.	*R. Lobatto* im Haag	6	–	–	35	–	–	4, 3
121.	*G. Löwenstern* zu Dorpat	1	18	–	–	–	–	2, 2
122.	*C. Lottner* zu Lippstadt	3	43	–	–	–	–	5, 3
123.	*R. A. Luchterhand* zu Berlin	3	11	9	–	–	–	2, 4
124.	*E. Luther* zu Königsberg in Pr.	2	28	14	–	–	–	5, 2
125.	*L. J. Magnus* zu Berlin	6	–	21	17	–	–	4, 6
126.	*Märker* zu Meiningen	1	10	–	–	–	–	1, 2
127.	*C. J. Malmstèn* zu Upsâla	7	–	68	59	–	–	15, 7
128.	*W. Matzka* zu Wien	1	10	–	–	–	–	1, 2
129.	*E. Meissel* zu Berlin	3	15	16	–	–	–	3, 7
130.	*A. Meyer* zu Lüttich	1	–	–	28	–	–	3, 4
131.	*C. G. Meyer* zu Königsberg in Pr.	2	32	16	–	–	–	6 –
132.	*W. H. Miller* zu Cambridge	2	–	–	–	4	–	– 4
133.	*F. Minding* zu Dorpat	29	168	23	25	–	–	27 –
134.	*A. F. Möbius* zu Leipzig	26	361	–	–	–	–	45, 1
135.	*A. Müller* zu Heidelberg	3	24	–	–	–	–	3 –
136.	*G. W. Müller* zu Hannover	1	29	–	–	–	–	3, 5
137.	† *Navier* zu Paris	1	–	–	5	–	–	– 5
138.	*Nernst* zu Stralsund	2	2	–	–	–	–	– 2
139.	*G. H. F. Nesselmann* zu Königsberg in Pr.	1	49	–	–	–	–	6, 1
140.	*J. Neumann* zu Königsberg in Pr.	1	30	–	–	–	–	3, 6

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
141.	*Öttinger* zu Freiburg in Br.	6	1035	–	–	–	–	129, 3
142.	† *G. S. Ohm* zu München	1	42	–	–	–	–	5, 2
143.	*M. Ohm* zu Berlin	4	52	–	–	–	–	6, 4
144.	*L. Olivier*, damals zu Berlin	12	106	–	15	–	–	15, 1
145.	† *Oltmanns* zu Berlin	2	23	–	–	–	–	2, 7
146.	*Oltramare* zu Genf	5	–	–	91	–	–	11, 3
147.	*Ostrograsky* zu St. Petersburg	1	–	–	23	–	–	2, 7
148.	*Pagani* zu Lüttich	9	–	–	64	–	–	8 –
149.	*Pauker* zu St. Petersburg	2	8	–	13	–	–	2, 5
150.	*Piper* zu Berlin	1	47	–	–	–	–	5, 7
151.	*Plana* zu Turin	6	–	–	293	–	–	36, 5
152.	*Plücker* zu Bonn	21	265	–	81	–	–	43, 2
153.	† *Poisson* zu Paris	9	–	–	64	–	–	8 –
154.	*Poncelet* zu Paris	7	–	–	335	–	–	41, 7
155.	† *Prehn* zu Ratzeburg	3	54	–	4	–	–	7, 2
156.	*Preuss* zu Berlin	1	1	–	–	–	–	– 1
157.	*L. Raabe* zu Zürich	37	413	–	–	–	–	51, 5
158.	*Radike* zu Bonn.	2	25	–	–	–	–	3, 1
159.	*Ramus* zu Kopenhagen	10	–	–	50	–	–	6, 2
160.	*Remy* zu Berlin	2	4	–	–	–	–	– 4
161.	*v. Renthe* zu Berlin	2	6	–	–	–	–	– 6
162.	*Reuschle* zu Stuttgart	2	41	–	–	–	–	5, 1
163.	*Richelot* zu Königsberg in Pr.	22	174	357	2	–	–	66, 5
164.	*G. Rosenhain* zu Breslau	3	51	48	–	–	–	12, 3
165.	*G. Salmon* zu Dublin	2	–	–	7	–	–	– 7
166.	*J. T. Sanio* zu Königsberg in Pr..	1	–	50	–	–	–	6, 2
167.	*C. G. Sauer* zu Naumburg	1	3	–	–	–	–	– 3
168.	*Schäffer* zu Berlin	2	–	53	–	–	–	6, 5
169.	*Schällibaum*, damals zu Berlin	3	19	–	–	–	–	2, 3
170.	*H. Scheffler* zu Braunschweig	1	–	21	–	–	–	2, 5
171.	*Schellbach* zu Berlin	13	197	–	–	–	–	24, 5
172.	*Th. Scherer* zu Berlin	1	2	–	–	–	–	– 2
173.	*Scherk* zu Halle	7	76	–	–	–	–	9, 4
174.	*Schlaeffli* zu Bern	3	23	–	22	–	–	5, 5
175.	*O. Schlömilch* zu Dresden	10	–	–	74	–	–	9, 2
176.	*Th. Schönemann* zu Brandenburg a. d. H. .	5	127	10	–	–	–	17, 1
177.	*Fr. Schmeisser* zu Frankfurt a. d. O. . . .	1	25	–	–	–	–	3, 1
178.	† *v. Schmidten* zu Kopenhagen	2	14	–	9	–	–	2, 7
179.	*E. J. Scholz* zu Breslau	1	9	–	–	–	–	1, 1
180.	*F. Schultz* zu Berlin	1	3	–	–	–	–	– 3
181.	*L. C. Schulz v. Strasnicky* zu Wien . . .	2	6	–	–	–	–	– 6
182.	*N. W. Schulze* zu Berlin	1	7	–	–	–	–	– 7
183.	*Schweins* zu Heidelberg	5	94	–	–	–	–	11, 6
184.	*E. Segnitz* zu Eldena	1	25	–	–	–	–	3, 1
185.	*J. A. Serret* zu Paris	1	–	–	7	–	–	– 7
186.	*Siebeck* zu Breslau	2	10	–	–	–	–	1, 2
187.	*Simonoff* zu St. Petersburg	1	–	–	9	–	–	1, 1
188.	*Ch. Z. Slonimsky* zu Byalistock	2	11	–		–	–	1, 3
189.	*Smaasen* zu Utrecht	1	–	–	14	–	–	1, 6
190.	*Smith* zu Cambridge	1	–	2	–	–	–	– 2
191.	† *Sohnke* zu Halle	3	–	53	–	–	–	6, 5
192.	*Somoff* zu St. Petersburg	2	–	–	42	–	–	5, 2

1.	2	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
193.	*Specht* zu Berlin	2	3	–	–	–	–	– 3
194.	*S. Spitzer* zu Wien	1	5	–	–	–	–	– 5
195.	*W. Spottiswoode* zu London	3	–	–	17	8	–	3, 1
196.	*Stader* zu Berlin	1	–	65	–	–	–	8, 1
197.	*Stammer* zu Luxemburg	1	22	–	–	–	–	2, 6
198.	*Staudt* zu Erlangen	4	15	–	–	–	–	1, 7
199.	*Steichen* zu Brüssel	7	–	–	286	–	–	35, 6
200.	† *Stein* zu Trier	1	2	–	–	–	–	– 2
201.	*J. Steiner* zu Berlin	51	552	–	125	–	10	85, 7
202.	*v. Steinheil* zu München	1	1	–	–	–	–	– 1
203.	*Stern* zu Göttingen	28	379	2	19	–	–	50 –
204.	*Strehlke* zu Berlin	2	10	–	–	–	–	1, 2
205.	*Sussmann* zu Berlin	1	3	–	–	–	–	– 3
206.	*Svanberg* zu Stockholm	2	–	–	25	–	–	3, 1
207.	*Swellengrebel* zu Utrecht	1	38	–	–	–	–	4, 6
208.	*Tardy* zu Rom	3	–	–	–	–	15	1, 7
209.	*Tchebichef* zu Moskau	2	–	–	14	–	–	1, 6
210.	*Tellkampf* zu Hamm	1	–	17	–	–	–	2, 1
211.	*Thacker* zu Cambridge	1	4	–	–	–	–	– 4
212.	*F. Theremin* zu Saratoff	3	–	–	71	–	–	8, 7
213.	*W. Thomson* zu Cambridge	1	–	–	–	3	–	– 3
214.	*B. Tortolini* zu Rom	4	–	–	34	–	54	11 –
215.	*C. C. Ullherr* zu Nürnberg	1	4	–	–	–	–	– 4
216.	*Umpfenbach* zu Gieſsen	6	10	–	–	–	–	1, 2
217.	*Unger* zu Erfurt	3	3	–	–	–	–	– 3
218.	*P. Volpicelli* zu Rom	1	–	–	4	–	–	– 4
219.	*Waltinowsky* zu Triest	1	10	–	–	–	–	1, 2
220.	*C. Weierstrass* zu Braunsberg	1	18	–	–	–	–	2, 2
221.	*Jul. Weingarten* zu Berlin	1	4	–	–	–	–	– 4
222.	*Weiss* zu München	2	67	–	–	–	–	8, 3
223.	*W. Winkhaus* zu Halver	1	1	–	–	–	–	– 1
224.	*A. Winkler* zu Brünn	6	116	–	–	–	–	14, 4
225.	*F. Wöpke* zu Bonn	2	–	–	21	–	–	2, 5
226.	*R. Wolf* zu Bern	1	9	–	–	–	–	1, 1
227.	*Zech* zu Tübingen	1	12	–	–	–	–	1, 4
228.	*Zeuner* zu Chemnitz	1	22	–	–	–	–	2, 6
229.	*Zornow* zu Königsberg in Pr.	2	–	5	3	–	–	1 –
	Davon sind gestorben (*Dont décédés*) 18.							
	Ungenannte. Abhandlungen und Aufgaben (*Anonymes. Mémoires et problèmes*)	38	76	–	17	–	–	11, 5
	Nachrichten von Büchern (*Avis de livres*)	9	24	–	–	–	–	3 –

I.

Inhaltsverzeichnifs

der Bände 1 bis 50 des Journals nach alphabetischer Ordnung der Namen der Mit-Arbeiter.

Die Überschriften geben die Namen und den Wohnort der Mit-Arbeiter an. Wo der jetzige Wohnort dem Herausgeber unbekannt ist, hat er den Ort gesetzt, an welchem die neusten Abhandlungen geschrieben sind. Die Titel der Herrn Verfasser hat der Herausgeber angegeben, so gut sie ihm bekannt sind. Sollte dabei hie und da gefehlt sein und die jetzigen Titel gegen diejenigen, welche auf die neuesten Beiträge passen, sich verändert haben, so ist der Irrthum nur daraus entstanden, dafs der Herausgeber die jetzigen Titel der Herrn nicht kennt, und er bittet dann deshalb um Verzeihung.

Vor den Namen Derjenigen, von welchen der Herausgeber bestimmt weifs, dafs sie sich jetzt nicht mehr am Leben befinden, ist ein † gesetzt.

Die Nummern in den Überschriften sind diejenigen, auf welche sich die Übersicht *C.* bezieht.

Von den 6 Spalten des Verzeichnisses giebt

A. die Nummer der Abhandlung an, auf welche sich das Inhaltsverzeichnifs II. bezieht;

B. den vollständigen Titel der Abhandlungen;

C. D. E. die Zahlen des Bandes, Heftes und der Seite, wo die Abhandlung im Journale gefunden wird;

F. die Zahl der Seiten, welche die einzelnen Abhandlungen einnehmen.

Table des matières

des tomes 1 — 50 du journal par ordre alphabétique des noms des collaborateurs.

On trouve dans cette table au dessus des listes des mémoires des différents collaborateurs le nom et le domicile de chacun d'eux. Dans les cas où l'éditeur ignore le domicile actuel des auteurs, il a mis celui dans lequel les mémoires les plus récents ont été écrits. Les titres des auteurs ont été donnés aussi exactement que l'éditeur les connait. Si peut être ici des erreurs s'étaient glissées et que les titres actuels des collaborateurs différeraient de ceux qui leur étaient dûs à l'époque où ils composaient leurs plus recents articles, la cause en est uniquement que l'éditeur ne connait pas les titres actuels des auteurs, et il prie de vouloir bien excuser ses erreurs.

On a mis une † devant les noms des collaborateurs dont l'éditeur sait avec sureté qu'ils sont morts.

Les numéros mis devant les noms des auteurs sont ceux auxquels se rapporte l'aperçu C.

Des six colonnes de la table

Celle **A.** *contient les numéros des articles auxquels se rapporte la table II;*

Celle **B.** *donne le titre complet des mémoires;*

Celles **C. D. E.** *donnent les numéros des tomes, cahiers et pages où l'on trouve les mémoires;*

Celle **F.** *donne le nombre des pages que contient le mémoire.*

A.	B.	C.	D.	E.	F.
	1. † Dr. N. H. Abel aus Christiania in Norwegen.				
1.	Untersuchung der Functionen zweier unabhängig veränderlichen Gröfsen x und y, wie $f(x,y)$, welche die Eigenschaft haben, dafs $f(z,f(x,y))$ eine symmetrische Function von z, x und y ist. . .	1.	I.	11.	5.
2.	Beweis der Unmöglichkeit, algebraische Gleichungen von höhern Graden als dem vierten allgemein aufzulösen.	1.	I.	65.	20.
3.	Bemerkungen über die Abhandlung Nr. 4. Seite 37 Heft I. Band 1. .	1.	II.	117.	1.
4.	Auflösung einer mechanischen Aufgabe.	1.	II.	153.	5.
5.	Beweis eines Ausdrucks, von welchem die Binomial-Formel ein einzelner Fall ist.	1.	II.	159.	2.
6.	Über die Integration der Differential-Formel $\frac{\varrho\partial x}{\sqrt{R}}$, wenn R und ϱ ganze Functionen sind.	1.	III.	185.	36.
7.	Untersuchungen über die Reihe $1+\frac{m}{1}x+\frac{m.m-1}{2}x^2+\frac{m.m-1.m-2}{2.3}x^3$.	1.	IV.	311.	29.

A.	B.	C.	D.	E.	F.
8.	Über einige bestimmte Integrale.	2.	I.	22.	9.
9.	Recherches sur les fonctions elliptiques.	2.	II.	101.	80.
10.	Théorèmes et problèmes.	2.	III.	286.	1.
11.	Über die Functionen, welche der Gleichung $\varphi x+\varphi y=\psi(xfy+yfx)$ genugthun	2.	IV.	386.	9.
12.	Note sur le mémoire de Mr. *L. Olivier* No. 4. du tome 2. de ce journal, ayant pour titre: Remarques sur les séries infinies et leur convergence; suivi d'une remarque de Mr. *L. Olivier* sur le même objet.	3.	I.	79.	3.
13.	Recherches sur les fonctions elliptiques (Suite du mémoire No. 9.) .	3.	II.	160.	30.
14.	Aufgabe aus der Zahlentheorie (S. *C. G. J. Jacobi* No. 14.) . . .	3.	II.	212.	1.
15.	Remarques sur quelques propriétés générales d'une certaine sorte des fonctions transcendantes.	3.	IV.	313.	11.
16.	Sur les nombres des transformations différentes, qu'on peut faire subir à une fonction elliptique par la substitution d'une fonction donné de premier degré.	3.	IV.	394.	8.
17.	Théorème général sur la transformatien des fonctions elliptiques de la seconde et de la troisième espèce.	3.	IV.	402.	1.
18.	Note sur quelques formules elliptiques.	4.	I.	85.	9.
19.	Mémoire sur une classe particulière d'équations resolubles algébriquement.	4.	II.	131.	26.
20.	Théorèmes sur les fonctions elliptiques.	4.	II.	194.	6.
21.	Démonstration d'une propriété générale d'une certaine classe de fonctions transcendantes.	4.	II.	200.	2.
22.	Précis d'une théorie des fonctions elliptiques.	4.	III.	236)	72.
		4.	IV.	309)	
23.	Mathematische Bruchstücke aus *Abels* Briefen.	5.	IV.	336.	8.
24.	Fernere mathematische Bruchstücke aus *Abels* Briefen. Schreiben *Abels* an *Legendre*.	6.	I.	73.	8.

2. Dr. J. Amsler, Privatdocent an der Universität zu Zürich.

1.	Neue geometrische und mechanische Eigenschaft der Niveauflächen.	42.	IV.	314.	11.
2.	Zur Theorie der Anziehung und der Wärme.	42.	IV.	316.	11.
3.	Über die Gesetze der Wärmeleitung im Innern fester Körper; unter Berücksichtigung der durch ungleichförmige Erwärmung erzeugten Spannung.	42.	IV.	327.	21.

3. Mr. l'Abbé Aoust, Professor der reinen Mathematik zu Besançon.

1.	Intégration des équations aux différences partielles simultanées d'une certaine classe.	47.	IV.	369.	7.

4. Dr. F. Arndt, Privatdocent an der Universität zu Berlin.

1.	Über die Summirung der beiden Reihen $y_0-n_1y_1+n_2y_2-\cdots+(-1)^n y_n$ und $y_0+n_1y_1+n_2y_2+\cdots+y_n$, in welchen die Gröfsen y willkürlich und die Coëfficienten Binomial-Coëfficienten des ganzen Exponenten n sind, mittels höherer Differenzen und Summen.	31.	III.	235.	11.
2.	Nova solutio problematis determinandi multitudinem numerorum, qui ad numerum aliquem sint primi eoque minores.	31.	III.	246.	3.
3.	Entwickelung der Summe der $n$ten Potenzen der natürlichen Zahlen nach den Potenzen des Index, mittels des *Taylor*schen Lehrsatzes. .	31.	III.	248.	4.

A.	B.	C.	D.	E.	F.
4	Über die *Bernoulli*'sche Methode, summirbare Reihen zu finden. .	31.	III.	253.	6.
5.	Nova methodus determinandi multitudinem radicum congruentiae $x^1 \equiv 1 \pmod{M}$, aliaque ad hanc materiam spectantia.	31.	III.	259.	10.
6.	Demonstratio duorum theorematum, Gaussianis his generaliorum etc.	31.	IV.	326.	3.
7.	Demonstratio nova theorematis Wilsoniani etc.	31.	IV.	329.	4.
8.	Disquisitiones de residuis cujusvis ordinis.	31.	IV.	333.	10.
9.	Bemerkungen über die Verwandlung der irrationalen Quadratwurzel in einen Kettenbruch.	31.	IV.	343.	16.
10.	Bemerkungen zu einer gewissen Methode, die Gleichung eines durch vier Puncte gehenden Kegelschnitts auszudrücken.	35.	I.	83.	10.
	5. Dr. S. Aronhold, zu Berlin.				
1.	Zur Theorie der homogenen Functionen dritten Grades von drei Variablen.	39.	II.	140.	20.
	6. Dr. O. G. D. Aubert, Professor der Mathematik zu Christiania in Norwegen.				
1.	Bemerkungen zu den Aufgaben und Lehrsätzen Band 2. S. 96 bis 98.	5.	II.	163.	11.
	7. Aubertin, Notar zu Mülheim bei Cölln a. R.				
1.	Einige Andeutungen über ein neues Coordinatensystem, und Anwendung desselben auf die Aufgabe: In einem gegebenen Kegelschnitt ein Dreieck zu beschreiben, dessen drei Seiten durch gegebene Puncte gehen.	45.	II.	246.	9.
	8. Dr. E. F. August, Director des Cöllnischen Gymnasiums zu Berlin.				
1.	Eine Eigenschaft des Kreises.	17.	IV.	387.	2.
2.	Elementar-stereometrischer Beweis für die Anwendung der allgemeinen Cubaturformel für Körperstumpfe auf solche Körper, die durch Rotation eines Kegelschnitts um eine Haupt-Axe entstehen. . . .	45.	III.	239.	7.
	9. Dr. R. Baltzer, Oberlehrer vom Gymnasio zu Dresden.				
1.	Behandlung einiger Grund-Aufgaben der analytischen Geometrie im schiefwinkligen Coordinatensysteme	46.	II.	145.	19.
	10. Bellavitis, Professor an der Universität zu Padua.				
1.	Nouvelle règle pour reconnaître en plusieurs cas l'absence de racines réelles d'une équation algébrique dans un intervalle donné. . . .	50.	III.	263.	3.
	11. Dr. Bauer, zu Stettin.				
1.	Beweise einiger geometrischer Lehrsätze.	19.	III.	205.	26.
	12. Dr. A. T. Bergius, Professor an der Universität zu Upsâla.				
1.	De orbitis cometarum ex observationibus determinandis commentatio.	25.	III.	189.	27.
	13. Dr. Ant. Bernardi, zu Modena.				
1.	Intorno agl'intimi movimenti osservati nei muri dell' osservatorio di Modena.	30.	IV.	341.	6.
	14. Dr. Beyer, zu Neu-Stettin.				
1.	Verschiedene mathematische Aufgaben und Sätze.	7.	III.	217.	7.

A.	B.	C.	D.	E.	F.
	15. Dr. E. G. Björling, Professor der Mathematik an der Universität zu Upsâla.				
1.	In determinationem coëfficientium $\overset{k}{C}_n$ in pag. 277 seq. tom. XXV hujus Diarii relatorum (*Grunert* No. 11).	28.	III.	284.	5.
	16. B. Buoncompagni, Mathematiker zu Rom.				
1.	Recherches sur les intégrales définies.	25.	I.	74.	23.
	17. Dr. C. A. Borchardt, Universitätsdocent zu Berlin.				
1.	Neue Eigenschaft der Gleichung, mit deren Hülfe man die seculären Störungen der Planeten bestimmt..	30.	I.	38.	8.
2.	Application des transcendantes Abéliennes à la théorie des fractions continues.	48.	I.	69.	36.
	18. V. Bouniakowsky, Akademiker zu St. Petersburg.				
1.	Auflösung der Aufgabe No. 19. S. 99 Bd. 2. Heft 1.	3.	IV.	347.	4.
	19. Dr. Brenneke, damals zu Berlin.				
1.	Sur le théorème de Wilson.	19.	IV.	319.	5.
	20. C. A. Bretschneider, Professor der Mathematik zu Gotha.				
1.	Beiträge zur sphärischen Trigonometrie.	13.	I.	85)	23.
		13.	II.	145)	
2.	Theoriae logarithmi integralis lineamenta nova.	17.	III.	257.	29.
3.	Tafeln für die Zerlegung der Zahlen bis 4100 in Biquadrate. . . .	46.	I.	1.	23.
	21. Brioschi, Professor an der Universität zu Pavia.				
1.	Sur quelques questions de la géométrie de position.	50.	III.	233.	7.
2.	Sur deux formules relatives à la théorie de la décomposition de fractions rationnelles.	50.	III.	239.	4.
3.	Additions à l'article No. 15. page 239 de ce tome.	50.	IV.	318.	4.
	22. Brix, Geheimer Regierungsrath zu Berlin.				
1.	Über die Bestimmung des Inhalts und des Schwerpuncts einer gewissen Gattung von Körpern, die zwischen zwei parallelen Endflächen enthalten sind.	25.	II.	129.	17.
	23. Dr. O. J. Broch, Professor der Mathematik zu Christiania in Norwegen.				
1.	Sur quelques propriétés d'une certaine classe de fonctions transcendantes.	20.	II.	178.	11.
2.	Mémoire sur les fonctions de la forme $\int x^{s-yp+1} f(x^p)(R(x^p))^{\pm\frac{s}{rp}} \partial x$.	23.	II.	145)	94.
		23.	III.	201)	
3.	Auflösung einer geometrischen Aufgabe.	40.	III.	233.	2.
	24. Ch. Brooke, Professor der Mathematik zu Cambridge.				
1.	Solution of the partial-differential equation to the motion of sound in space.	13.	III.	260.	2.
	25. Brune, Rechnungsrath zu Berlin.				
1.	Gröfstes Quadrat im Dreieck.	15.	IV.	365.	2.

A.	B.	C.	D.	E.	F.
2.	Neue Sterblichkeits-Tabellen für Wittwencassen.	16.	I.	58.	7.
3.	Auflösung der Aufgabe No. 5. S. 375.	16.	I.	80)	3.
		16.	IV.	373)	
4.	Eine Eigenschaft des Vierecks.	22.	IV.	379.	1.
	26. Dr. Bruun, Professor zu Odessa.				
1.	Einiges von Kegelschnitten.	16.	III.	215.	4.
	27. Burg, Professor der Mathematik zu Wien.				
1.	Allgemeine Entwickelung von $(x+\alpha)^n$.	1.	IV.	367.	1.
2.	Beweis für das Kräften-Parallelogramm.	1.	IV.	369.	1.
3.	Über die Existenz der Wurzeln einer höhern Gleichung mit einer Unbekannten.	5.	II.	182.	3.
	28. E. Catalan, Professor der Mathematik zu Paris.				
1.	Note sur l'équation $x^m - y^m = 1$.	27.	II.	192.	1.
	29. A. Cayley, Professor der Mathematik zu London.				
1.	Note sur deux formules données par M^rs. *Eisenstein* et *Hesse*.	29.	I.	54.	4.
2.	Mémoire sur les hyperdéterminants.	30.	I.	1.	37.
3.	Sur quelques théorèmes de la géométrie de position.	31.	III.	213	34.
		34.	III.	270	
		38.	I.	97	
		38.	II.	101	
		41.	I.	66	
		41.	I.	84	1.
4.	Problème de géométrie analytique.	31.	III.	227.	4.
5.	Sur quelques propriétés des déterminants gauches.	32.	II.	119)	9.
		38.	I.	93)	
6.	Recherches sur l'élimination et sur la théorie des courbes.	34.	I.	30.	16.
7.	Note sur les hyperdéterminants.	34.	II.	148.	5.
8.	Note sur les fonctions elliptiques.	37.	I.	58.	3.
9.	Note sur les fonctions du second ordre.	38.	II.	105.	2.
10.	Note sur quelques formules relatives aux coniques.	39.	I.	1.	3.
11.	Sur le problème des contacts.	39.	I.	4.	10.
12.	Note sur un système de certaines formules.	39.	I.	14.	2.
13.	Note sur quelques formules qui se rapportent à la multiplication des fonctions elliptiques.	36.	I.	16)	15.
		41.	I.	85)	
14.	Note sur l'addition des fonctions elliptiques.	41.	I.	57.	9.
15.	Mémoire sur les coniques inscrites dans une même surface du second ordre.	41.	I.	73.	8.
16.	Note sur l'équation $x^{257} - 1 = 0$.	41.	I.	81.	3.
17.	Note sur la théorie des Hyperdéterminants.	42.	IV.	368.	4.
18.	Nouvelles recherches sur les Covariants.	47.	II.	109.	16.
19.	Sept différents mémoires d'analyse:				
	I. Réponse à une question proposée par Mr. *Steiner*.				
	II. Sur un théorème de Mr. *Schläffli*.				
	III. Remarques sur la notation des fonctions algébriques.				
	IV. Note sur les covariants d'une fonction quadratique, cubique ou biquadratique à deux indéterminées.	50.	IV.	277.	36.
	V. Sur la transformation en elle même d'une fonction quadratique par des substitutions linéaires.				
	VI. Recherches ultérieures sur les déterminants gauches.				
	VII. Recherches sur les Matrices, dont les termes sont des fonctions linéaires d'une seule indéterminée.				

A.	B.	C.	D.	E.	F.
	30. D. Chelini, Professor der Mathematik zu Rom.				
1.	*Jacobi* in Roma (articolo necrologico).	42.	I.	93.	1.
	31. Dr. Th. Clausen, damals zu Altona.				
1.	Aufgabe.	2.	III.	286.	1.
2.	Die Function $\frac{1}{a+\frac{1}{a+\frac{1}{a}\cdot\cdot}}$ durch die Anzahl der a ausgedrückt. . .	3.	I.	87.	2.
3.	Über die Fälle, wenn die Reihe $y=1+\frac{\alpha}{1}\cdot\frac{\beta}{\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)}{2}\frac{\beta(\beta+1)}{2}x^2\ldots$ ein Quadrat von der Form $z=1+\frac{\alpha'}{1}\frac{\beta'}{\gamma}\frac{\delta'}{\varepsilon}x+\frac{\alpha'(\alpha'+1)}{2}\cdot\frac{\beta'(\beta'+1)}{\gamma'(\gamma'+1)}\cdot\frac{\delta'(\delta'+1)}{\varepsilon'(\varepsilon'+1)}\cdots$ hat. . . .	3.	I.	89.	3.
4.	Beitrag zur Theorie der Reihen.	3.	I.	92.	3.
5.	Geometrische Sätze.	3.	II.	196.	3.
6.	Demonstratio duarum cel. *Gaussii* propositionum.	3.	III.	311.	1.
7.	Auflösung einer analytischen Aufgabe.	4.	I.	99.	1.
8.	Zwei Aufgaben.	4.	II.	204.	1.
9.	Beweise verschiedener Sätze.	4.	III.	278.	3.
10.	Summirung verschiedener, nach den Sinussen oder Cosinussen vielfacher Bogen fortgehender Reihen.	4.	III.	281.	6.
11.	Auflösung einer geometrischen Aufgabe.	4.	IV.	391.	4.
12.	Über Interpolation.	5.	III.	305.	9.
13.	Über Centrifugal-Pendel-Uhren.	5.	III.	314.	2.
14.	Über die Summe der Reihen $1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}\ldots$ und $1+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{13^2}+\frac{1}{19^2}\ldots$	5.	IV.	380.	3.
15.	Über die Bestimmung der Lage der Haupt-Umdrehungs-Axen eines Körpers.	5.	IV.	383.	3.
16.	Auflösung zweier Aufgaben aus der sphärischen Trigonometrie. . .	6.	I.	84.	7.
17.	Über mechanische Quadraturen.	6.	III.	287.	3.
18.	Alia solutia problematis a cel. *Gauss* in opere „Demonstratio attractionis, quam etc." tractati.	6.	III.	290.	6.
19.	Auflösung der Aufgaben No. 1. und 2. des Herrn *Steiner* Bd. 2. S. 96.	6.	IV.	484.	4.
20.	Über den Stillstand der Planeten oder Cometen in seiner scheinbaren, aus einer andern beobachteten Bahn.	6.	IV.	408.	6.
21.	Auflösung einiger arithmetischen und geometrischen Aufgaben. . .	7.	I.	30.	6.
22.	Beweis einiger geometrischen Sätze.	7.	I.	36.	5.
23.	Geometrische Auflösung der Aufgabe: In einem Kegelschnitt ein Dreieck zu beschreiben, dessen Seiten verlängert durch die gegebenen Puncte *A, B, C* gehen.	7.	I.	55.	2.
24.	Eine neue Art, die Zeit und die Polhöhe zu bestimmen.	7.	II.	105.	3.
25.	Über die Formirung der Bedingungsgleichungen zur Verbesserung einer Planeten- oder Cometenbahn.	7.	II.	108.	4.
26.	Über die Werthe der Reihen $R_n=1^n-2^n+3^n-4^n+5^n-\cdots$ und $S_n=1^n-3^n+5^n-\cdots$	7.	II.	112.	4.
27.	Auflösung einer geometrischen Aufgabe.	7.	II.	143.	2.
28.	Beweise der ersten Sätze der numerischen Facultäten.	7.	III.	234.	3.
29.	Demonstrationes theorematum, et solutiones problematum quorundam a cel. *Hill* vol. 7. p. 102 propositorum.	7.	IV.	309.	5.

A.	B.	C.	D.	E.	F.
30.	Auflösung einiger Aufgaben in gegenwärtigem Journale.	8.	II.	138.	4.
31.	Über die Zerlegung reeller gebrochener Functionen.	8.	II.	142.	4.
32.	Über die Function $\mathrm{Sin}\varphi+\frac{1}{2^2}\mathrm{Sin}2\varphi+\frac{1}{3^2}\mathrm{Sin}3\varphi$	8.	III.	298.	3.
33.	Auflösung der Aufgaben 1. S. 320 Band 8.	10.	I.	41.	1.
34.	Beweis des Lehrsatzes des Herrn *Steiner* No. 34. Band 2. S. 192. .	11.	IV.	399.	3.
35.	Beitrag zur Theorie der krummen Linien dritter Ordnung. . . .	11.	IV.	402.	4.
36.	Vier neue mondförmige Flächen, deren Inhalt quadrirbar ist. . . .	21.	IV.	375.	2.
	32. Dr. R. Clausius, damals zu Berlin.				
1.	Über die Lichtzerstreuung in der Atmosphäre.	34.	II.	122.	26.
2.	Über die Intensität des durch die Atmosphäre reflectirten Sonnenlichtes. Fortsetzung von No. 1.	36.	III.	185.	31.
	33. E. Collins, Staatsrath und Akademiker zu Petersburg.				
1.	Neuer Beweis der Zerlegbarkeit ganzer Functionen in reelle Factoren vom ersten und zweiten Grade.	18.	II.	119.	8.
	34. A. A. Cournot, Professor der Mathematik zu Paris.				
1.	Mémoire sur le mouvement d'un corps rigide, soutenu par un plan fixe.	5.	II.	133.	30.
2.	Suite de ce mémoire.	5.	III.	223	39.
		8.	I.	1	
	35. A. L. Crelle, Herausgeber dieses Journals.				
1.	Über die Schwungpumpe.	1.	I.	85.	10.
2.	Bemerkungen über die Abhandlung No. 4. S. 37 Heft I. Bd. 1. . .	1.	II.	118.	18.
3.	Von der Form länglicher Räder, durch welche sich die Ungleichheit der Wirkung der Kurbeln vermindern läfst.	1.	IV.	375.	13.
4.	Démonstration nouvelle du théorème du binome.	4.	III.	305.	4.
5.	Necrologe de Mr. *Abel*.	4.	IV.	402.	3.
6.	Mémoire sur la convergence de la série du binome; pour faire suite à la démonstration du théorème du binome, donné tome 4. p. 305. .	5.	II.	187.	10.
7.	Recherches sur les expressions des puissances des cosinus et sinus des arcs multiples, et sur les expressions reciproques.	5.	II.	197.	25.
8.	Théorème sur les nombres.	5.	III.	296.	1.
9.	Bemerkungen zu der Abhandlung No. 26. Band 6. S. 303, den Ausdruck des körperlichen Inhalts der Pyramide betreffend.	6.	IV.	414.	3.
10.	Mémoire sur la théorie des puissances, des fonctions angulaires et des facultés analytiques.	7.	III.	253	120.
		7.	IV.	314	
11.	Table des racines primitives etc. pour les nombres premiers depuis 3 jusqu'à 101; précédé d'une note sur le calcul de cette table. . .	9.	I.	27.	27.
12.	Mémoire sur la décomposition de fractions algébriques rationnelles. .	9.	III.	231	71.
		10.	I.	42	
13.	Comment, dans la trigonométrie sphérique, les formules de *Gauss*, et les analogies de *Neper*, qui en découlent, peuvent être tirées immédiatement et facilement des formules fondamentales.	12.	IV.	348.	2.
14.	Die Sätze von *Fourier* und *Sturm* zur Theorie der algebraischen Gleichungen.	13.	II.	119.	26.
15.	Wie sich die Division mit Zahlen erleichtern und zugleich sicherer ausführen läfst, als auf die gewöhnliche Weise.	13.	III.	209.	10.
16.	Zur Theorie des Kreises.	14.	I.	66.	4.
17.	Démonstration élémentaire du théorème de *Wilson* généralisé. . .	20.	I.	29.	28.

A.	B.	C.	D.	E.	F.
18.	Einige Bemerkungen über die Mittel zur Schätzung der Convergenz der allgemeinen Entwicklungsreihen mit Differenzen und Differentialen.	22.	III.	249.	27.
19.	Nachruf an *G. Reimer* sen.	23.	IV.	379.	1.
20.	Encyklopädische und elementare Darstellung der Theorie der Zahlen. 27. I. 6; 27. II. 107; 27. IV. 330; 28. II. 111; 29. I. 58; 29. II. 103.				373.
21.	Bemerkungen zu der Abhandlung No. 4. von *Öttinger*.	27.	III.	284.	2.
22.	Bemerkungen zu der Abhandlung No. 2. von *Slonimsky*.	28.	II.	189.	1.
23.	Demonstration d'un théorème de Mr. *Slonimsky* sur les nombres; avec une application de ce théorème au calcul de chiffres.	30.	III.	215.	15.
24.	Note sur la division abrégée en arithmétique.	31.	II.	167.	7.
25.	Mémoire sur les différentes manières de se servir de l'élasticité de l'air atmosphérique comme force motrice sur les chemins de fer. Une de ces manières constitue les chemins de fer *atmosphériques* proprement dits.	32. I. 14 32. II. 124 32. III. 231 32. IV. 311			163.
26.	Zur näherungsweisen Kreis-Quadratur.	32.	I.	91.	2.
27.	Anmerkung zu §. 1. der Abhandlung von *Öttinger* No. 5. über die analytischen Facultäten.	33.	I.	65.	3.
28.	Ein eigenthümlicher analytischer Fall bei der Theorie der Kurbel.	34.	III.	276.	4.
29.	Geometrische Aufgabe, nebst Auflösung.	34.	III.	282.	2.
30.	Notiz über *A. Göpel*.	35.	IV.	317.	2.
31.	Über Sparcassen. (S. auch Nachtrag No. 43.)	39.	III.	183.	41.
32.	Additions aux remarques de Mr. *Prehn* (No. 1.) sur le mémoire de l'éditeur No. 25.	40.	III.	193.	12.
33.	Pendule à mouvement perpétuel.	41.	III.	217.	10.
34.	Biographische Notiz über Herrn *Prehn*.	41.	IV.	364.	2.
35.	Notiz über *Gudermann*.	42.	III.	280.	1.
36.	Tafeln der kleinsten positiven Werthe von x_1 und x_2 in der ganzzahligen Gleichung $a_1 x_2 = a_2 x_1 + 1$.	42.	IV.	299.	15.
37.	Eine eigenthümliche Eliminationsrechnung.	43.	I.	37.	6.
38.	Aufgabe nebst Auflösung.	44.	I.	88.	2.
39.	Über die Sätze vom Parallelogramm der Kräfte und vom Hebel; so wie vom Parallepipedum der Kräfte.	44.	III.	220.	41.
40.	Zwei Zahlen-Aufgaben; die erste mit der Auflösung, die zweite noch aufzulösen.	44.	IV.	317.	18.
41.	Zur Theorie der Ebene.	45.	I.	15.	40.
42.	Geometrische und analytische Aufgaben.	45.	III.	283.	2.
43.	Über den Unterschied zwischen theoretischen und practischen Zinsrechnungen. (Nachtrag zu No. 31.)	49.	IV.	349.	18.
44.	Eine Eigenschaft der Zahlen.	50.	II.	187.	2.

36. Z. Dahse, Rechenkünstler aus Hamburg.

1.	Der Kreis-Umfang für den Durchmesser 1, auf 200 Decimalstellen berechnet.	27.	III.	198.	1.

37. A. v. Dawidof, damals in Moskau.

1.	Über die Gleichgewichts-Lagen eines mit seiner ganzen Grundfläche in eine Flüssigkeit getauchten geraden dreiseitigen Prisma.	38.	II.	158.	4.

38. Dr. F. Deahna, damals zu Cassel in Hessen.

1.	Neuer Beweis für die Auflösbarkeit der algebraischen Gleichungen durch reelle oder imaginäre Werthe der Unbekannten.	20.	IV.	337.	3.
2.	Über die Bedingungen der Integrabilität lineärer Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen einer beliebigen Anzahl veränderlicher Gröfsen.	20.	IV.	340.	10.

A.	B.	C.	D.	E.	F.
	39. Dr. ph. Dedekind, zu Göttingen.				
1.	Über ein Eulersches Integral.	45.	IV.	370.	4.
2.	Bemerkungen zu einer Aufgabe der Wahrscheinlichkeits-Rechnung.	50.	III.	268.	3.
3.	Ein Satz aus der Theorie der dreiaxigen Coordinatensysteme. . .	50.	III.	272.	3.
	40. Ch. Despeyrous, Professor der Mathematik zu Paris.				
1.	Recherches sur les surfaces isothermes, et sur l'attraction des ellipsoïdes.	31.	II.	136.	31.
	41. Dr. J. Dienger, Professor der Mathematik am polytechnischen Institut zu Carlsruhe.				
1.	Die *Lagrange*sche Formel und die Reihensummirung durch dieselbe.	34.	I.	75.	26.
2.	Die allgemeinen unendlichen Reihen in der Analysis und ihre Darstellung in geschlossenen Ausdrücken.	34.	III.	209.	35.
3.	Über die bestimmten Integrale mit imaginären Grenzen.	37.	IV.	363.	7.
4.	Zu Dr. *Pohls* Schrift „Der Electromagnetismus und die Bewegung der Himmelskörper."	37.	IV.	370.	3.
5.	Anwendung der bestimmten Integrale zur Reihensummirung; nebst Bemerkungen über die unendlichen Reihen und die bestimmten Integrale überhaupt.	38. III. 266) 38. IV. 331)			33.
6.	Ableitung einiger bestimmten Integrale aus den Formeln der Abhandlung Nr. 3.	39.	I.	62.	5.
7.	Einiges zur Zahlenlehre.	39.	I.	67.	6.
8.	Über ein merkwürdiges, aus einem *Euler*schen Satze sich ergebendes Theorem.	40.	III.	233.	2.
9.	Summirung der Reihen $1+\frac{r+1}{1}\varrho\cos\varphi+\frac{(r+1)(r+2)}{1.2}\varrho^2\cos 2\varphi\cdots+\frac{(r+1)(r+2)\ldots(r+n)}{1.2\ldots n}\varrho^n\cos n\varphi$ und $(r+1)\varrho\sin\varphi+\frac{(r+1)(r+2)}{1.2}\varrho^2\sin 2\varphi\cdots+\frac{(r+1)(r+2)\ldots(r+n)}{1.2\ldots n}\varrho^n\sin n\varphi$	41.	I.	48.	6.
10.	Einige Reihensummirungen, vermittelt durch die bestimmten Integrale $\int_0^\infty e^{-ax}\cos bx.\partial x$ und $\int_0^\infty e^{-ax}\sin bx.\partial x$.	41.	II.	137.	4.
11.	Über das Integral $\int_0^1 \frac{1}{(a-xz)^{r+1}}\cdot\frac{\partial z}{(1-z)^{1-n}z^n}$.	42.	IV.	283.	4.
12.	Die *Lagrange*sche Umkehrungsformel. Directer Beweis des *Taylor*schen Satzes.	42.	IV.	287.	12.
13.	Summirung einiger Reihen, vermittelt durch die Entwicklung der Potenz $(1-ax-cx^2)^{-m}$.	43.	I.	88.	5.
14.	Summe von Reihen, ausgedrückt durch bestimmte Integrale. Anwendung dieser Sätze.	46.	II.	119.	26.
	42. † Dr. Dietlein, weiland Oberbauinspector zu Berlin.				
1.	Zur Theorie der allgemeinen Kuppelung (universal joint) der Wellen.	6.	III.	296.	7.
2.	Zur Theorie der Fuhrwerke.	8.	II.	169.	9.
	43. Dr. Dippe, damals zu Halle.				
1.	Über einige Aufgaben und Lehrsätze des Herrn Prof. *Steiner*. . .	16.	I.	65.	12.
	44. Dr. M. G. Lejeune Dirichlet, Akademiker und Professor der Mathematik zu Berlin.				
1.	Recherches sur les diviseurs premiers d'une classe de formules du quatrième degré.	3.	I.	35.	35.

A.	B.	C.	D.	E.	F.
2.	Mémoire sur l'impossibilité de quelques équations indéterminées du cinquième degré.	3.	IV.	354.	22.
3.	Démonstrations nouvelles de quelques théorèmes relatifs au nombres.	3.	IV.	390.	4.
4.	Question d'analyse indéterminée.	3.	IV.	407.	2.
5.	Note sur les Intégrales définies.	4.	I.	94.	5.
6.	Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites donnés.	4.	II.	157.	13.
7.	Solution d'une question relative à la théorie mathématique de la chaleur.	5.	III.	287.	9.
8.	Démonstration d'une propriété analogue à la loi de réciprocité qui existe entre deux nombres premiers quelconques.	9.	IV.	379.	11.
9.	Démonstration du théorème de *Fermat* pour le cas des 14mes puissances.	9.	IV.	390.	4.
10.	Sur les intégrales Eulériennes.	15.	III.	258.	5.
11.	Sur les séries dont le terme général dépend de deux angles, et qui servent à exprimer des fonctions arbitraires entre des limites données.	17.	I.	35.	22.
12.	Sur l'usage des intégrales définies dans la sommation des séries finies ou infinies.	17.	I.	57.	11.
13.	Sur la manière de résoudre l'équation $t^2 - pu^2 = 1$ au moyen des fonctions circulaires.	17.	III.	286.	5.
14.	Sur l'usage des séries infinies dans la théorie des nombres.	18.	III.	259.	16.
15.	Recherches sur diverses applications de l'analyse infinitésimale à la théorie des nombres.	19.	IV.	324)	80.
		21.	I.	1	
		21.	II.	134)	
16.	Auszug aus einer, der Akademie der Wissenschaften zu Berlin am 5. März 1840 vorgelesenen Abhandlung.	21.	I.	98.	3.
17.	Untersuchungen über die Theorie der complexen Zahlen.	22.	IV.	375.	4.
18.	Recherches sur les formes quadratiques à coefficients et à indéterminées complexes.	24.	IV.	291.	81.
19.	Sur un moyen général de vérifier l'expression du potentiel relatif à une masse quelconque, homogène ou hétérogène.	32.	I.	80.	5.
20.	Über die Stabilität des Gleichgewichts.	32.	I.	85.	4.
21.	Über die Reduction der positiven quadratischen Formen mit drei unbestimmten ganzen Zahlen.	40.	III.	209.	20.
22.	Über die Zerlegbarkeit der Zahlen in drei Quadrate.	40.	III.	228.	5.
23.	Nachricht über *Jacobi's* wissenschaftlichen Nachlafs.	42.	I.	91.	2.
24.	Über den ersten der von *Gauſs* gegebenen Beweise des Reciprocitäts-Gesetzes in der Theorie der quadratischen Reste.	47.	II.	139.	12.
25.	Über ein die Division betreffendes Problem.	47.	II.	151.	4.
26.	De formarum binarium secundi gradus compositione.	47.	II.	155.	6.

45. † Dr. E. H. Dirksen, weiland Professor und Akademiker zu Berlin.

1.	Über die Zerfällung einer echtgebrochenen Function in einfache Partialbrüche.	1.	I.	53.	8.
2.	Bemerkungen über die *Lagrange*sche Interpolationsformel.	1.	III.	221.	2.
3.	Über die Convergenz einer nach den Sinussen und Cosinussen der Vielfachen eines Winkels fortschreitenden Reihe.	4.	II.	170.	9.
4.	Über die Auflösung der numerischen Gleichungen mit einer Unbekannten.	14.	IV.	316.	14.

A.	B.	C.	D.	E.	F.
	46. Dr. Druckenmüller, Director des Königlichen Gewerbe-Instituts zu Berlin.				
1.	Über derivirte Linien.	26.	I.	1.	25.
2.	Über die Zapfenreibung bei stehenden Wellen.	48.	III.	276.	16.
	47. Dumas, Schulamts-Candidat, früher Mitglied des mathematisch-physicalichen Vereins zu Königsberg in Preufsen.				
1.	Über die Bewegung des Raumpendels, mit Rücksicht auf die Rotation der Erde.	50.	I.	52)	88.
		50.	II.	126)	
	48. F. Eberty, damals zu Berlin.				
1.	Beweis der Lehrsätze Band 2. Heft 3. No. 54. S. 287.	5.	I.	107.	3.
	49. Dr. O. Eisenlohr, Professor der Mathematik und Physik zu Carlsruhe in Baden.				
1.	Entwicklung der Functionsweise der Bernoullischen Zahlen. . . .	28.	III.	193.	20.
2.	Vollständige Auflösung der cubischen Gleichungen durch die Methode der Wurzel-Differenzen.	42.	III.	236.	38.
	50. † Dr. G. Eisenstein, weiland Privatdocent an der Universität und Akademiker zu Berlin.				
1.	Théorèmes sur les formes cubiques, et solution d'une équation du quatrième degré à quatre indéterminées.	27.	I.	75.	5.
2.	Über die Anzahl der quadratischen Formen, welche in der Theorie der complexen Zahlen zu einer reellen Determinante gehören. . .	27.	I.	80.	1.
3.	Allgemeine Auflösung der Gleichungen von den ersten vier Graden.	27.	I.	81.	3.
4.	Aufgaben (aus der Zahlentheorie).	27.	I.	86.	3.
5.	Untersuchungen über die cubische Form mit zwei Variabeln. . . .	27.	II.	89.	16.
6.	Über eine merkwürdige identische Gleichung.	27.	II.	105.	2.
7.	Bemerkungen über die elliptischen und *Abel*schen Transcendenten.	27.	II.	185.	7.
8.	Transformations remarquables de quelques séries.	27.	III.	193)	9.
		28.	I.	36)	
9.	Beiträge zur Kreistheilung.	27.	III.	269.	10.
10.	Lehrsätze und Aufgaben aus der Zahlentheorie.	27.	III.	281.	3.
11.	Elementare Ableitung einer merkwürdigen Relation zwischen zwei ungleichen Producten.	27.	IV.	285.	4.
12.	Beweis des Reciprocitätssatzes für die cubischen Reste in der Theorie der aus dritten Wurzeln der Einheit zusammengesetzten complexen Zahlen.	27.	IV.	289)	30.
		28.	I.	28)	
13.	Über die Anzahl der quadratischen Formen in den verschiedenen complexen Theorieen.	27.	IV.	311.	6.
14.	Einfacher Algorithmus zur Bestimmung des Werths von $\left(\frac{a}{b}\right)$. . .	27.	IV.	317.	2.
15.	Eigenschaften und Bezeichnungen der Ausdrücke, welche bei der Auflösung der allgemeinen cubischen Gleichungen erscheinen. . .	27.	IV.	319.	3.
16.	Neuer und elementarer Beweis des *Legendre*schen Reciprocitäts-Gesetzes.	27.	IV.	322.	8.
17.	La loi de reciprocité, tirée des formules de Mr. *Gauss*, sans avoir déterminé préalablement le signe du radical.	28.	I.	41.	3.
18.	Neuer Beweis und Verallgemeinerung des binomischen Lehrsatzes. .	28.	I.	44.	5.
19.	Entwicklung von $a^{a^{a^{\cdots}}}$	28.	I.	49.	4.

A.	B.	C.	D.	E.	F.
20.	Lois de réciprocité.	28.	I.	53.	15.
21.	Aufgaben aus der Algebra.	28.	II.	191.	1.
22.	Einfacher Beweis, und Verallgemeinerung des Fundamentaltheorems für die biquadratischen Reste.	28.	III.	223.	23.
23.	Geometrischer Beweis des Fundamentaltheorems für die quadratischen Reste.	28.	III.	246.	3.
24.	Allgemeine Untersuchungen über die Formen dritten Grades mit drei Variabeln, welche der Kreistheilung ihre Entstehung verdanken. . .	28.	IV.	289.	111.
		28.	I.	19.	
25.	Theorema (analyticum).	29.	I.	96.	1.
26.	Application de l'algèbre à l'arithmétique transcendante.	29.	II.	177.	8.
27.	Beiträge zur Theorie der elliptischen Functionen.	30.	III.	185.	180.
		32.	I.	59.	
		35.	II.	137.	
		35.	III.	185.	
28.	Notiz über Partialbrüche.	32.	I.	71.	4.
29.	Neue Theoreme der höheren Arithmetik.	35.	II.	117.	20.
30.	Aufgaben und Lehrsätze.	35.	III.	275.	2.
31.	Note sur la représentation d'un nombre par la somme de cinq carrés.	35.	IV.	368.	1.
32.	Zur Theorie der quadratischen Zerfällung der Primzahlen $8n+3$, $7n+2$ und $7n+4$.	37.	II.	97.	30.
33.	Über die Irreductibilität und einige andere Eigenschaften der Gleichung, von welcher die Theilung der ganzen Lemniscate abhängt.	39.	II.	160.	84.
		39.	III.	224.	
		39.	IV.	275.	
34.	Lehrsätze.	39.	II.	180.	3.
35.	Über ein einfaches Mittel zur Auffindung der höhern Reciprocitätsgesetze und der mit ihnen zu verbindenden Ergänzungssätze. . .	39.	IV.	351.	14.
36.	Tabelle der reducirten positiven ternären quadratischen Formen; nebst den Resultaten neuer Forschungen über diese Formen, in besonderer Rücksicht auf ihre tabellarische Berechnung.	41.	II.	141.	66.
		41.	III.	227.	
37.	Auszug eines Schreibens von Herrn Prof. *Richelot*.	44.	III.	261.	8.

51. Dr. Enke, Director der Sternwarte, Professor und Secretair der Akademie der Wiss. zu Berlin.

1.	Allgemeine Auflösung der numerischen Gleichungen.	22.	III.	193.	56.
2.	Bemerkungen zu der Abhandlung No. 22. Band 26. S. 333 (No. 2. von *Reuschle*).	28.	III.	213.	10.

52. † Dr. J. A. Eytelwein, zu Berlin, weiland Ober-Landesbaudirector etc.

1.	Von der Bestimmung der Wassermenge eines Stromes.	1.	I.	1.	10.

53. Fasbender, damals Conrector zu Iserlohn.

1.	Beweis eines vom Herrn Professor *Steiner* aufgestellten Lehrsatzes Band 15. Heft 1. No. 26. 1.	25.	II.	186.	3.
2.	Ein Vieleck mit gegebenen Seiten ist am gröfsten, wenn seine Ecken in einem Kreise liegen.	26.	II.	181.	2.
3.	Über die gleichseitigen Dreiecke, welche um ein gegebenes Dreieck gelegt werden können.	30.	III.	230.	2.
4.	Auflösung einiger vom Herrn Professor *Steiner* Band 16. Heft 1. No. 12. gestellten Aufgaben.	33.	IV.	366.	5.

A.	B.	C.	D.	E.	F.
	54. L. Feldt, Professor der Mathematik zu Braunsberg in Ostpreufsen.				
1.	Neuer Beweis der *Gauss*ischen Formeln in der sphärischen Trigonometrie.	7.	I.	68.	4.
	55. Dr. A. Fischer, damals zu Königsberg in Pr.				
1.	Resolutio algebraica aequationis $x^{257}-1=0$.	11.	III.	201.	18.
	56. † Dr. W. A. Förstemann, weiland Professor der Mathematik zu Danzig.				
1.	Aus der Gleichung $\sqrt{(a_1+x)}+\sqrt{(a_2+x)}+\sqrt{(a_3+x)}+\sqrt{(a_4+x)}+\sqrt{(a_5+x)}+\sqrt{(a_6+x)}=0$, wo die a von einander verschiedene gegebene Gröfsen sind, x zu finden.	8.	III.	317.	3.
2.	Geometrische Aufgaben.	8.	III.	320.	1.
3.	Umkehrung des Ptolomäischen Satzes.	13.	III.	233.	4.
4.	Einfacher Beweis eines Satzes der Combinationslehre.	13.	III.	237.	3.
5.	Über das Rationalmachen algebraischer Gleichungen.	14.	III.	236.	26.
	57. Frh. v. Forstner, Königlich-Preufsischer Obrist-Lieutenant zu Berlin.				
1.	Über den innern Grund der Erscheinung der Aberration des Lichtes.	20.	II.	101.	2.
	58. Dr. M. L. Frankenheim, damals zu Breslau.				
1.	Einige Sätze aus der Theorie der geraden Linien.	8.	II.	178.	9.
	59. Dr. G. Friedländer, Königlicher Bibliothekar zu Berlin.				
1.	*Leonhardi Euleri* commentatio de matheseos sublimioris utilitate; ex autographo edita.	35.	II.	106.	11.
	60. Dr. Garbinsky, Professor an der Universität und Director der polytechnischen Schule zu Warschau.				
1.	Quelques observations sur les quatre droites données dans l'espace et non comprises deux à deux dans un même plan.	5.	II.	174.	8.
	61. † Dr. Gaufs, weiland Geheimer Hofrath und Professor zu Göttingen.				
1.	Beweis eines algebraischen Lehrsatzes.	3.	I.	1.	4.
2.	Über ein allgemeines Grundgesetz der Mechanik.	4.	III.	232.	4.
3.	Elementare Ableitung eines, zuerst von *Legendre* aufgestellten Lehrsatzes der sphärischen Trigonometrie.	22.	I.	96.	1.
	62. Dr. Gerling, Professor der Mathematik zu Marburg.				
1.	Fragment über die Begründung des Begriffes der Ebene.	20.	IV.	332.	5.
	63. † Mad. Sophie Germain, zu Paris.				
1.	Mémoire sur la courbure des surfaces.	7.	I.	1.	29.
2.	Note sur la manière dont se composent les valeurs de y et z dans l'équation $\frac{4(x^p-1)}{x-1}=y^2\pm pz^2$ et celles de y' et z' dans l'équation $\frac{4(x^{p^2}-1)}{x-1}=Y'^2\pm pZ'^2$.	7.	III.	201.	4.

A.	B.	C.	D.	E.	F.
	64. Gerwien und v. Holleben, damals Königlich-Preufsische Hauptleute.				
1.	Anzeige ihrer „Aufgaben, Systeme und Sammlungen aus der Geometrie, etc.“	9.	III.	312.	1.
	65. Gerwien, damals Königlich-Preufsischer Hauptmann.				
1.	Zerschneidung jeder beliebigen Anzahl von gleichen geradlinigen Figuren in dieselben Stücke.	10.	III.	288.	7.
2.	Zerschneidung jeder beliebigen Menge verschieden gestalteter Figuren von gleichem Inhalt auf der Kugelfläche, in dieselben Stücke.	10.	III.	235.	6.
3.	Beweise einiger für die Kugel Statt findenden Sätze.	11.	II.	130.	6.
4.	Einige geometrische Sätze.	11.	III.	264.	7.
	66. †Dr. A. Göpel, weiland Königlicher Bibliothecar zu Berlin.				
1.	Theoriae transcendentium Abelianarum primi ordinis adumbratio.	35.	IV.	277.	36.
2.	Über Projectivität der Kegelschnitte, als krummer Gebilde.	36.	IV.	317.	40.
3.	De aequationibus secundi gradus indeterminatis.	45.	I.	1.	13.
4.	Curriculum vitae.	45.	I.	14.	1.
	67. Dr. C. H. Gräffe, Professor der Mathematik an der Universität zu Zürich.				
1.	Beweis eines Satzes aus der Theorie der numerischen Gleichungen.	10.	III.	288.	3.
	68. Dr. H. Grafsmann, Professor der Mathematik am Gymnasio zu Stettin.				
1.	Theorie der Centralen.	24.	III.	262	47.
		24.	IV.	372	
		25.	I.	57	
2.	Grundzüge einer rein geometrischen Theorie der Curven; mit Anwendung einer rein geometrischen Analyse.	31.	II.	111.	22.
3.	Über die Erzeugung der Curven dritter Ordnung durch gerade Linien; und über geometrische Definitionen dieser Curven.	36.	II.	177.	6.
4.	Der allgemeine Satz über die Erzeugung algebraischer Curven durch Bewegung gerader Linien.	42.	III.	187.	6.
5.	Die höhere Projectivität und Perspectivität in der Ebene; dargestellt durch geometrische Analyse.	42.	III.	193.	11.
6.	Die höhere Projectivität in der Ebene; dargestellt durch Functionsverknüpfungen.	42.	III.	204.	9.
7.	Erzeugung der Curven vierter Ordnung durch Bewegung gerader Linien.	44.	I.	1.	25.
8.	Allgemeiner Satz über die lineale Erzeugung aller algebraischen Oberflächen.	49.	I.	1.	9.
9.	Grundsätze der stereometrischen Multiplication.	49.	I.	10.	11.
10.	Über die verschiedenen Arten der linealen Erzeugung algebraischer Oberflächen.	49.	I.	21.	16.
11.	Die stereometrische Gleichung zweiten Grades, und die dadurch dargestellten Oberflächen.	49.	I.	37.	10.
12.	Die stereometrischen Gleichungen dritten Grades, und die dadurch erzeugten Oberflächen.	49.	I.	47.	19.
13.	Sur les différents genres de multiplication.	49.	II.	123.	19.

A.	B.	C.	D.	E.	F.
	69. Ch. Graves, Professor an der Universität zu Dublin.				
1.	Elementary geometrical proof of *Joachimsthal's* theorem.	42.	III.	279.	1.
	70. † G. Green, weiland Professor an der Universität zu Cambridge.				
1.	An essay on the application of mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism. 39. I. 76; 44. IV. 356; 47. II. 161;	47.	III.	195.	97.
	71. Grüson, Geheimer Hofrath und Akademiker zu Berlin.				
1.	Zur Elementar-Geometrie.	10.	III.	275.	4.
	72. Dr. J. A. Grunert, Professor der Mathematik an der Universität zu Greifswalde.				
1.	Beweis des *Harriot*schen Satzes.	2.	IV.	335.	10.
2.	Summirung der Reihe $1+\frac{x}{z}+\frac{x(x-1)}{z(z-1)}+\frac{x(x-1)(x-2)}{z(z-1)(z-2)}\ldots$ . .	2.	IV.	358.	6.
3.	Einfacher Beweis der von *Cauchy* und *Euler* gefundenen Sätze von Figurennetzen und Polyëdern.	2.	IV.	367.	1.
4.	Ein geometrischer Lehrsatz.	4.	IV.	396.	1.
5.	Einige stereometrische Sätze.	5.	I.	37.	14.
6.	Démonstration d'un théorème d'arithmétique proposé dans les Annales de mathématiques de Mr. *Gergonne* tome 19. p. 256.	5.	II.	185.	2.
7.	Über die höheren Differentiale der Function $z=\frac{x}{x^2+y^2}$, und über die Entwickelung einiger bestimmter Integrale.	8.	II.	146.	7.
8.	Über die Verwandlung der Coordinaten im Raume.	8.	II.	153.	7.
9.	Ableitung des *Fermat*schen und des *Wilson*schen Satzes aus einer gemeinschaftlichen Quelle.	8.	II.	187.	5.
10.	Über *Lambert's* Theorem von der Quadratur parabolischer Sectoren, und verwandte Sätze.	16.	I.	21.	18.
11.	Über die Summirung der Reihen von der Form $A\varphi(0)$, $A_1\varphi(1)x$, $A_2\varphi(2)x^2$, ... $A_n\varphi(n)x^n$, wo A eine beliebige constante Gröfse, A_n eine beliebige und $\varphi(n)$ eine ganze rationale algebraische Function der positiven ganzen Zahl n bezeichnet.	25.	III.	240.	40.
	73. † Dr. Gudermann, weiland Professor der Mathematik an der Universität zu Münster.				
1.	Ein geometrischer Lehrsatz.	4.	I.	100.	1.
2.	Über die Potenzial-Functionen.	4.	III.	287.	9.
3.	Geometrische Lehrsätze.	5.	III.	318.	1.
4.	Combinatorisch-analytische Abhandlung; enthaltend den Beweis der vier Summationsformeln Band 3. S. 207.	5.	IV.	402.	12.
5.	Theorie der Potenzial- oder cyclisch-hyperbolischen Functionen. .	6.	I.	1	158.
		6.	II.	162	
		6.	IV.	311	
6.	Tafeln zu No. 5. gehörig. 7. I. 72; 7. II. 176; 8. I. 64; 8. II. 194; 8. III. 301; 9. I. 81; 9. II. 193; 9. III. 201; 9. IV. 362; 15. II. 173.				207.
7.	Geometrische Lehrsätze.	6.	II.	212.	1.
8.	Über die analytische Sphärik.	6.	III.	244.	11.
9.	Zu den Elementen der Geometrie.	6.	III.	303.	7.
10.	Umformung einer Reihe von sehr allgemeiner Form.	7.	III.	306.	3.

A.	B.	C.	D.	E.	F.
11.	Beweis des *Steiner*schen Lehrsatzes No. 27. Band 2. S. 190, und Ableitung anderer, eben so einfacher Relationen.	8.	II.	160.	9.
12.	Über die niedere Sphärik.	8.	IV.	363.	7.
13.	Lehrsätze und Aufgaben.	9.	I.	101.	2.
14.	Analytische Aufgaben.	9.	IV.	412.	1.
15.	Analytische und geometrische Aufgaben.	11.	II.	199.	1.
16.	Die loxodromische Linie und ihr merkwürdiger Zusammenhang mit der sphärischen Kettenlinie.	11.	IV.	394.	5.
17.	Geometrische Lehrsätze; zu beweisen.	12.	I.	82.	7.
18.	Lehrsätze, zu beweisen, und Anmerkungen zu dem Aufsatze No. 15. Band 12.	12.	IV.	362.	3.
19.	Beitrag zur analytischen Sphärik.	13.	III.	262.	12.
20.	Neue und directeste Methode, aus den gemessenen Höhen zweier bekannten Sterne und der Zwischenzeit der beiden Beobachtungen die Polhöhe zu finden.	13.	III.	274.	3.
21.	Integralia elliptica tertiae speciei reducendi methodus simplicior, quae simul ad ipsorum applicationem facillimam et computum numericum expeditum perducit.	14.	II.	169) 185)	63.
22.	Methodus nova et simplex computandi valores integralium $\int^{\varphi} P\partial\varphi$ et iteratorum $\iint P\partial\varphi^2$, $\iiint P\partial\varphi^3$ etc., in quibus P est functio qualiscunque quantitatis $\sin\varphi$ sive $\cos\varphi$, per series rapide convergentes.	14. 15.	II. I.	182) 100)	4.
23.	Einige Bemerkungen über elliptische Functionen.	16.	I.	78.	2.
24.	Series novae, quarum ope integralia elliptica primae et secundae speciei computantur, simul ea quorum moduli sunt conjugati. . . .	16. 17.	IV. IV.	366) 382)	13.
25.	Aufgaben und Lehrsätze.	17.	IV.	389.	3.
26.	Theorie der Modular-Functionen und der Modular-Integrale. 18. I. 1; 18. II. 142; 18 III. 220; 18. IV. 303; 19. I. 46; 19. II. 119; 19. III. 244; 20. I. 62; 20. II. 103; 21. III. 240; 23. IV. 301; 25. IV. 281.				646.
27.	De curvis aequidistantibus sphaericis disquisitiones generales. . . .	25.	II.	119.	10.
28.	Additamentum ad functionis $\Gamma(a) = \int^{\infty} e^{-x}.x^{a-1}\partial x$ theoriam. . .	29.	III.	209.	4.
29.	De curvis catenariis sphaericis dissertatio analytico-geometrica. . .	33. III. 189) 33. IV. 281)			72.
30.	De pendulis sphaericis, et de curvis, quae ab ipsis describentur, sphaericis.	38.	III.	185.	31.
31.	Die Gesetze der Succession einer Reihe sphärischer Kreise, von welchen jeder den nächstfolgenden und zugleich zwei feste Kreise berührt, deren einer im Innern des andern enthalten ist.	39.	I.	42.	8.
32.	De integralibus $\int_0^{\partial u}\sqrt{(1-k^2\mathrm{snc}^2\frac{1}{2}(a+u)\mathrm{snc}^2\frac{1}{2}(a-u))}$ et $\int_0^{\partial u}\sqrt{(1-k^2\mathrm{sn}^2 i(a+u)\mathrm{sn}^2\frac{1}{2}(a-u))}$.	39.	I.	50.	12.
33.	Entwickelung der Modular-Integrale oder der elliptischen Transcendenten aller Arten, nach Potenzen des Moduls, nach Functionen der Amplitude und nach neuen Functionen des Parameters; sammt einer Theorie dieser neuen Functionen.	41.	II.	93.	44.
34.	De arithmetice determinanda area oblongi sphaerici e datis lateribus, et de theoremate Pythagorae e planimetria in sphaericam evehendo.	42.	III.	280.	2.
35.	Superficies ellipsoïdis construitur e centro dato et e semi-axibus datis; et plana construuntur, quibus superficies tangentur.	42.	III.	282.	1.
36.	De curva quarti ordinis sphaerica, de circulari scalena.	43.	II.	93.	21.

A.	B.	C.	D.	E.	F.
37.	Über die drehende Bewegung fester Körper um ihren Schwerpunct.	43.	II.	114.	47.
38.	Fundamenta trigonometriae exactae; imprimis de lineis brevissimis, vulgo dictis geodaeticis, in superficie sphaeroïdica.	43.	IV.	294.	46.

74. Dr. C. Guetzlaff, Professor der Mathematik zu Marienburg in Westpreufsen.

1.	Aequatio modularis pro transformatione functionum ellipticarum septimi ordinis.	12.	II.	173.	5.

75. Dr. Bierens de Haan, Oberlehrer der Mathematik am Gymnasio zu Deventer.

1.	Über eine Sammlung von bestimmten Integralen.	47.	III.	222.	3.

76. † Hachette, weiland Akademiker und Professor der Mathematik zu Paris.

1.	Einige Bemerkungen über Flächen zweiter Ordnung (Zusatz zu des Verf. Traité de géom. descr. Paris 1822).	1.	IV.	339.	10.
2.	Über die Krümmung der Flächen; nebst Auflösung eines besondern Falles aus der Perspective der krummen Flächen.	1.	IV.	371.	4.
3.	Note sur les surfaces reglées.	8.	IV.	358.	2.

77. Dr. Haedenkamp, zu Hamm in Westphalen.

1.	De transformatione integralis $\iint \frac{\partial\varphi\,\partial\psi}{\sqrt{(\sin^2\nu - \sin^2\varphi\cos^2\psi)}}$	20.	II.	97.	4.
2.	Auflösung der Aufgaben Band 17. S. 289.	20.	IV.	328.	4.
3.	Über Transformation vielfacher Integrale.	22.	II.	184.	9.
4.	Über *Abel*sche Integrale.	25.	II.	178.	6.
5.	Über die Wirkung des durch eine Drathspirale gehenden electrischen Stromes auf eine in der Spirale befindliche weiche Eisenmasse.	44.	I.	83.	5.

78. Dr. P. A. Hansen, Director der Sternwarte bei Gotha.

1.	Auszug eines Schreibens an den Herrn Prof. *C. G. J. Jacobi*.	42.	I.	1.	11.

79. Dr Heilermann, zu Trier.

1.	Über die Verwandlung der Reihen in Kettenbrüche.	33.	II.	174.	15.
2.	Über die Reste, welche bei Anwendung des *Sturm*schen Satzes vorkommen.	43.	I.	43.	17.
3.	Über die Verwandlung der Kettenbrüche in Reihen.	46.	I.	88.	8.
4.	Independente Berechnung der *Sturm*schen Reste.	48.	II.	190.	17.

80. v. Heim, Königlich Würtembergischer Oberst-Lieutenant zu Stuttgart.

1.	Über die Gesetze der Biegung elastischer Körper.	37.	IV.	305.	40.
2.	Beitrag zur Lehre von den Schwingungen electrischer fester Körper.	40.	I.	1.	20.
3.	Zur Lehre von der Flugbahn der Artillerie-Geschosse.	42.	II.	151.	18.
4.	Beitrag zur Theorie der Bewegung der Räderfuhrwerke, mit Inbegriff der Dampfwagen.	46.	I.	48	132.
		46.	II.	164	
		46.	III.	234	
		46.	IV.	328	

A.	B.	C.	D.	E.	F.
	81. Dr. E. Heine, Professor der Mathematik an der Universität zu Bonn.				
1.	Über einige Aufgaben, welche auf partielle Differentialgleichungen führen.	26.	III.	185.	32.
2.	Beitrag zur Theorie der Anziehung und der Wärme.	29.	III.	185.	24.
3.	Summation der Reihen $\frac{1}{(b+a)^{1+\varrho}}+\frac{1}{(b+2a)^{1+\varrho}}+\frac{1}{(b+3a)^{1+\varrho}}\cdots$ für $\varrho=0$.	31.	II.	133.	3.
4.	Verwandlung von Reihen in Kettenbrüche.	32.	III.	205.	5.
5.	Über die Reihe $1+\frac{(q^\alpha-1)(q^\beta-1)}{(q-1)(q^\gamma-1)}x+\frac{(q^\alpha-1)(q^{\alpha+1}-1)(q^\beta-1)(q^{\beta+1}-1)}{(q-1)(q^2-1)(q^\gamma-1)(q^{\gamma+1}-1)}x^2\cdots$	32.	III.	210)	27.
		34.	IV.	285)	
6.	Abrifs einer Theorie der elliptischen Functionen.	39.	II.	122.	16.
7.	Über die in der *Gauss*ischen „Summatio quarumdam serierum singularium" vorkommenden Reihen.	39.	IV.	288.	2.
8.	Theorie der Anziehung eines Ellipsoïds.	42.	I.	70.	13.
9.	Der *Eisenstein*sche Satz über Reihen-Entwicklung algebraischer Functionen.	45.	IV.	285.	18.
10.	Untersuchungen über ganze Functionen.	48.	III.	237.	6.
11.	Fernere Untersuchungen über ganze Functionen.	48.	III.	243.	24.
12.	Über die Entwicklung von Wurzeln algebraischer Gleichungen in Potenzreihen.	48.	III.	267.	9.
13.	Directer Beweis der Gleichheit zweier bestimmten Integrale.	50.	IV.	323.	2.
	82. Dr. Heinen, Director der Realschule zu Düsseldorf.				
1.	Auflösung der Aufgaben, und Beweise der Lehrsätze 5, 6, 7, 8, 9 im 1. Hefte S. 96 und 29, 30, 31, 32, 33 im 2. Hefte S. 191 des zweiten Bandes dieses Journals.	3.	III.	285.	16.
2.	Lehrsätze, zu beweisen.	16.	IV.	374.	2.
3.	Problematis analytici, a cl. *Hill* hujus diarii Vol. 16. pag. 95 propositi solutio.	17.	I.	92.	2.
4.	Einiges in Bezug auf den Lehrsatz Band 2. No. 63. S. 291.	18.	II.	176.	9.
5.	Über einige Sätze des Herrn Prof. *Steiner*.	23.	IV.	289.	12.
	83. Dr. Hellerung, zu Wismar.				
1.	Geometrischer Lehrsatz.	3.	III.	312.	1.
	84. C. Hermite, Professor der Mathematik zu Paris.				
1.	Extraits de deux lettres de Mr. *Ch. Hermite* à Mr. *C. G. J. Jacobi*.	32.	IV.	277.	23.
2.	Note sur la réduction des fonctions homogènes à coëfficients entiers et à deux indéterminées.	36.	IV.	357.	8.
3.	Sur la théorie des formes quadratiques ternaires.	40.	II.	173.	5.
4.	Extraits de lettres de Mr *Ch. Hermite* à Mr. *C. G. J. Jacobi* sur différents objects de la théorie des nombres.	40.	III.	261)	55.
		40.	IV.	279)	
5.	Sur l'introduction des variables continues dans la théorie des nombres.	41.	III.	191.	26.
6.	Sur la théorie des formes quadratiques ternaires indéfinies.	47.	IV.	307.	7.
7.	Sur la théorie des formes quadratiques. Premier mémoire.	47.	IV.	313.	30.
8.	Sur la théorie des formes quadratiques. Second mémoire.	47.	IV.	343.	26.
	85. Dr. O. Hesse, Professor der Mathematik an der Universität zu Königsberg in Pr.				
1.	Über Oberflächen zweiter Ordnung.	18.	II.	101.	18.
2.	De curvis et superficiebus secundi ordinis.	20.	IV.	285.	14.

A.	B.	C.	D.	E.	F.
3.	Über die Constanten der Oberflächen zweiter Ordnung, von welchen beliebige neun Puncte gegeben sind.	24.	I.	36.	4.
4.	Über das geradlinige Rechteck auf dem Hyperboloïd.	24.	I.	40.	4.
5.	De integratione aequationis differentialis partialis $A_1 - A_2\frac{\partial x_1}{\partial x_2} - A_3\frac{\partial x_1}{\partial x_3}\cdots - A_{n-1}\frac{\partial x_1}{\partial x_{n-1}} = A_n\left[x_2\frac{\partial x_1}{\partial x_2} + x_3\frac{\partial x_1}{\partial x_3}\cdots + x_{n-1}\frac{\partial x_1}{\partial x_{n-1}}\right] = 0,$ designantibus A_1, A_2, A_3, ... A_n functiones quaslibet variabilium x_1, x_2, x_3, ... x_{n-1} lineares.	25.	II.	171.	7.
6.	Über die linearen Constanten des rechten Schnittpunctes dreier Oberflächen zweiter Ordnung, wenn sieben Schnittpuncte derselben gegeben sind.	26.	II.	147.	8.
7.	Über die Bildung der Endgleichung, welche durch Elimination einer Variabeln aus zwei algebraischen Gleichungen hervorgeht, und die Bestimmung ihres Grades.	27.	I.	1.	5.
8.	Über die Elimination der Variabeln aus drei algebraischen Gleichungen vom zweiten Grade mit zwei Variabeln.	28.	I.	68.	29.
9.	Über die Wendepuncte der Curven dritter Ordnung. (Fortsetzung von No. 8.)	28.	II.	97.	11.
10.	Algebraische Auflösung derjenigen Gleichungen 9ten Grades, deren Wurzeln die Eigenschaft haben, dafs eine gegebene rationale und symmetrische Function $\theta(x_\lambda, x_\mu)$ je zweier Wurzeln x_λ und x_μ eine dritte Wurzel giebt, so dafs gleichzeitig $x_\varkappa = \theta(x_\lambda, x_\mu)$, $x_\lambda = \theta(x_\mu, x_\varkappa)$ und $x_\mu = \theta(x_\varkappa, x_\lambda)$ ist.	34.	III.	193.	16.
11.	Über die Curven dritter Ordnung, und die Kegelschnitte, welche diese Curven in drei verschiedenen Puncten berühren. (Fortsetzung von No. 8. und 9.)	36.	II.	143.	34.
12.	Über Curven dritter Classe und Curven dritter Ordnung. (Fortsetzung von No. 8, 9 und 11.)	38.	III.	241.	16.
13.	Eigenschaft der Wendepuncte der Curven dritter Ordnung und der Rückkehrtangenten der Curven dritter Classe. (Fortsetzung von No. 8, 9, 11 und 12.)	38.	III.	257.	5.
14.	Transformation einer bliebigen homogenen Function dritten Grades von zwei Variabeln, durch lineäre Substitution neuer Variabeln, in eine Form, welche nur die dritten Potenzen der neuen Variabeln enthält	38.	III.	262.	4.
15.	Zwei Schreiben an Herrn Prof. *C. G. J. Jacobi*.	40.	IV.	316.	2.
16.	Transformation einer beliebigen gegebenen homogenen Function vierten Grades von zwei Variabeln, durch lineäre Substitution neuer Variabeln in die Form, welche nur die geraden Potenzen der neuen Variabeln enthält.	41.	III.	243.	21.
17.	Algebraische Auflösung derjenigen Gleichungen 6ten Grades, zwischen deren Wurzeln x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3 die Bedingungsgleichung $(x_1-y_2)(x_2-y_3)(x_3-y_1)+(y_1-x_2)(y_2-x_3)(y_3-x_1)=0$ Statt findet.	41.	III.	264.	5.
18.	Eine Bemerkung zum *Pascal*schen Theorem.	41.	III.	269.	3.
19.	Über die Wendepuncte der algebraischen ebenen Curven und die Schmiegungs-Ebenen der Curven von doppelter Krümmung, welche durch den Schnitt zweier algebraischen Oberflächen entstehen. . .	41.	III.	272.	13.
20.	Über die ganzen homogenen Functionen von der dritten und vierten Ordnung zwischen drei Variabeln.	41.	IV.	285.	8.

A.	B.	C.	D.	E.	F.
21.	Über die Bedingung, unter welcher eine homogene ganze Function von n unabhängigen Variabeln, durch lineäre Substitutionen von n andern unabhängigen Variabeln auf eine homogene Function sich zurückführen läfst, die eine Variable weniger enthält.	42.	II.	117.	8.
22.	Über die geometrische Bedeutung der lineären Bedingungsgleichung zwischen den Coëfficienten einer Gleichung zweiten Grades. . . .	45.	I.	82.	9.
23.	Über die Eigenschaften der lineären Substitutionen, durch welche eine homogene ganze Function zweiten Grades, welche nur die Quadrate von vier Variabeln enthält, in eine Function von derselben Form transformirt wird.	45.	II.	93.	9.
24.	Über Determinanten und ihre Anwendung in der Geometrie; insbesondere auf Curven vierter Ordnung.	49.	III.	243.	20.
25.	Über die Doppeltangenten der Curven vierter Ordnung. . . .	49.	IV.	279.	54.
	86. Dr. Hessel, Professor der Mathematik an der Universität zu Marburg.				
1.	Nachtrag zu dem *Euler*schen Lehrsatze von den Polyëdern. . . .	8.	I.	13.	8.
	87. Dr. C. J. D. Hill, Professor der Mathematik an der Universität zu Lund.				
1.	Casum irreducibilem solvendi conatus.	2.	IV.	304.	3.
2.	Über die Integration logarithmisch-rationaler Differentiale.	3.	I.	101.	59.
3.	De approximata seriei, juxta data functionis derivata dispositae, summatione.	5.	IV.	319.	17.
4.	Additamenta ad conatum, casum irreducibilem solvendi.	7.	I.	44.	11.
5.	Theoremata demonstranda, et problemata resolvenda.	7.	I.	102.	2.
6.	Theoremata et problemata.	9.	I.	100.	1.
7.	Exemplum usus functionum iteratarum in theoria functionum integraliter transcendentium.	11.	II.	193.	5.
8.	Analysis aequationum aliquot, functiones duplici argumenti determinantium, videlicet: $(x,(y,z))=((x,y),z)$; $(x,(y,z))=(y,(y,z))$; $(x+y,z)=(x(y,z))$.	11.	III.	241.	10.
9.	De factoribus numerorum compositorum dignoscendis.	11.	III.	251.	11.
10.	De radice cubica celeriter extrahenda.	11.	III.	262.	2.
11.	Tabula schematum, numeros auxiliares et regulas (ultra trecentas) pro factoribus primis (300 minoribus) (p) agnoscendis idoneas breviter exhibentium.	12.	IV.	355.	3.
12.	Theorema analyticum.	16.	I.	95.	1.
13.	Formule générale d'intégration indéfinie.	18.	IV.	376.	1.
14.	Fragmenta theoriae aequationum lineariter differentialium.	25.	I.	1.	21.
15.	De radicibus rationalibus aequationis Riccatianae $\partial y+a+by+cy^2=0$, ubi a, b, c functiones sunt rationales ipsius x.	25.	I.	22.	16.
16.	Disquisitio, qualis aequatio differentialis gaudeat integrali algebraico completo? qualisve primarie transcendenti? quaenamque forma integrali competat	25.	I.	38.	19.
	88. Dr. W. Hittorf, damals zu Bonn.				
1.	Ableitung einiger Eigenschaften der Kegelschnitte aus ihrer Polargleichung.	38.	I.	89.	4.
	89. Dr. ph. H. Hoffmann, zu Danzig.				
1.	Multiplications-Formeln für die elliptischen Functionen mit complexen Vielfachen des Arguments, und dem Modul $\sqrt{\frac{1}{2}}$.	48.	IV.	332.	16.

A.	B.	C.	D.	E.	F.
	90. Dr. R. Hoppe, Privatdocent an der Universität zu Berlin.				
1.	Über independente Darstellung der höhern Differentialquotienten, und den Gebrauch des Summenzeichens.	33.	I.	78.	12.
2.	Transformation d'une intégrale définie.	40.	II.	139.	3.
3.	De l'erreur qui peut se présenter dans l'addition de fractions décimales retranchées.	40.	II.	142.	10.
4.	Remarques sur les réductions de la fonction Gamma, et sur la définition de cette fonction et des facultés analytiques par leurs propriétés.	40.	II.	152.	8.
	91. W. Horn, Regierungs- und Baurath zu Potsdam.				
1.	Von den Keradoïden oder Spirallinien doppelter Krümmung. . . .	2.	I.	70.	15.
2.	Quadratur des Mantels des senkrechten, schief abgeschnittenen Kegels.	2.	IV.	364.	3.
3.	Geometrische Aufgaben.	4.	II.	214.	1.
	92. Frh. Alex. von Humboldt, Excellenz.				
1.	Über die bei verschiedenen Völkern üblichen Systeme von Zahlzeichen, und über den Ursprung des Stellenwerthes in den indischen Zahlen.	4.	III.	205.	27.
2.	Ein früherer Brief *Lagrange's* an *Laplace*. Mitgetheilt von Herrn Frh. *Alex. v. Humboldt* Excellenz.	20.	IV.	309.	3.
	93. A. Jacobi, Königlich-Preufsischer Artillerie-Hauptmann zu Breslau.				
1.	Über Reihen von Kegelschnitten in einer Ebene, welche sich in denselben vier Puncten schneiden.	23.	III.	243.	12.
2.	Auflösung und Beweise einer Reihe von Aufgaben und Lehrsätzen der ebenen Geometrie	31.	I.	40	63.
		31.	II.	93	
3.	Beweis eines geometrischen Satzes.	31.	II.	178.	3.
	94. M. H. Jacobi, Professor der Mathematik und Physik zu St. Petersburg.				
1.	Über die Construction schiefliegender Räderwerke.	2.	III.	276.	10.
	95. † Dr. C. G. J. Jacobi, weiland Professor der Mathematik und Akademiker zu Berlin.				
1.	Über *Gauss* neue Methode, die Werthe der Integrale näherungsweise zu finden	1.	IV.	301.	8.
2.	Über den Ausdruck der verschiedenen Wurzeln einer Gleichung durch bestimmte Integrale.	2.	I.	1.	8.
3.	De residuis cubicis commentatio numerosa.	2.	I.	66.	4.
4.	*Eulcri* formulae de transformatione coordinatarum.	2.	II.	188.	2.
5.	Über eine besondere Gattung algebraischer Functionen, die aus der Entwicklung der Function $(1-2xz+z^2)^{\frac{1}{2}}$ entstehen.	2.	III.	223.	4.
6.	Über die Haupt-Axen der Flächen zweiter Ordnung.	2.	III.	227.	7.
7.	De singulari quadam duplicis integralis transformatione. (Vide No. 25. et 30.)	2.	III.	234.	9.
8.	Über die Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung.	2.	IV.	317.	13.
9.	Über die Bestimmung der Rectascension und Declination eines Sterns aus den gemessenen Distanzen desselben von zwei bekannten Sternen.	2.	IV.	345.	2.
10.	Über die *Pfaff*sche Methode, eine gewöhnliche lineäre Differentialgleichung zwischen $2n$ Variablen durch ein System von n Gleichungen zu integriren.	2.	IV.	347.	11.

A.	B.	C.	D.	E.	F.
11.	Addition au mémoire de Mr. *Abel* sur les fonctions elliptiques tome 2 page 101.	3.	I.	86.	1.
12.	Sur la décomposition d'un nombre donné en quatre carrés. . . .	3.	II.	191.	1.
13.	Note sur les fonctions elliptiques.	3.	II.	192.	4.
14.	Beantwortung der Aufgabe No. 14. von *Abel*.	3.	III.	301.	2.
15.	Suite des notices sur les fonctions elliptiques.	3.	III.	303.	8.
16.	Über die Anwendung der elliptischen Transcendenten auf ein bekanntes Problem der Elementargeometrie.	3.	IV.	376.	14.
17.	Suite des notices sur les fonctions elliptiques.	3.	IV.	403.	2.
18.	Suite des notices sur les fonctions elliptiques.	4.	II.	185.	9.
19.	De functionibus ellipticis commentatio.	4.	IV.	371.	20.
20.	Exercitatio algebraica circa discerptionem singularem fractionum, quae plures variabiles involvunt.	5.	IV.	344.	21.
21.	Problèmes d'analyse.	6.	II.	212.	1.
22.	De resolutione aequationum per series infinitas.	6.	III.	257.	30.
23.	De functionibus ellipticis commentatio altera.	6.	IV.	397.	7.
24.	Note sur une nouvelle application de l'analyse des fonctions elliptiques à l'algèbre.	7.	I.	41.	3.
25.	De tranformatione integralis duplicis indefiniti $\int \frac{\partial\varphi\,\partial\psi}{A+B\cos\varphi+C\sin\varphi+(A'+B'\cos\varphi+C'\sin\varphi)\cos\psi+(A''+B''\cos\varphi+C''\sin\varphi)\sin\psi}$ in formam simpliciorem $\int \frac{\partial\eta\,\partial\delta}{G-G'\cos\eta\cos\delta-G''\sin\eta\sin\delta}$ (Vide No. 7 et 30).	{8.	III.	253) {8	IV.	321)	64.
26.	Über und zu *Legendre's* „Théorie des fonctions elliptiques." . . .	8.	IV.	413.	5.
27.	De theoremate Abeliano observatio.	9.	I.	99.	1.
28.	Observatio arithmetica de numero classium divisorum quadraticorum formae y^2+Az^2, designante A numerum primum formae $4n+3$. .	9.	II.	189.	4.
29.	Considerationes generales de transcendentibus Abelianis.	9.	IV.	394.	10.
30.	De transformatione et determinatione integralium duplicium, commentatio tertia. (Vide. No. 7 et 25.)	10.	II.	101.	28.
31.	Bemerkungen zu der Abhandlung des Herrn Prof. *Scherk* über die Integration der Gleichung $\frac{\partial^n y}{\partial x^n} = (\alpha+\beta x)y$, Band 10 S. 92. . . .	10.	III.	279.	1.
32.	Demonstratio formulae $\int_0^1 w^{a-1}(1-w)^{b-1}\partial w = \frac{\int_0^\infty e^{-x}x^{a-1}\partial x\int_0^\infty e^{-x}x^{b-1}\partial x}{\int_0^\infty e^{-x}x^{a+b-1}\partial x} = \frac{\Gamma a\,\Gamma b}{\Gamma(a+b)}$ . .	11.	III.	307.	1.
33.	De binis quibuslibet functionibus homogeneis secundi ordinis per substitutiones lineares in alias binas transformandis, quae solis quadratis variabilium constant; una cum variis theorematis de transformatione et determinatione integralium multiplicium.	12.	I.	1.	69.
34.	Auszug aus einem Schreiben des Herrn Prof. *C. G. J. Jacobi* an den Herrn Prof. *Steiner*. (Mitgetheilt von Letzterem.)	12.	II.	137.	4.
35.	De compositione numerorum e quatuor quadratis.	12.	II.	167.	6.
36.	De usu legitimo formulae summatoriae Maclaurinianae.	12.	III.	263.	10.
37.	De fractione continua in quam integrale $\int_0^\infty e^{-x^2}\partial x$ evolvere licet. .	12.	IV.	346.	2.
38.	De functionibus duarum variabilium quadrupliciter periodicis, quibus theoria transcendentium Abelianarum innititur.	13.	I.	55.	24.
39.	Observatiunculae ad theoriam aequationum pertinentes.	13.	IV.	340.	13.

A.	B.	C.	D.	E.	F.
40.	De usu theoriae integralium ellipticorum et integralium Abelianorum in analysi Diophantea.	13.	IV.	353.	3.
41.	Dato systemate n aequationum linearium inter n incognitas, valores incognitarum per integralia definita $(n-1)$tuplicia exhibentur. . .	14.	I.	51.	5.
42.	Zur Theorie der Curven.	14.	I.	56.	8.
43.	Über den *Steiner*schen Satz von den Primzahlen Bd. 13. S. 356. .	14.	I.	64.	2.
44.	Theoremata nova algebraica circa systema duarum aequationum, inter duas variabiles propositarum.	14.	IV.	281.	8.
45	Formula transformationis integralium definitorum.	15.	I.	1.	26.
46.	De eliminatione variabilis e duabus aequationibus algebraicis. . . .	15.	II.	101.	24.
47.	De integralibus quibusdam duplicibus, quae post transformationem variabilium in eandem formam redeunt.	15.	III.	193.	6.
48.	Formulae novae in theoria transcendentium ellipticarum fundamentales.	15.	III.	199.	6.
49.	De evolutione expressionis $(l+2l'\cos\varphi+2l''\cos\varphi')^{-n}$ in seriem infinitam secundum cosinus multiplorum utriusque anguli φ, φ' procedentem.	15.	III.	205.	24.
50.	De relationibus, quae locum habere debent inter puncta intersectionis duarum curvarum vel trium superficierum algebraicarum dati ordinis; simul cum enodatione paradoxi algebraici.	15.	IV.	285.	24.
51.	Observationes geometricae.	15.	IV.	309.	4.
52.	Nota de erroribus quibusdam geometricis, qui in theoria functionum leguntur.	16.	IV.	342.	2.
53.	Demonstratio et amplificatio nova theorematis Gaussiani de quadratura integra trianguli in data superficie e lineis brevissimis formati. . .	16.	IV.	344.	7.
54.	Zur Theorie der Variations-Rechnung und der Differential-Gleichungen.	17.	I.	68.	15.
55.	Über die Reduction der Integration der partiellen Differential-Gleichungen erster Ordnung zwischen irgend einer Zahl Variabeln, auf die Integration eines einzigen Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen.	17.	II.	97.	66.
56.	Note von der geodätischen Linie auf einem Ellipsoïd und den verschiedenen Anwendungen einer merkwürdigen analytischen Substitution.	19.	IV.	309.	5.
57.	Über die complexen Primzahlen, welche in der Theorie der Reste der 5ten, 8ten und 12ten Potenzen zu betrachten sind.	19.	IV.	314.	5.
58.	Elementarer Beweis einer merkwürdigen analytischen Formel; nebst einigen aus ihr folgenden Zahlensätzen.	21.	I.	13.	20.
59.	De formatione et proprietatibus determinantium.	22.	IV.	285.	35.
60.	De determinantibus functionalibus.	22.	IV.	319.	41.
61.	De functionibus alternantibus.	22.	IV.	360.	12.
62.	Zur combinatorischen Analysis.	22.	IV.	372.	3.
63.	Dilucidationes de aequationum differentialium vulgarium systematis earumque connexione cum aequationibns differentialibus partialibus linearibus primi ordinis.	23.	I.	1.	104.
64.	De integratione aequationis differentialis $(A+A'x+A''y)(x\partial y-y\partial x)-(B+B'x+B''y)\partial y+(C+C'x+C''y)\partial x=0$.	24.	I.	1.	4.
65.	De motu puncti singularis.	24.	I.	5.	24.
66.	Demonstratio nova theorematis Abeliani.	24.	I.	28.	8.
67.	Über die Entwicklung des Ausdrucks $[a^2-2aa'(\cos\omega\cos\varphi+\sin\omega\sin\varphi\cos(\delta-\delta'))+a'^2]^{-\frac{1}{2}}$. . .	26.	I.	81.	7.
68.	Zur Theorie der elliptischen Functionen.	26.	II.	93.	22.
69.	Sur l'élimination des noeuds dans le problème des trois corps . .	26.	II.	115.	17.

A.	B.	C.	D.	E.	F.
70.	Theoria novi multiplicatoris systemati aequationum differentialium vulgarium applicandi.	27.	III.	199	181.
		29.	III.	213	
		29.	IV.	333	
71.	Sulla condizione di uguaglianza di due radici dell'equazione cubica, della quale dipendono gli assi principali di una superficie del second' ordine.	30.	I.	46.	5.
72.	Über ein leichtes Verfahren, die in der Theorie der Säcularstörungen vorkommenden Gleichungen numerisch aufzulösen.	30.	I.	51.	44.
73.	Neues Theorem der analytischen Mechanik.	30.	II.	117.	4.
74.	Über die Additionstheoreme der *Abel*schen Integrale zweiter und dritter Gattung.	30.	II.	121.	6.
75.	Über die Darstellung einer Reihe gegebener Werthe durch eine gebrochene rationale Function.	30.	II.	127.	30.
76.	Über die Kreistheilung und ihre Anwendung auf die Zahlentheorie. .	30.	II.	166.	17.
77.	Note sur les fonctions Abeliennes.	30.	II.	183.	2.
78.	Über einige, die elliptischen Functionen betreffende Formeln. . . .	30.	III.	269.	2.
79.	Über den Werth, welchen das bestimmte Integral $\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1-A\cos\varphi-B\sin\varphi}$ für beliebige imaginäre Werthe von A und B annimmt.	32.	I.	8.	6.
80.	Beweis des Satzes, dafs jede nicht fünfeckige Zahl eben so oft in eine gerade als ungerade Anzahl verschiedener Zahlen zerlegt werden kann.	32.	II.	164.	12.
81.	Extrait d'une lettre adressée à Mr. *Hermite*.	32.	II.	176.	6.
82.	Über die Vertauschung von Parameter und Argument bei der dritten Gattung der *Abel*schen und höheren Transcendenten.	32.	III.	185.	12.
83.	Über einige, der Binomialreihe analoge Reihen.	32.	III.	197.	8.
84.	Über eine neue Methode zur Integration der hyperelliptischen Differentialgleichungen, und über die rationale Form ihrer vollständigen algebraischen Integralgleichungen.	32.	III.	221.	7.
85.	Notiz über *A. Göpel*.	35.	IV.	313.	4.
86.	Über die unmittelbare Verification einer Fundamentalformel der Theorie der elliptischen Functionen.	36.	I.	75.	6.
87.	Über die partielle Differentialgleichung, welcher die Zähler und Nenner der elliptischen Functionen Genüge leisten.	36.	I.	81.	8.
88.	Über die Differential-Gleichung, welcher die Reihen $1\mp 2q+2q^4\mp 2q^9\ldots$ und $2\sqrt[4]{q}+2\sqrt[4]{q^9}+2\sqrt[4]{q^{25}}\ldots$ Genüge leisten.	36.	II.	97.	16.
89.	Über die particulaire Lösung der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0$.	36.	II.	113.	22.
90.	De seriebus ac differentiis observatiunculae.	36.	II.	135.	8.
91.	Über unendliche Reihen, deren Exponenten zugleich in zwei verschiedenen quadratischen Formen enthalten sind.	37.	I.	61	68.
		37.	III.	221	
92.	Über die Reduction der quadratischen Formen auf die kleinste Anzahl Glieder.	39.	IV.	290.	3.
93.	Sur la rotation d'un corps.	39.	IV.	293.	58.
94.	Beweis des Satzes, dafs eine Curve n^{ten} Grades im Allgemeinen $\frac{1}{2}n(n-2)(n^2-9)$ Doppeltangenten hat.	40.	III.	237.	24.
95.	Schreiben an Herrn Prof. *O. Hesse*.	40.	IV.	318.	1.
96.	Auszug zweier Schreiben an den Herrn Director *Hansen*.	42.	I.	12.	20.

A.	B.	C.	D.	E.	F.
97.	Auszug eines Schreibens von Herrn Prof. *Heine* in Bonn.	42.	I.	35.	6.
98.	Über die Zusammensetzung der Zahlen aus ganzen positiven Cuben; nebst einer Tabelle für die kleinste Cubenzahl, aus welcher jede Zahl bis 12000 zusammengesetzt werden kann.	42.	I.	41.	29.
	96. Dr. G. A. Jahn, damals zu Leipzig.				
1.	Auflösung einiger Aufgaben aus der Calendariographie.	9.	II.	139.	7.
	97. Dr. F. Joachimsthal, Professor der Mathematik zu Halle.				
1.	Observationes de lineis brevissimis et curvis curvaturae in superficiebus secundi gradus.	26.	II.	155.	17.
2.	Über die Normalen der Ellipse und des Ellipsoïds.	26.	II.	172.	9.
3.	Demonstratio theorematum ad superficies curvas spectantium. . . .	30.	IV.	347.	4.
4.	Über die Bedingungen der Integrabilität.	33.	II.	95.	22.
5.	Remarques sur la condition de l'égalité de deux racines d'une équation algébrique; et sur quelques théorèmes de géométrie, qui en suivent.	33.	IV.	371.	6.
6.	Démonstration d'un théorème de Mr. *Steiner*.	36.	I.	95.	2.
7.	Théorème relatif au cercle qui passe par trois points d'une ellipse.	39.	II.	138.	2.
8.	Sur quelques applications des déterminants à la géométrie. . . .	40.	I.	21.	27.
9.	Note relative à un théorème de Mr. *Malmstèn* (mém. No. 6) sur les équations différentielles linéaires.	40.	I.	48.	3.
10.	Sur la construction des normales qu'on peut abaisser d'un point donné sur une section conique complètement décrite.	48.	IV.	377.	4.
11.	Bemerkungen über den *Sturm*schen Satz.	48.	IV.	386.	31.
	98. Jordann, damals zu Münster.				
1.	Beweis des Lehrsatzes No. 12. Band 9. S. 102, und Bemerkungen zu dem Aufsatze 10. im 11ten Bande.	15.	IV.	367.	6.
2.	De tabularum functionum hyperbolicarum constructione	16.	II.	196.	1.
	99. M. Jullien, zu Paris.				
1.	Note sur le centre de gravité des figures sphériques.	50.	IV.	311.	1.
	100. Dr. Jürgensen, Professor der Mathematik zu Kopenhagen.				
1.	Remarques sur une certaine transformation des fonctions, fondée sur les relations des racines de l'unité.	6.	II.	195.	15.
2.	Note sur une formule de *Laplace*.	11.	II.	136.	6.
3.	Sur les expressions du reste de la série de *Taylor*.	17.	III.	291.	4.
4.	Sur la décomposition d'une certaine classe de fonctions.	19.	I.	84.	7.
5.	Sur la sommation des transcendantes à différentielles algébriques. .	19.	II.	113.	4.
6.	Remarques générales sur les transcendantes à différentielles algébriques.	23.	II.	126.	19.
	101. Dr. Moritz Kartscher, damals zu Berlin.				
1.	Auszüge von „*Lubbe*, traité du calcul différential et intégral." . .	8.	IV.	419.	1.
	102. Dr. G. Kirchhoff, Professor an der Universität zu Breslau.				
1.	Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe.	40.	I.	51.	38.
2.	Über den inducirten Magnetismus eines unbegrenzten Cylinders von weichem Eisen.	48.	IV.	348.	29.
	103. E. Köhlau, Königlich-Preufsischer Hauptmann.				
1.	Elementarer Beweis eines in der Differenzenrechnung vorkommenden Ausdrucks.	6.	III.	255.	2.

A.	B.	C.	D.	E.	F.
	104. Koppe, Professor der Mathematik zu Soest in Westphalen.				
1.	Von der Lage der Ebenen und Linien im Raum.	14.	I.	70.	6.
2.	Ein polyëdrischer Satz.	18.	III.	275.	3.
	105. Kossack, Königlich-Preufs. Landbaumeister.				
1.	Untersuchung der Wirkung einer Kraft auf drei Puncte.	1.	I.	37.	1.
	106. Dr. A. Kramer, damals zu Berlin.				
1.	Auflösung der 10. Aufgabe im Anhange zum 1. Band von *Steiners* „Syst. Entw. der Abhängigkeit etc."	18.	II.	185.	4.
	107. Dr. L. Kronecker, damals zu Berlin.				
1.	Beweis, dafs für jede Primzahl p die Gleichung $1+x+x^2\cdots+x^{p-1}=0$ irreductibel ist.	29.	III.	280.	1.
	108. R. Krusemark, Candidat der Philosophie zu Berlin.				
1.	Zur Theorie der elliptischen Functionen.	46.	III.	189.	45.
	109. Dr. Kulik, K. K. Rath und Professor der Mathematik an der Universität zu Prag.				
1.	Über die Tafel primitiver Wurzeln.	45.	I.	55.	27.
2.	Geometrische Aufgaben.	45.	III.	283.	1.
	110. Dr. E. E. Kummer, Professor der Mathematik an der Universität zu Breslau.				
1.	Sur l'intégration générale de l'équation de *Riccati* par des intégrales définies.	12.	II.	144.	4.
2.	Über die Convergenz und Divergenz der unendlichen Reihen. . .	13.	II.	171.	14.
3.	Über unendlich verschiedene Entwickelungen der Potenzen der Cosinus und Sinus.	14.	II.	110.	13.
4.	Über die hypergeometrische Reihe $1+\frac{\alpha\beta}{1.\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma.(\gamma+1)}x^2+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1.2.3.\gamma.(\gamma+1)(\gamma+2)}\cdots$ . . .	15.	I.	39	92.
		15.	II.	127	
5.	Eine neue Methode, die numerischen Summen langsam convergirender Reihen zu berechnen.	16.	III.	206.	9.
6.	De aequatione $x^{2\lambda}+y^{2\lambda}=z^{2\lambda}$ per numeros integros resolvenda. . .	17.	III.	203.	8.
7.	De Integralibus definitis et seriebus infinitis.	17.	III.	210	33.
		17.	III.	228	
8.	Note sur l'intégration de l'équation $\frac{\partial^n y}{\partial x^n}=x^m y$ par des intégrales définies.	19.	III.	286.	3.
9.	Sur quelques transformations générales des intégrales définies. . .	20.	I.	1.	10.
10.	Über die Transcendenten, welche aus wiederholten Integrationen rationaler Formeln entstehen.	21.	I.	74	93.
		21.	III.	193	
		21.	IV.	329	
11.	Eine Aufgabe, betreffend die Theorie der cubischen Reste. . . .	23.	III.	285.	2.
12.	Bemerkungen über die cubische Gleichung, durch welche die Haupt-Axen der Flächen zweiten Grades bestimmt werden.	26.	III.	268.	5.
13.	Über die Divisoren gewisser Formen der Zahlen, welche aus der Theorie der Kreistheilung entstehen.	30.	II.	107.	10.
14.	De residuis cubicis disquisitiones nonnullae analyticae.	32.	IV.	341.	20.
15.	Beitrag zur Theorie der Function $\Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-v}v^{x-1}\partial v$.	35.	I.	1.	4.

A.	B.	C.	D.	E.	F.
16.	Über Systeme von Curven, welche einander überall rechtwinklig durchschneiden.	35.	I.	5.	8.
17.	Zur Theorie der complexen Zahlen.	35.	IV.	319.	8.
18.	Über die Zerlegung der aus Wurzeln der Einheit gebildeten complexen Zahlen in ihre Primfactoren.	35.	IV.	327.	41.
19.	Über die Vierecke, deren Seiten und Diagonalen rational sind. . .	37.	I.	1.	20.
20.	Bestimmung der Anzahl nicht äquivalenter Classen für die aus λten Wurzeln der Einheit gebildeten complexen Zahlen, und die idealen Factoren derselben.	40.	II.	93.	24.
21.	Zwei besondere Untersuchungen über die Classen-Anzahl und über die Einheit der aus λten Wurzeln der Einheit gebildeten complexen Zahlen.	40.	II.	117.	13.
22.	Allgemeiner Beweis des *Fermat*schen Satzes, dafs die Gleichung $x^\lambda + y^\lambda = z^\lambda$ durch ganze Zahlen unlösbar ist, für alle diejenigen Potenz-Exponenten λ, welche ungerade Primzahlen sind und in den Zählern der ersten $\frac{1}{2}(\lambda-3)$ Bernoullischen Zahlen als Factoren nicht vorkommen.	40.	II.	131.	9.
23.	Über eine allgemeine Eigenschaft der rationalen Entwicklungs-Coëfficienten einer bestimmten Gattung analytischer Functionen. . . .	41.	IV.	368.	5.
24.	Über die Ergänzungssätze zu den allgemeinen Reciprocitätsgesetzen.	44.	II.	93.	54.
25.	Über eine besondere Art, aus complexen Einheiten gebildeter Ausdrücke.	50.	III.	212.	21.
	111. Lamé und Clapeyron, Akademiker zu Paris.				
1.	Nouvelles formules analogues aux séries de *Taylor* et *Maclaurin*. .	6.	I.	40.	9.
2.	Mémoire sur l'équilibre intérieur des corps solides.	7.	II.	150	69.
		7.	III.	237	
		7.	IV.	381	
	112. Lebesque, Professor der Mathematik zu Paris.				
1.	Intégration d'un système d'équations linéaires du n^{me} ordre. . . .	15.	II.	185.	6.
	113. Dr. Lehmann, damals zu Berlin.				
1.	Theorie der Cykloïde als Tautochrone. Versuch einer mechanischen Discussion nach der antiken geometrischen Methode.	6.	I.	49.	18.
	114. Dr. Lehmus, Professor der Mathematik zu Berlin.				
1.	Über zwei Curven.	1.	I.	61.	4.
2.	Drei mechanische und hydrodynamische Aufgaben; nebst Auflösung.	2.	III.	217.	6.
3.	Beweis eines geometrischen Lehrsatzes.	3.	III.	279.	1.
4.	Über die Theorie der Schraube.	4.	II.	202.	2.
5.	Den, einen Kreis am innigsten osculirenden Kegelschnitt zu finden.	21.	III.	235.	5.
6.	Resultate der Auflösung von drei geometrischen Aufgaben; für Liebhaber des algebraischen Calculs.	27.	I.	84.	2.
7.	Einige geometrische Aufgaben.	31.	I.	85.	5.
8.	Geometrische Aufgabe; nebst Auflösung.	34.	III.	280.	2.
9.	Zwei geometrische Sätze.	40.	II.	183.	2.
10.	Die Brennlinie für den elliptischen Quadranten, etc.	44.	I.	90.	3.
11.	Eine Eigenschaft des Dreiecks.	50.	III.	266.	2.
	115. Dr. Leithold, damals zu Berlin.				
1.	Beweis der Lehrsätze No. 40. und 41. im Anhange zu „*Steiner* systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten, etc.	11.	I.	67.	8.

A.	B.	C.	D.	E.	F.
	116. G. Libri, damals zu Paris.				
1.	Note sur les valeurs de la fonction 0^{0^x}	6.	I.	67.	6.
2.	Mémoire sur quelques formules générales d'analyse.	7.	I.	57.	11.
3.	Mémoire sur la théorie de la chaleur.	7.	II.	116.	16.
4.	Mémoire sur les fonctions discontinues.	7.	III.	224.	10.
5.	Mémoire sur la théorie des nombres.	9.	I.	54.	81.
		9.	II.	169.	
		9.	III.	261.	
6.	Mémoire sur la resolution des équations indéterminées à l'aide des séries.	9.	IV.	313.	24.
7.	Mémoire sur la résolution des équations algébriques dont les racines ont entre elles un rapport donné, et sur l'intégration des équations différentielles linéaires dont les intégrales particulières peuvent s'exprimer les une par les autres.	10.	II.	167.	28.
8.	Mémoire sur les fonctions discontinues.	10.	IV.	303.	14.
9.	Mémoire sur l'intégration des équations linéaires aux différences de tous les ordres.	12.	III.	234.	6.
10.	Mémoire sur les intégrales définies aux différences finies.	12.	III.	240.	18.
	117. Liouville, Akademiker zu Paris.				
1.	Note sur la détermination des intégrales dont la valeur est algébrique.	10.	IV.	347.	13.
2.	Mémoire sur les fonctions complémentaires.	11.	I.	1.	19.
3.	Mémoire sur une formule d'analyse.	12.	IV.	273.	15.
4.	Mémoire sur l'intégration d'une classe des fonctions transcendantes.	13.	II.	93.	26.
5.	Mémoire sur l'usage que l'on peut faire de la formule de *Fourier* dans le calcul des différentielles à indices quelconques.	13.	III.	219.	14.
6.	Note ajoutée au rapport de Mr. *Poisson* (No. 9.)	16.	I.	41.	6.
	118. Dr. J. J. Littrow, Professor und Director der Sternwarte zu Wien.				
1.	Auflösung eines geometrischen Problems.	1.	III.	232.	9.
	119. N. Lobatschewsky, Rector der Universität zu Kasan.				
1.	Géométrie imaginaire.	17.	IV.	295.	26.
2.	Probabilité des résultants moyens d'observations repetées.	24.	II.	164.	8.
	120. R. Lobatto, Professor der Mathematik im Haag.				
1.	Note sur l'intégration de la fonction $\frac{\partial z}{a+b\cos z}$	9.	III.	259.	2.
2.	Sur l'intégration de la différentielle $\frac{\partial x}{\sqrt{(x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta)}}$	10.	III.	280.	8.
3.	Note sur les différentielles partielles de la fonction $\frac{x}{x^2+y^2}$	11.	II.	169.	4.
4.	Sur le developpement des coefficients différentiels d'une fonction au moyen de ses différences finies, et réciproquement.	16.	I.	11.	10.
5.	Note sur le calcul des moments d'inertie d'une ellipsoïde homogène par rapport à ses trois axes.	16.	I.	76.	2.
6.	Sur l'intégration des équations $\frac{\partial^n y}{\partial x^n}-xy=0$ et $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+abxy=0$ par des intégrales définies.	17.	IV.	363.	9.

A.	B.	C.	D.	E.	F.
	121. Dr. S. Löwenstein, damals zu Dorpat.				
1.	Einige mathematische Sätze.	13.	I.	79)	18.
		13.	II.	159)	
	122. Dr. C. Lottner, Lehrer der Mathematik und Physik an der höheren Bürgerschule zu Lippstadt.				
1.	Über die Functionen, welche der Gleichung $\varphi x+\varphi y=\psi\left(\frac{fy.Fx+fx.Fy}{xy}\right)$ Genüge leisten.	46.	IV.	367.	22.
2.	Lösung der Aufgaben *C.* und *D.* in No. 21. Bd. 45. dieses Journals S. 284 (die algebraischen Gleichungen vom vierten Grade betreffend).	47.	III.	233.	5.
3.	Reduction der Bewegung eines schweren, um einen festen Punct rotirenden Revolutionskörpers, auf die elliptischen Transcendenten. . .	50.	II.	111.	16.
	123. Dr. R. A. Luchterhandt, Professor zu Berlin.				
1.	De transformatione expressionis $\frac{dy}{\sqrt{[\pm(y-\alpha)(y-\beta)(y-\gamma)(y-\delta)]}}$ in formam simpliciorem $\frac{dx}{M\sqrt{[(1-xx)(1-k^2xx)]}}$ adhibita substitutione $x=\frac{a+a'y+a''y^2}{1+b'y+b''y^2}$.	17.	III.	218.	9.
2.	Beweis der Lehrsätze 3. und 4. Band 15. S. 374, und Auflösung der Aufgabe 1. Band 14. S. 89 und 79.	18.	III.	213.	7.
3.	Über die Bedingung, dafs fünf Puncte auf der Oberfläche einer Kugel liegen.	23.	IV.	375.	4.
	124. Dr. E. Luther, damals zu Königsberg in Pr.				
1.	De criteriis quibus cognoscatur an aequatio quinti gradus irreductibilis algebraice resolvi possit.	34.	III.	244.	14.
2.	Über die Factoren der algebraisch-lösbaren irreductiblen Gleichungen vom sechsten Grade und ihrer Resolventen.	37.	III.	193.	28.
	125. Dr. L. J. Magnus, zu Berlin.				
1.	Über die Relationen der Functionen, welche der Gleichung $F_1y.\varphi_1x+F_2y.\varphi_2x\cdots+F_ny.\varphi_nx=F_1x.\varphi_1y+F_2x.\varphi_2y\cdots+F_nx.\varphi_ny$ genugthun.	5.	IV.	365.	9.
2.	Geometrische Aufgaben.	7.	I.	102.	1.
3.	Einige geometrische Sätze.	7.	II.	132.	8.
4.	Nouvelle méthode pour découvrir des théorèmes de géométrie. . .	8.	I.	51.	13.
5.	Quelques théorèmes de géométrie.	9.	II.	135.	4.
6.	Über eine Methode, den Grad einer durch Elimination hervorgehenden Gleichung zu finden.	26.	IV.	365.	3.
	126. Dr. Märker, damals zu Meiningen.				
1.	Über Primzahlen.	20.	IV.	350.	10.
	127. Dr. C. J. Malmstèn, Professor der Mathematik an der Universität zu Upsàla.				
1.	In solutionem aequationum algebraicarum disquisitio.	34.	I.	46.	29.
2.	Sur la formule $hu'_x=\Delta u_x-\frac{h}{2}\cdot\Delta u'_x+\frac{B_1h^2}{1.2}\cdot\Delta u''_x-\frac{B_2h^4}{1\ldots4}\cdot\Delta u^{IV}_x+$ etc.	35.	I.	55.	28.

A.	B.	C.	D.	E.	F.
3.	De integralibus quibusdam definitis, seriebusque infinitis.	38.	I.	1.	39.
4.	Moyens pour trouver l'expression de la n^{me} intégrale particulière de l'équation linéaire $y^{(n)}+Py^{(n-1)}+Qy^{(n-2)}\dots+Sy'+Ty=0$ à l'aide des $n-1$ valeurs $y_1, y_2, \dots y_{n-1}$ qui satisfont à cette équation. .	39.	II.	91.	8.
5.	De l'équation différentielle $x^{n-1}(a_n+b_nx)y^{(n)}+x^{n-2}(a_{n-1}+b_{n-1}x)y^{(n-1)}\dots+(a_1+bx)y'+b_0y=0$.	39.	II.	99.	9.
6.	De l'équation différentielle $y''_x+\frac{y'}{x}+Ax^my=0$.	39.	II.	108.	8.
7.	Note sur les fonctions elliptiques.	39.	II.	116.	6.
	128. W. Matzka, damals Ober-Feuerwerker zu Wien.				
1.	Analytische Auflösung dreier Aufgaben der Calendarographie. . .	3.	IV.	337.	10.
	129. Dr. ph. E. Meissel, zu Berlin.				
1.	Observationes quaedam in theoria numerorum.	48.	IV.	301.	16.
2.	Zur Theorie der Tautochronen.	48.	IV.	317.	7.
3.	Beitrag zur Theorie der $n$fach unendlichen θ-Reihen.	48.	IV.	324.	8.
	130. A. Meyer, Professor der Mathematik zu Lüttich.				
1.	Mémoire sur les fonctions arbitraires exprimées par des intégrales doubles et de séries de quantités périodiques.	43.	I.	60.	28.
	131. Dr. C. O. Meyer, damals zu Königsberg in Pr.				
1.	De aequilibrii formis ellipsoïdicis.	24.	I.	44.	16.
2.	Entwicklung der elliptischen Functionen $\Delta^{\pm r}\mathrm{am}\frac{2K}{\pi}x.\cos^{\pm s}\mathrm{am}\frac{2K}{\pi}x.\sin^{\pm t}\frac{2K}{\pi}x.\int_0^x\Delta^2\mathrm{am}\frac{2K}{\pi}x.dx$ nach den Sinus und Cosinus der Vielfachen von x.	(37. III. 273) (37. IV. 281)			32.
	132. W. H. Miller, Professor der Mathematik zu Cambridge.				
1.	To prove that $\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{1.2.3\dots r}$ is a whole number when n and r are whole numbers.	13.	III.	257.	2.
2.	An investigation of the caustics poduced by successive reflexion at spherical surfaces.	13.	III.	258.	2.
	133. Dr. F. Minding, Professor der Mathematik an der Universität zu Dorpat.				
1.	Über die Curven kürzesten Perimeters auf krummen Flächen. In Folge der Aufgabe No. 6. im 3ten Bande S. 99.	5.	III.	297.	8.
2.	Auflösung einiger Aufgaben der analytischen Geometrie mittels des barycentrischen Calculs.	5.	IV.	397.	5.
3.	Über die Berechnung des Näherungswerths doppelter Integrale. . .	6.	I.	91.	5.
4.	Bemerkung über die Abwicklung krummer Flächen.	6.	II.	159.	3.
5.	Observatio pertinens ad solutionem aequationum indeterminatarum secundi gradus.	7.	II.	140.	3.
6.	Auszüge seiner Schrift über die Theorie der Zahlen.	7.	IV.	414.	2.
7.	Théorème relatif à une certaine fonction transcendante.	9.	III.	295.	2.
8.	Sur les intégrales de la forme $\int\frac{\partial x P\sqrt[3]{p}}{c-x}$, p et P étant deux polynomes entiers.	10.	II.	195.	5.
9.	Addition à l'article No. 8.	10.	III.	292.	1.

A.	B.	C.	D.	E.	F.
10.	Sur la somme des carrés de toutes les droites qui, à partir d'un point donné, coupent sous un angle déterminé une courbe algébrique. .	11.	I.	20.	6.
11.	Recherches sur la sommation d'un certain nombre de fonctions transcendantes, dont les dérivées sont déterminées par des équations algébriques du troisième dégré.	11.	IV.	373.	11.
12.	Beantwortung der Frage No. 4. S. 200 Band 11.	12.	II.	179.	2.
13.	Untersuchung, betreffend die Frage nach einem Mittelpunct nicht paralleler Kräfte.	14.	IV.	289.	27.
14.	Über den Ort sämmtlicher Resultanten eines der Drehung unterworfenen Systems von Kräften.	15.	I.	27.	12.
15.	Einige Sätze über die Veränderungen, welche ein System von Kräften durch Drehung derselben erleidet; nebst einer Anwendung auf das Seilpolygon.	15.	IV.	313.	4.
16.	Beweis eines geometrischen Satzes.	16.	IV.	351.	1.
17.	Über die Biegung gewisser Flächen.	18.	IV.	297) 365)	10.
18.	Wie sich entscheiden läfst, ob zwei gegebene krumme Flächen auf einander abwickelbar sind, oder nicht; nebst Bemerkungen über die Flächen von unveränderlichem Krümmungsmaafse.	19.	IV.	370.	18.
19.	Bemerkungen über die Wurzeln der algebraischen Gleichungen. . .	20.	II.	169.	3.
20.	Über einen besondern Fall bei der Abwickelung krummer Flächen.	20.	II.	171.	2.
21.	Beiträge zur Theorie der kürzesten Linien auf krummen Flächen. .	20.	IV.	323.	5.
22.	Über die Bestimmung des Grades einer durch Elimination hervorgehenden Gleichung.	22.	II.	178.	6.
23.	Propositiones quaedam de integralibus functionum algebraicarum unius variabilis, e principiis Abelianis derivatae.	23.	III.	255.	20.
24.	Erwiderung auf den Artikel No. 23. in Band 26. S. 365.	27.	IV.	379.	2.
25.	Entwickelung eines symmetrischen Ausdrucks für den Grad einer durch Elimination hervorgehenden Gleichung.	31.	I.	1.	11.
26.	Bemerkungen zur Integration der Differential-Gleichungen erster Ordnung zwischen zwei Veränderlichen.	40.	IV.	361.	5.
27.	Über einige Grundformeln der Geodäsie.	44.	I.	66.	7.
28.	Über den Umlauf des Springers auf dem Schachbrett (den sogenannten Rösselsprung.)	44.	I.	73.	10.
29.	Über die Schwingungen eines freihangenden biegsamen Fadens. . .	50.	III.	243.	20.

134. Dr. A. F. Möbius, Professor der Mathematik an der Universität zu Leipzig.

1.	Über die Gleichungen, mittels welcher aus den Seiten eines in einen Kreis zu beschreibenden Vielecks der Halbmesser des Kreises und die Fläche des Vielecks gefunden werden.	3.	I.	5.	30.
2.	Kann von zwei dreiseitigen Pyramiden eine jede in Bezug auf die andere um- und eingeschrieben zugleich heifsen?	3.	III.	273.	6.
3.	Von den metrischen Relationen im Gebiete der Lineal-Geometrie. .	4.	II.	101.	30.
4.	Beweis eines neuen, von Herrn *Chasles* entdeckten Satzes der Statik; nebst einigen Zusätzen.	4.	II.	179.	6.
5.	Barycentrische Lösung der Aufgabe des Herrn *Th. Clausen* Bd. 4. Heft. 4. S. 391.	5.	I.	102.	4.
6.	Kurze Darstellung der Haupt-Eigenschaften eines Systems von Linsengläsern.	5.	II.	113.	20.
7.	Beiträge zur Lehre von den Kettenbrüchen; nebst einem Anhange dioptrischen Inhalts.	6.	III.	215.	29.

A.	B.	C.	D.	E.	F.
8.	Entwicklung der Bedingungen des Gleichgewichts zwischen Kräften, die auf einen freien, festen Körper wirken.	7.	III.	205.	12.
9.	Über eine besondere Art der Umkehrung der Reihen.	9.	II.	105.	19.
10.	Über eine besondere Art dualer Verhältnisse zwischen Figuren im Raume.	10.	IV.	317.	25.
11.	Über eine allgemeinere Art der Affinität geometrischer Figuren. . .	12.	II.	109.	28.
12.	Über den Mittelpunct nicht paralleler Kräfte.	16.	I.	1.	10.
13.	Über die Zusammensetzung unendlich kleiner Drehungen.	18.	III.	189.	24.
14.	Anwendung der Statik auf die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften.	21.	I.	64)	31.
		21.	II.	156)	
15.	Geometrische Eigenschaften einer Factorentafel.	22.	III.	276.	9.
16.	Entwicklung einiger trigonometrischen Formeln durch Hülfe der Lehre von den Doppelschnitts-Verhältnissen.	24.	I.	85.	8
17.	Die von Herrn Dr. *Luchterhand* am Schlusse des 23. Bandes mitgetheilte Bedingung, unter welcher fünf Puncte in einer Kugelfläche liegen, aus rein barycentrischem Princip abgeleitet.	26.	I.	26.	6.
18.	Über die Zusammensetzung gerader Linien, und eine daraus entspringende neue Begründungsweise des barycentrischem Calculs. . . .	28.	I.	1.	9.
19.	Elementare Ableitung des *Newton*schen Gesetzes der Anziehung aus den *Kepler*schen Gesetzen der Planeten-Bewegung.	31.	II.	174.	4.
20.	Variationum quas elementa motus perturbati planetarum subeunt, nova et facilis evolutio.	32.	II.	106.	13.
21.	Einfacher Beweis des von Herrn Geheimen Hofrath *Schweins* im 32. Bande dieses Journals S. 227 mitgetheilten statischen Satzes. .	36.	I.	89.	2.
22.	Über die phoronomische Deutung des *Taylor*schen Theorems. . .	36.	I.	91.	4.
23.	Verallgemeinerung des *Pascal*schen Theorems, das in einen Kegelschnitt beschriebene Sechseck betreffend.	36.	III.	216.	5.
24.	Über einen von *Möbius* gefundenen Beweis des Satzes vom Parallelogramm der Kräfte; nebst einer Nachschrift.	42.	II.	179.	8.
25.	Über das Gesetz der Symmetrie der Krystalle und die Anwendung dieses Getzes auf die Eintheilung der Kyrstalle in Systeme. . . .	43.	IV.	365.	10.
26.	Über symmetrische Figuren.	44.	IV.	335.	9.

135. Dr. A. Müller, Universitäts-Bibliothekar zu Heidelberg.

1.	Einfacher Beweis des Gesetzes der gleichförmig beschleunigten Bewegung.	11.	I.	98.	2.
2.	Beitrag zur Theorie der Facultäten.	11.	IV.	361.	12.
3.	Zur Begründung und Erweiterung der Variationsrechnung.	13.	III.	240.	10.

136. Dr. G. W. Müller, Königlich-Hannöverscher Artillerie-Hauptmann.

1.	Darstellung der Lehre vom Zuge; zur Einleitung in die analytische Geometrie.	15.	III.	229.	29.

137. † Navier, weiland Akademiker zu Paris.

1.	Rapport sur un mémoire de MM. *Lamé* et *Clapeyron* concernant l'équilibre intérieur des corps solides homogènes.	7.	II.	145.	5.

138. Nernst, damals Vermessungs-Revisor zu Stralsund.

1.	Ein geometrischer Lehrsatz.	9.	I.	103.	1.
2.	Zur Umkehrung und Umformung der Reihen.	16.	I.	96.	1.

A.	B.	C.	D.	E.	F.
	139. Dr. G. H. F. Nesselmann, Professor an der Universität zu Königsberg in Pr.				
1.	Beiträge zur Chronologie.	26.	I.	32.	49.
	140. Dr. J. Neumann, Professor der Mineralogie und Physik zu Königsberg in Pr.				
1.	Entwicklung der in elliptischen Coordinaten ausgedrückten reciproken Entfernung zweier Puncte, in Reihen, welche nach den *Laplace*schen $Y^{(n)}$ fortschreiten; und Anwendung dieser Reihen zur Bestimmung des magnetischen Zustandes eines Rotations-Ellipsoïds, welcher durch vertheilende Kräfte erregt ist.	37.	I.	21.	30.
	141. Dr. Öttinger, Professor der Mathematik an der Universität zu Freyburg im Br.				
1.	Aufstufung der einfachen Functionen 11. I. 75; 11. II. 173; 12. IV. 295; 13. IV. 292; 14. III. 262; 14. IV. 330; 15. III. 264; 15. IV. 317;	16.	II.	131.	296.
2.	Über die Zerlegung gebrochener algebraischer rationaler Functionen in Partialbrüche.	22.	I.	63.	63.
		22.	II.	148.	
3.	Untersuchungen über die Wahrscheinlichkeitsrechnung. 26. III. 217; 26. IV. 311; 30. III. 217; 30. IV. 296; 34. II. 133; 36. III. 221; 36. IV. 296; 42. III. 213.				283.
4.	Bemerkungen zu der Aufgabe No. 1. S. 395 Band 25.	27.	III.	283.	1.
5.	Untersuchungen über die analytischen Facultäten. 33. I. 1; 33. II. 117; 33. III. 226; 33. IV. 329; 35. I. 13; 38. II. 162; 38. III. 216; 44. I. 26;	44.	II.	147.	323.
6.	Beitrag zur Lehre von den Kettenbrüchen; nebst einigen Anwendungen auf die Berechnung der Wurzeln der Gleichungen.	49.	I.	66.	69.
		49.	II.	95.	
	142. † Dr. G. S. Ohm, weiland Professor der Mathematik und Physik zu München.				
1.	Allgemeine und vollständige Berechnung aller beim Gleichgewicht, mit Rücksicht auf Zapfenreibung, vorkommenden Bestimmungstücke. . .	5.	I.	51.	42.
	143. Dr. M. Ohm, Professor der Mathematik an der Universität zu Berlin.				
1.	Etwas über die Bernoullischen Zahlen.	20.	I.	11.	2.
2.	Über das Verhalten der Gamma-Function zu den Producten äquidifferenter Factoren.	36.	IV.	277.	19.
3	Über die Behandlung der Lehre der reellen Factoriellen und Facultäten, nach einer Methode der Einschliefsung in Grenzen.	39.	I.	23.	19.
4.	Note, die Anwendung eines trigonometrischen Satzes betreffend. .	50.	I.	79.	12.
	144. L. Olivier, damals zu Berlin.				
1.	Entwicklung einer beliebigen Potenz eines Cosinus durch die Cosinus der vielfachen Bogen.	1.	I.	16.	21.
2.	Bemerkungen über die Form der Wurzeln algebraischer Gleichungen.	1.	II.	97.	20.
3.	Über den elften Grundsatz in Euklids Elementen der Geometrie. .	1.	II.	151.	2.
4.	Ein Kennzeichen der Grenzen der Zahl der reellen Wurzeln einer beliebigen algebraischen Gleichung.	1.	III.	223.	4.
5	Bemerkungen über Figuren, die aus beliebigen, von geraden Linien umschlossenen Figuren zusammengesetzt sind.	1.	III.	227.	5.
6.	Über einige Definitionen in der Geometrie.	1.	III.	241.	11.
7.	Die unbestimmt scheinenden Werthe einiger Functionen zu finden. .	1.	IV.	308.	3.

A.	B.	C.	D.	E.	F.
8.	Remarques sur les séries infinies et leur convergence.	2.	I.	31.	14.
9.	Über Interpolations-Formeln; desgleichen über Anwendung derselben auf die Auflösung algebraischer Gleichungen von beliebigen Graden.	2.	III.	197.	20.
10.	Bemerkungen über eine Art von Functionen, welche ähnliche Eigenschaften haben wie die Sinus und Cosinus.	2.	III.	243.	9.
11.	Über die Berechnung von Tafeln gegebener Functionen, z. B. der Logarithmen, der Kreisgröfsen, etc.	2.	III.	252.	11.
12.	Remarque, faisant suite au mémoire de Mr. *Abel* sur les séries infinies.	3.	I.	82.	1.
	145. † Oltmanns, weiland Professor der Mathematik und Astronomie zu Berlin.				
1.	Beobachtungen über die Geschwindigkeit des Schalles in den Ebenen Süd-Amerikas; angestellt von *Espinosa* und *Banza*.	2.	IV.	307.	10.
2.	Beobachtungen über die Schwere, welche in den Häfen von Europa, Amerika und Asien, auf dem stillen Meere und in Neu-Holland während *Malaspina's* Welt-Umsegelung mit dem unveränderlichen Pendel angestellt worden sind.	4.	I.	72.	13.
	146. Oltramare, Professor der höheren Mathematik an der Akademie der Wissenschaften zu Genf.				
1.	Considérations générales sur les racines des nombres premiers. . .	45.	IV.	303.	42.
2.	Note sur les séries décroissantes, dont les termes sont alternativement positifs et négatifs.	45.	IV.	345.	4.
3.	Mémoire sur la resolution de l'équation indéterminée $ax+bky = z(x^2+ky^2)$.	49.	II.	142.	9.
4.	Note sur les relations qui existent entre les formes linéaires et les formes quadratiques des nombres premiers.	49.	II.	151.	10.
5.	Mémoire sur la détermination des racines primitives des nombres premiers.	49.	II.	161.	26.
	147. Ostrograsky, Akademiker zu St. Petersburg.				
1.	Mémoire sur le calcul des variations des intégrales multiples. . .	15.	IV.	332.	23.
	148. Pagani, Professor der Mathematik an der Universität zu Lüttich.				
1.	Note sur la loi de la refraction simple.	11.	IV.	351.	2.
2.	Sur la forme et le mouvement d'une bulle qui se meut à travers un liquide.	11.	IV.	384.	4.
3.	Déplacement virtuel d'un système de points, unis invariablement entre eux.	11.	IV.	388.	6.
4.	Note sur l'attraction des sphéroïdes.	12.	IV.	342.	4.
5.	Démonstration d'un théorème de *Lambert*.	12.	IV.	350.	3.
6.	Sur les pressions exercées par un corps pesant qui repose sur plusieurs appuis.	13.	III.	270.	4.
7.	Résolution d'un problème relatif au calcul de variations.	15.	I.	84.	16.
8.	Note sur une transformation générale de la formule fondamentale de la mécanique.	17.	III.	243.	5.
9.	Mémoire sur l'équilibre d'un corps solide suspendu à un cordon flexible.	19.	III.	185.	20.
	149. Dr. Pauker, Professor der Mathematik zu St. Petersburg.				
1.	Note relative à quelques règles sur la convergence des séries. . .	42.	II.	138.	13.
2.	Das elliptische Potential.	47.	II.	125.	8.

A.	B.	C.	D.	E.	F.
	150. Dr. F. Piper, Professor der Theologie an der Universität zu Berlin.				
1.	Zur Kirchenrechnung.	22.	II.	97.	47.
	151. J. Plana, Director der Sternwarte, Professor und Akademiker zu Turin.				
1.	Recherches analytiques sur les expressions du rapport de la circonférence au diamètre trouvées par *Wallis* et *Brounker*, et sur la théorie de l'intégrale Eulérienne $\int_0^1 x^{p-1}\partial x(1-x^n)^q$.	17.	I.	1	81.
		17.	II.	163	
		17.	IV.	338	
2.	Note, où l'on explique une remarquable objection faite par *Euler* 1751 contre une règle donnée par *Newton* dans son Arithmétique universelle pour extraire la racine d'un binome réel de la forme $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$, quel que soit le degré impair de la racine demandée, si toutefois elle est impossible.	17.	IV.	331	9.
		20.	III.	283	
3.	Mémoire sur l'expression analytique de la surface totale de l'ellipsoïde dont les trois axes sont inégaux; et sur l'évaluation de la surface d'une voute symmétrique à base rectangulaire, retranchée dans la moitié du même ellipsoïde.	17.	IV.	345.	18.
4.	Mémoire sur différents procédés d'intégration par lesquels on obtient l'attraction d'un ellipsoïde homogène dont les trois axes sont inégaux, sur un point extérieur.	20.	III.	189.	82.
		26.	II.	132.	15.
5.	Note sur l'intégrale $\int\frac{\partial M}{r}=V$, qui exprime la somme des éléments de la masse d'un ellipsoïde, divisés respectivement par leur distance d'un point attiré.	20.	III.	271.	14.
6.	Nouvelle formule pour réduire l'intégrale $V=\int\frac{T\partial x}{\sqrt{X}}$ à la forme trigonométrique des transcendentes elliptiques T et X, ayant cette forme: $T=G+G'x+G''x_2+\frac{H+H_1\sqrt{-1}}{1+(K+K_1\sqrt{-1})x}+\frac{H-H_1\sqrt{-1}}{1+(K-K_1\sqrt{-1})x}$, $X=x^4+\lambda x^3+Ax^2+Bx+D$.	36.	I.	1.	74.
	152. Dr. Plücker, Professor der Mathematik und Physik an der Universität zu Bonn.				
1.	Über die Krümmung einer beliebigen Fläche in einem gegebenen Puncte.	3.	IV.	324.	13.
2.	Über die allgemeinen Gesetze, nach welchen irgend zwei Flächen einen Contact der verschiedenen Ordnungen haben.	4.	IV.	349.	22.
3.	Über ein neues Coordinatensystem.	5.	I.	1.	36.
4.	Über ein neues Princip der Geometrie und den Gebrauch allgemeiner Symbole und unbestimmter Coëfficienten.	5.	III.	268.	19.
5.	Über eine neue Art, in der analytischen Geometrie Puncte und Curven durch Gleichungen darzustellen.	6.	II.	107.	40.
6.	Geometrische Lehrsätze.	6.	II.	210.	3.
7.	Note sur une théorie générale et nouvelle des surfaces courbes. .	9.	II.	124.	11.
8.	Geometrische Aufgaben und Lehrsätze.	9.	IV	411.	2.
9.	Über solche Puncte, die bei Curven einer höheren Ordnung als die zweite, den Brennpuncten der Kegelschnitte entsprechen.	10.	I.	84.	8.
10.	Nachrichten von Büchern.	10.	I.	98.	3.

A.	B.	C.	D.	E.	F.
11.	Analytisch-geometrische Aphorismen. 10. III. 217; 10. IV. 293; 11. I. 26; 11. II. 117; 11. III. 219; 11. IV. 356.				51.
12.	Solution d'une question fondamentale concernant la theorie générale des courbes.	12.	II.	105.	4.
13.	Théorèmes généraux concernant les équations d'un degré quelconque entre un nombre quelconque d'inconnues.	16.	I.	47.	11.
14.	Discussion de la forme générale des ondes lumineuses.	19.	I.	1 / 91	46.
15.	Aphorismen aus der Geometrie des Raumes.	24.	I.	60 / III. 283	17.
16.	Über Curven dritter Ordnung, und analytische Beweisführung.	34.	IV.	329.	8.
17.	Note sur le théorème de *Pascal*.	34.	IV.	337.	4.
18.	Die analytische Geometrie der Curven auf den Flächen zweiter Ordnung und Classe.	34.	IV.	341 / 360	32.
19.	Über eine neue mechanische Erzeugung der Flächen zweiter Ordnung und Classe.	34.	IV.	357.	3.
20.	Über das *Ohm*sche physicalische Gesetz.	35.	II.	93.	8.
21.	Sur la réflexion de la lumière dans le cas des surfaces du second degré, analogue à celle qui aux figures des sections coniques a donné le nom.	35.	II.	100.	5.

153. † Poisson, weiland Akademiker und Pair von Frankreich.

1.	Rapport sur un ouvrage manuscrit de Mr. *Ostograsky* intitulé: Cours de mécanique celeste.	7.	I.	97.	5.
2.	Notice sur son ouvrage sur la théorie de l'action capillaire.	7.	II.	170.	6.
3.	Mémoire sur la courbure des surfaces.	8.	III.	280.	18.
4.	Note sur la surface dont l'aire est un minimum entre des limites données.	8.	IV.	361.	2.
5.	Rapport sur deux mémoires de Mr. *Liouville*.	10.	IV.	342.	6.
6.	Discours prononcé aux funérailles de Mr. *Legendre*	10.	IV.	360.	4.
7.	Théorèmes relatifs aux intégrales des fonctions algébriques.	12.	II.	89.	16.
8.	Préambule de son ouvrage sur la théorie mathématique de la chaleur.	12.	III.	258.	5.
9.	Rapport sur un mémoire de Mr. *Liouville*, concernant une question nouvelle d'analyse.	16.	I.	39.	2.

154. J. V. Poncelet, Ingenieur-General zu Paris.

1.	Frottement des vis et des écrous.	2.	IV.	293.	8.
2.	Méthode abrégée pour le tracé des engrenages de roues d'angle.	2.	IV.	301.	3.
3.	Mémoire sur les centres de moyennes harmoniques.	3.	III.	213.	60.
4.	Mémoire sur la théorie générale des polaires reciproques; pour faire suite au mémoire No. 3.	4.	I.	1.	71.
5.	Analyse des transversales, appliquée à la recherche des propriétés projectives de lignes et surfaces. (Suite des mémoires No. 3 et 4.)	8. I. 21 / 8. II. 117 / 8. III. 213 / 8. IV. 370			124.
6.	Application de la méthode des moyennes à la transformation, au calcul numérique et à la détermination des limites du reste des séries.	13.	I.	1.	54.
7.	Sur la valeur approchée linéaire et rationnelle des radicaux de la forme $\sqrt{(a^2+b^2)}$, $\sqrt{(a^2-b^2)}$ etc.	13.	IV.	277.	15.

A.	B.	C.	D.	E.	F.
	155. † Dr. Prehn, weiland Amtmann zu Ratzeburg.				
1.	Remarques sur le calcul dont a fait usage Mr. l'éditeur de ce journal dans son mémoire: „Sur les différentes manières de se servir de l'élasticité de l'air atmosphérique comme force motrice sur les chemins de fer" (Vol. 32). (No. 25.)	40.	III.	189.	4.
2.	Über die Aufhebung der Ungleichmäfsigkeit der durch die Kurbel vermittelten Bewegung.	40.	III.	205.	3.
3.	Über die Bedeutung der divergenten unendlichen Reihen, die Bestimmung ihrer Werthe, und über die Zuläfslichkeit ihrer Anwendung bei analytischen Rechnungen.	41.	I.	1	51.
		41.	IV.	364	
	156. Dr. Preufs, Professor und Historiograph zu Berlin.				
1.	Notiz von einigen Äufserungen Friedrich des Grofsen über *Celius*. .	39.	I.	90.	1.
	157. Dr. L. Raabe, Professor der Mathematik an der Universität zu Zürich.				
1.	Allgemeine Theorie der Epicykeln.	1.	IV.	289.	12.
2.	Sphärische Polygonometrie	2.	I.	9.	13.
3.	Über den Stillstand der Planeten.	2.	I.	85.	8.
4.	Gleichungen zweiter Ordnung in der Geometrie.	2.	II.	182.	6.
5.	Untersuchung über die Directrixen der Curven.	2.	IV.	330.	5.
6.	Eigenschaften der Curven, die sich auf bestimmten Oberflächen befinden.	2.	IV.	368.	12.
7.	Aufgaben und Lehrsätze.	2.	IV.	395.	1.
8.	Note zur Theorie der Convergenz und Divergenz der Reihen. . .	11.	IV.	309.	2.
9.	Über die Integration der Differentialgleichungen von der Form $dz = Hdx + Kdy + Ldp + Mdq + Ndr + \text{etc.}$ . . .	14.	II.	123.	46.
10.	Zur Theorie der Eingehüllten, Einhüllungs-Flächen, ihrer Characteristiken und der Wendungs-Curven.	15.	II.	125.	2.
11.	Bemerkungen zum Principe der doppelten Substitution bei den elliptischen Functionen.	15.	II.	191.	2.
12.	Über die Summation periodischer Reihen und die Reduction des Integrals $\int_0^\infty \varphi(\sin ax, \cos bx)\,dx$.	15.	IV.	355.	10.
13.	Bemerkung über Kreisfunctionen.	16.	III.	219.	2.
14.	Bemerkungen über eine Stelle in *Lagrange's* „Traité de la résolution des équations algébriques, art. IV. No. 79."	17.	I.	94	6.
		20.	I.	57	
15.	Beiträge zur näherungsweisen Berechnung bestimmter Integrale nach der Methode der Quadraturen.	18.	I.	75.	25.
16.	Über den Fall, wenn in dem bestimmten Integral $\int_a^b \varphi(x)\partial x$ die Function $\varphi(x)$ für einen oder mehrere Werthe von x, welche innerhalb a und b liegen, unendlich grofs oder discontinuirlich sind. . .	20.	II.	173.	5.
17.	Über die Summation der ohne Ende fortlaufenden harmonisch-periodischen Reihen und über die Reduction des Integrals $\int_0^\infty \varphi(\sin ax, \cos bx)\frac{\partial x}{x}$	23.	II.	105.	21.
18.	Angenäherte Bestimmung der Factorenfolge $1.2.3.4.5 \ldots n = \Gamma(1+n) = \int x^n e^{-x}\partial x$.	25.	II.	146	23.
		28.	I.	10	

A.	B.	C.	D.	E.	F.
19.	Über die Summation der ohne Ende fortlaufenden harmonisch-periodischen Reihen, und über die Reduction des Integrals $\int_0^\infty \varphi(\sin ax, \cos bx)\frac{\partial x}{x}$	25.	II.	160.	9.
20.	Ableitung der Reihe für $\arcsin x$, mit Zuziehung der Grenzgleichungen $\lim.\sin x = 0$ und $\lim.\cos x = 0$, wo die Grenzzeichen auf das unbestimmte unendliche Wachsen von x Bezug haben.	25.	II.	169.	2.
21.	Reduction des $p$fachen Integral-Ausdrucks $\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \varphi(a_1 x_1^{n_1} + a_2 x_2^{n_2} \ldots + a_p x_p^{n_p}) x_1^{r_1-1} x_2^{r_2-2} \ldots x_p^{r_p-1} \partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_p$, in welchem die a, r und n constante Gröfsen, die x die Integrationsvariabeln sind und φ eine beliebige Function ist, auf ein einfaches, dieselbe Function φ enthaltendes bestimmtes Integral. . .	28.	I.	19.	9.
22.	Über die Anzahl und die Form der Bedingungsgleichungen, unter welchen eine gewöhnliche Differentialgleichung zwischen zwei Variabeln n^{ter} Ordnung und von der Form $V = y_n \varphi(x, y, y_1, y_2, \ldots y_{n-1}) + \psi(x, y, y_1, y_2, \ldots y_{n-1})$ das unmittelbare Differentiations-Ergebnifs einer nach den allgemeinen Constanten aufgelöseten analogen Differentialgleichung $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung ist.	31.	III.	181.	32.
23.	Die Doppel-Integrale $\int_0^\infty\int_0^\infty \varphi(ax^m \pm by^n) x^{p-1} y^{q-1} \partial x \partial y$ und $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(ax^m \pm by^n) x^{p-1} y^{q-1} \partial x \partial y$, ihre gegenseitigen Beziehungen und die Reduction derselben auf einfache bestimmte Integral-Ausdrücke.	37.	IV.	345.	11.
24.	Über den richtigen Gebrauch vieldeutiger Functionen bei der Ermittlung bestimmter Iutegrale.	37.	IV.	356.	6.
25.	Über den Werth eines bestimmten Integrals, aus der unbestimmten Integralfunction gezogen, falls dieselbe von der Form $\arctang f(x)$ ist; wo $f(x)$ eine eindeutige Function von x vorstellt.	41.	I.	54.	3.
26.	Zurückführung einiger Summen und bestimmter Integrale auf die *Bernoulli*schen Functionen.	42.	IV.	348.	20.
27.	Über die Factorielle $\left(\frac{m}{k}\right) = \frac{m.(m-1).(m-2)\ldots(m-k+1)}{1.2.3\ldots k}$, in welcher die Basis m eine complexe Zahl von der Form $p+qi$ und i die imaginäre Einheit ist, p und q aber reelle Zahlen bezeichnen; desgleichen über einige bestimmte Integrale, die mit derselben im Zusammenhange stehen.	43.	IV.	283.	11.
28.	Über die gegenseitigen Beziehungen zwischen irgend einer ebenen Curve und den ihr zugehörigen, einem gemeinschaftlichen Pole entsprechenden Directrix- und Fufspunctenlinien.	48.	II.	105.	25.
29.	Werthung der Factorielle $\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-k+1)}{1.2.3\ldots k}$ beim unendlichen Zunehmen der reellen ganzen und positiven Zahl k, wenn m irgend eine reelle oder imaginäre Zahl ist.	48.	II.	130.	7.
30.	Über Producte und Potenzen bestimmter einfacher Integral-Ausdrücke, durch mehrfache dargestellt.	48.	II.	137.	6.

A.	B.	C.	D.	E.	F.
31.	Über die Darstellung einer Function zweier Variabeln z, z' nach aufsteigenden Potenzen zweier andern Variablen y, y', deren gegenseitige Abhängigkeit die Gleichungen $z=x+yfz$ und $z'=x'+y'fz'$ ausdrücken; wo fz dieselbe Function von z ist, wie fz' von z'. .	48.	II.	143.	8.
32.	Über die singulairen Integral-Auflösungen einer Differentialgleichung erster Ordnung mit zwei Variabeln.	48.	II.	151.	9.
33.	Über einen Hülfssatz zur Ausmittlung der Werthe bestimmter Integrale.	48.	II.	160.	7.
34.	Zurückführung der Wurzelform einer algebraischen Gleichung auf die Integration linearer partieller, oder auch eines Systems simultaner, gemeiner Differentialgleichungen erster Ordnung.	48.	II.	167.	11.
35.	Über den gegenseitigen Zusammenhang einiger Functionen. . . .	48.	II.	178.	12.
36.	Bemerkungen über Directrix- und Fufspunctenlinien.	50.	III.	189.	5.
37.	Discussion über krumme Flächen, in Beziehung auf Directrix- und Fufspunctenflächen.	50.	III.	194.	19.
	158. Dr. Radike, zu Bonn.				
1.	Einige Bemerkungen über die Principien der *Cauchy*schen Residuenrechnung.	25.	III.	216.	23.
2.	Notiz über eine fruchtbare Integrationsmethode, und Benutzung derselben zu einer einfachen Darstellung des Werths von $\int \frac{dx}{(x^2+a)^n}$.	36.	II.	183.	2.
	159. Ramus, Professor der Mathematik zu Copenhagen.				
1.	Remarques sur l'équation $\varphi(fx)=\varphi x\cdot\frac{dfx}{dx}$.	9.	IV.	359.	3.
2.	Solution générale d'un problême d'analyse combinatoire.	11.	IV.	353.	3.
3.	Démonstration de la formule générale d'intégration indéfinie, proposée par Mr. *Hill* tome 18. p. 376.	19.	II.	117.	2.
4.	Remarques sur les fractions continues périodiques.	20.	I.	13.	15.
5.	Theorema geometricum ad trianguli rectilinei theoriam pertinens. .	20.	I.	28.	1.
6.	Note sur une propriété des équations différentielles linéaires à deux variables.	23.	IV.	372.	3.
7.	De integralibus differentialium algebraicarum.	24.	I.	69.	11.
8.	Sur une question de probabilité, relative aux corrections des hauteurs barométriques.	24.	I.	80.	5.
9.	Démonstration d'un théorème sur quelques intégrales définies. . .	24.	III.	257.	5.
10.	Démonstration d'un théorème sur les équations différentielles linéaires à deux variables.	24.	III.	260.	2.
	160. Remy, Canzleirath zu Berlin.				
1.	Beweis zweier geometrischen Lehrsätze.	3.	I.	84.	2.
2.	Beweis eines geometrischen Lehrsatzes.	3.	III.	281	2.
	161. v. Renthe-Fink, Ingenieur-Hauptmann zu Berlin.				
1.	Beweis des Satzes No. 68. Band 2. S. 395.	6.	I.	96.	2.
2.	Versuch der Auflösung der Aufgabe No. 12. Band 6. S. 214: aus den drei, die Winkel eines geradlinigen Dreiecks halbirenden Scheitellinien den Inhalt derselben zu finden.	26.	III.	273.	4.
	162. Dr. Reuschle, Professor am Gymnasio zu Stuttgart.				
1.	Note über die analytischen Beweise elementar-geometrischer Sätze.	24.	II.	171.	6.
2.	Über die Deduction der Methode der kleinsten Quadrate aus Begriffen der Wahrscheinlichkeitsrechnung.	26. IV. 333. 27. II. 182.			35.

A.	B.	C.	D.	E.	F.
	163. Dr. Richelot, Professor der Mathematik an der Universität zu Königsberg in Pr.				
1.	Anwendung der elliptischen Transcendenten auf die sphärischen Polygone, welche zugleich einem kleinen Kreise der Kugel eingeschrieben und einem andern umschrieben sind.	5.	III.	250.	18.
2.	De resolutione algebraica aequationis $X^{257}=1$; sive de divisione circuli per bisectionem anguli septies repetitum in partes 257 inter se aequales, commentatio coronata.	9.	I.	1	87.
		9.	II.	146	
		9.	III.	209	
		9.	IV.	337	
3.	Note sur le théorème relatif à une certaine fonction transcendante, demontré tome 9. page 295.	9.	IV.	407.	2.
4.	De integralibus Abelianis primi ordinis commentatio prima.	12.	III.	181.	53.
5.	De transformatione integralium Abelianorum primi ordinis commentatio.	16.	III.	221	121.
		16.	IV.	285	
6.	Nota ad theoriam eliminationis pertinens.	21.	III.	226.	9.
7.	De integralibus quibusdam definitis, quorum summa ad quadraturam divisionemque circuli revocatur.	21.	IV.	293.	35.
8.	Über die Integration eines merkwürdigen Systems von Differentialgleichungen.	23.	IV.	354.	16.
9.	Einige neue Integralgleichungen des *Jacobi*schen Systems Differentialgleichungen.	25.	II.	97.	23.
10.	Nova theoremata de functionum Abelianarum cujusque ordinis valoribus, quibus pro complementis argumentorum atque indicum dimidiis induuntur.	29.	IV.	281.	52.
11.	Über die Reduction des Integrals $\int \frac{fx\,dx}{\sqrt{\pm(1-x^8)}}$ auf elliptische Integrale.	32.	III.	213.	6.
12.	Beweis eines Satzes über elliptische Functionen.	32.	III.	219.	1.
13.	Über die Substitutionen von der ersten Ordnung und die Umformung der elliptischen Integrale in die Normalform.	34.	I.	1.	29.
14.	Über die Anwendung einiger Formeln aus der Theorie der elliptischen Functionen auf ein bekanntes Problem der Geometrie.	38.	IV.	353.	20.
15.	Bemerkungen über einen Fall der Bewegung eines Systems von materiellen Puncten.	40.	II.	178.	5.
16.	Auszug eines Schreibens des Herrn Prof. *C. G. J. Jacobi*.	42.	I.	32.	3.
17.	Eine neue Lösung des Problems der Rotation eines festen Körpers um einen Punct. (Auszug aus dieser Schrift.)	44.	I.	60.	6.
18.	Schreiben von Herrn *Eisenstein*.	44.	III.	269.	4.
19.	Einige Bemerkungen zum *Euler*schen Additionstheorem der elliptischen Integrale.	44.	IV.	277.	18.
20.	Darstellung einer beliebigen gegebenen Gröfse durch $\sin\mathrm{am}(u+w, k)$.	45.	III.	225.	8.
21.	Bemerkungen über die Theorie des Raumpendels.	45.	III.	233.	6.
22.	Über eine merkwürdige Formel in der Theorie der elliptischen Transcendenten, und eine Ableitung des Fundamentaltheorems.	50.	I.	41.	11.
	164. Dr. G. Rosenhain, damals zu Breslau.				
1.	Exercitationes analyticae in theorema Abelianum de integralibus functionum algebraicarum.	28.	III.	249	48.
		29.	I.	1	
2.	Neue Darstellung der Resultante der Elimination von z aus zwei algebraischen Gleichungen $fz=0$ und $\varphi z=0$, mittels der Werthe welche die Functionen fz und φz für gegebene Werthe von z annehmen.	30.	II.	157.	9.

A.	B.	C.	D.	E.	F.
3.	Auszug mehrerer Schreiben an den Herrn Prof. *C. G. J. Jacobi* über die hyperelliptischen Tanscendenten.	40.	IV.	319.	42.
	165. G. Salmon, Professor der Mathematik zu Dublin.				
1.	Lettre adressée au rédacteur de ce journal.	39.	IV.	365.	2.
2.	Théorèmes sur les courbes de troisième degré.	42.	IV.	274.	5.
	166. Dr. Joh. Theoph. Sanio, damals zu Königsberg in Pr.				
1.	De functionum ellipticarum multiplicatione et transformatione quae ad numerum parem pertinet, commentatio.	14.	I.	1.	50.
	167. Dr. C. G. Sauer, damals zu Naumburg a. Q.				
1.	Einiges über die Integration der Differentialgleichung zweiter Ordnung (*Pfaff*schen) $x^2(a+bx^n)\partial^2y^2+x(c+ex^n)\partial y^2\partial x+(f+gx^n)y\partial x^2=M\partial x^2$. .	2.	I.	93.	3.
	168. Schaellibaum, damals Lehrer der Mathematik zu Berlin.				
1.	Beweis eines von Herrn Prof. *Steiner* in Band 14. Heft 1. aufgestellten Satzes.	16.	I.	82.	4.
2.	Auflösung der Aufgabe 1 (links) im Anfange des ersten Bandes der „Syst. Entw. der Abhängigkeit geometrischer Gestalten etc. von *Steiner*."	18.	II.	127.	7.
3.	Über die 44te Aufgabe in dem in Nr. 2 genannten *Steiner*schen Werke.	18.	II.	134.	8.
	169. Dr. Schaeffer, damals zu Berlin.				
1.	De integrali $-\int_0^x \frac{\log(1-\alpha)}{\alpha}\partial\alpha$.	30.	IV.	277.	19.
2.	Adnotationes ad seriem $1+\frac{x}{y}v+\frac{x(x+1)}{y(y+1)}v^2+\frac{x(x+1)(x+2)}{y(y+1)(y+2)}v^2\ldots$	37.	II.	127.	34.
	170. H. Scheffler, Dr. phil. zu Braunschweig.				
1.	Methodus nova aequationem indeterminatam secundi gradus duas incognitas implicantem per numeros integros solvendi.	45.	IV.	349.	21.
	171. Dr. Schellbach, Professor der Mathematik zu Berlin.				
1.	Über den Ausdruck $\pi=\frac{2}{i}\log i$.	9.	IV.	404.	3.
2.	Über die *Taylor*sche Reihe; nebst einer Anwendung auf die Zerlegung algebraischer Brüche.	11.	III.	274.	3.
3.	Über die Zeichen der Mathematik.	12.	I.	71	30.
		12.	II.	148	
4.	Über die *Gauss*ischen Formeln zur näherungsweisen Berechnung eines bestimmten Integrals.	16.	II.	192.	4.
5.	Über das Integral der lineären Differentialgleichungen höherer Ordnungen.	16.	IV.	352.	8.
6.	Auflösung der Aufgaben No. 3. 4. 5. Band 15. Heft 4.	16.	IV.	360.	3.
7.	Über eine eigenthümliche Entwicklung der Sinus- und Cosinusreihen nach Potenzen des Bogens.	16.	IV.	363.	3.
8.	Über eine elementare Entwicklungsweise der einfachsten transcendenten Functionen.	17.	IV.	321.	10.
9.	Problem der Variationsrechnung.	41.	IV.	293.	71.

A.	B.	C.	D.	E.	F.
10.	Eine Auflösung der *Malfatti*schen Aufgabe.	45.	I.	91.	2.
11.	Eine Erweiterung der *Malfatti*schen Aufgabe.	45.	II.	186.	2.
12.	Mathematische Miscellen.	45.	III.	255.	28.
	I. Über die Bewegung eines Punctes, der von einem festen Puncte angezogen wird.				
	II. Fortsetzung von I.				
	III. Dasselbe Problem im Raume.				
	IV. Fortsetzung.				
	V. Über den Krümmungskreis.				
	VI. Über den Krümmungshalbmesser.				
	VII. Eine Wirkung der Schwungkraft.				
	VIII. Über die Gesetze des Stofses und die Ausflufsgeschwindigkeit des Wassers aus kleinen Öffnungen.				
	IX. Über den Schwerpunct sphärischer Figuren.				
13.	Die einfachsten periodischen Functionen.	48.	III.	207.	30.
	172. Dr. Th. Scherer, damals zu Berlin.				
1.	Beweis einiger geometrischen Sätze.	6.	I.	98.	2.
	173. Scherk, damals Professor der Mathematik zu Halle.				
1.	Lehrsätze über den Zusammenhang der Combinationen mit Variationen, und jener unter einander.	3.	I.	96.	2.
2.	Über einen allgemeinen, die Bernoullischen Zahlen und die Coëfficienten der Secantenreihe zugleich darstellenden Ausdruck.	4.	III.	299.	6.
3.	Integration der Gleichung $\frac{\partial^n y}{\partial x^n} = (\alpha+\beta x)y$.	10.	I.	92.	5.
4.	Bemerkungen über die Bildung der Primzahlen aus einander. . .	10.	III.	201.	8.
5.	Über die allgemeine Entwicklung der ganzen Potenzen des Bogens in Reihen, die nach den aufsteigenden Potenzen des Sinus fortschreiten.	11.	II.	101.	16.
6.	Analytisch-combinatorische Sätze.	11.	III.	226.	15.
7.	Bemerkungen über die kleinste Fläche innerhalb gegebener Grenzen.	13.	III.	185.	24.
	174. Schläffli, Professor der Mathematik zu Bern.				
1.	Sur les coëfficients du développement du produit $1.(1+x)(1+2x)\ldots$ $\ldots(1+(n-1)x)$ suivant les puissances ascendantes de x. . . .	43.	I.	1.	22.
2.	Über das Minimum des Integrals $\int\sqrt{(\partial x_1^2+\partial x_2^2\ldots\partial x_n^2)}$, wenn die Variabeln x durch eine Gleichung zweiten Grades gegenseitig von einander abhängig sind.	43.	I.	23.	14.
3.	Über eine Function von drei Winkeln, deren erste Abgeleiteten ebenfalls als Winkel anzusehen und durch algebraische Relationen ihrer Cosinus zu denen der Unabhängigen bestimmt sind.	48.	III.	292.	9.
	175. Dr. O. Schlömilch, Professor der Mathematik am polytechnischen Institut zu Dresden.				
1.	Théorèmes généraux sur les dérivées d'un ordre quelconque de certaines fonctions très générales.	32.	I.	1.	7.
2.	Développement d'une formule qui donne en même temps les nombres de *Bernoulli* et les coefficients de la série qui exprime la sécante.	32.	IV.	360.	5.
3.	Note sur les variations des constantes arbitraires d'une intégrale définie.	33.	III.	268.	13.
4.	Note sur quelques intégrales définies.	33.	IV.	316.	9.

A.	B.	C.	D.	E.	F.
5.	Sur l'intégrale définie $\int_0^\infty \frac{\partial\theta}{\theta^2+a^2}\cdot e^{-x\theta}$	33.	IV.	325.	4.
6.	Développement de quelques intégrales définies, renfermant des fonctions trigonométriques.	33.	IV.	353.	9.
7.	Nouvelle démonstration des théorèmes de *Fourier*.	36.	III.	268.	3.
8.	Transformation de quelques intégrales définies.	36.	III.	271.	6.
9.	Développement de deux formules sommatoires.	42.	II.	125.	6.
10.	Sur les facultés analytiques.	44.	IV.	344.	12.
	176. Dr. Th. Schönemann, Professor der Mathematik zu Brandenburg a. d. H.				
1.	De functionibus quibusdam, quae ad radicem aequationum circuli sectionum, sive aequationes $x^p-1=0$ pertinent, rationaliter determinandis.	17.	IV.	372.	10.
2.	Über die Congruenz $x^2+y^2\equiv 1 \pmod{p}$ (Theorie der trigonometrischen Functionen in Bezug auf Congruenzen).	19.	II.	93.	20.
3.	Theorie der symmetrischen Functionen der Wurzeln einer Gleichung. Allgemeine Sätze über Congruenzen, nebst einigen Anwendungen derselben.	19.	III.	231) 289)	33.
4.	Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Congruenzen, deren Modul eine reelle Primzahl ist.	31.	IV.	269) 93)	70.
5.	Über einige von Herrn Dr. *Eisenstein* aufgestellte Lehrsätze, irreductible Congruenzen betreffend. (S. Band 39. S. 182.)	40.	III.	185.	4.
	177. D. Fr. Schmeisser, Prorector zu Frankfurt a. d. O.				
1.	Über die Theorie der Kugeldreiecke.	10.	II.	129.	25.
	178. † Dr. v. Schmidten, weiland Professor der Mathematik zu Copenhagen.				
1.	Versuch über die Integration der Differentialgleichungen.	1.	II.	131.	14.
2.	Sur un principe général dans la théorie des séries.	5.	IV.	388.	9.
	179. † Dr. E. J. Scholtz, weiland Professor an der Universität zu Breslau.				
1.	Über Reihen, durch welche höhere Potenzen des Bogens durch den Sinus ausgedrückt werden.	3.	I.	70.	9.
	180. F. Schultze, damals Privatlehrer der Mathematik zu Berlin.				
1.	Allgemeine Berechnung der fünf regulären Körper.	28.	II.	108.	3.
	181. N. W. Schulze, damals Lehrer der Mathematik zu Berlin.				
1.	Einiges von Näherungen in der Analysis.	13.	III.	250.	7.
	182. Dr. L. C. Schulz von Strasznicki, Professor der Mathematik zu Wien.				
1.	Beiträge zur Discussion des *Euler*schen Lehrsatzes von Polyëdern, in Beziehung auf die neulich bemerkten Ausnahmen desselben.	14.	I.	83.	5.
2.	Bemerkung zu der *Dahsi*schen Berechnung des Kreis-Umfanges.	27.	III.	198.	1.

A.	B.	C.	D.	E.	F.
	183. Dr. Schweins, Geheimer Hofrath und Professor der Mathematik zu Heidelberg.				
1.	Neue Eigenschaft zweier Kräfte, durch welche ein Kräftensystem ersetzt werden kann.	32.	III.	227.	4.
2.	Kräfte im Raume.	38.	I.	40.	37.
3.	Fliehmomente, oder die Summe $\Sigma(xX+yY)$ bei Kräften in der Ebene, und $\Sigma(xX+yY+zZ)$ bei Kräften im Raume.	38.	I.	77.	22.
4.	Theorie der Dreh- und Fliehmomente der parallelen Seitenkräfte, in welche Kräfte im Raume zerlegt werden können.	47.	III.	238.	8.
5.	Theorie der Mittelpuncte der parallelen Seitenkräfte.	47.	III.	246.	23.
	184. Dr. E. Segnitz, zu Eldena.				
1.	Über Torsionswiderstand und Torsionsfestigkeit.	43.	IV.	340.	25.
	185. J. A. Serret, Professor der Mathematik zu Paris.				
1.	De la sphère tangente à quatre sphères données.	37.	I.	51.	7.
	186. Dr. Siebeck, damals zu Breslau.				
1.	Über periodische Kettenbrüche.	33.	I.	68.	3.
2.	Die recurrenten Reihen, vom Standpunct der Zahlentheorie aus betrachtet.	33.	I.	71.	7.
	187. Simonoff, Professor an der Universität zu Kasan.				
1.	Sur le magnétisme terrestre.	16.	III.	179.	9.
	188. Ch. Z. Slonimsky, damals Mathematiker zu Bialystock in Russland.				
1.	Eine allgemeine Formel für die gesammte jüdische Kalenderberechnung.	28.	II.	179.	5.
2.	Allgemeine Bemerkungen über Rechenmaschinen, und Prospectus eines neu erfundenen Rechen-Instruments.	28.	II.	184.	6.
	189. Dr. W. Smaasen, zu Utrecht.				
1.	Sur la sommation de suites infinies par des intégrales définies. . .	42.	III.	222.	14.
	190. H. J. Smith, Professor an der Universität zu Oxford.				
1.	De compositione numerorum primorum formae $4\lambda+1$ e duobus quadratis.	50.	I.	19.	2.
	191. † Dr. Sohnke, weiland Professor der Mathematik an der Universität zu Halle.				
1.	Motus corporum coelestium in medio resistente.	10.	I.	23.	18.
2.	Aequationes modulares pro transformatione functionum ellipticarum 11^{mi}, 13^{mi} et 17^{mi} ordinis.	12.	II.	178.	1.
3.	Aequationes modulares pro transformatione functionum ellipticarum.	16.	II.	97.	34.
	192. Dr. Somoff, professeur d'analyse à l'université de St. Peterbourg.				
1.	Démonstration des formules de Mr. *Jacobi,* relatives à la théorie de la rotation d'un corps solide.	42.	II.	95.	22.
2.	Méthode du calcul des fonctions elliptiques du troisième espèce. .	47.	III.	269.	20.
	193. C. G. Specht, Cand. phil. zu Berlin.				
1.	Annäherungsconstruction des Kreis-Umfanges und Flächen-Inhalts. .	3.	I.	83.	1.
2.	Zweite Annäherungs-Construction des Kreis-Umfanges.	3.	IV.	405.	2.

A.	B.	C.	D.	E.	F.
	194. S. Spitzer, Assistent und Privatdocent der Mathematik am K. K. polytechnischen Institut zu Wien.				
1.	Bemerkung zur Theorie der Gröfsten und Kleinsten.	48.	IV.	381.	5.
	195. W. Spottiswoode, de l'université d'Oxford.				
1.	Mémoire sur quelques formules relatives aux surfaces du second ordre.	42.	II.	169.	10.
2.	Mémoire sur les points singuliers d'une courbe à double courbure. .	42.	IV.	372.	7.
3.	Two lettres of the geometrical correspondence between Mr. *Donkin* and *Spottiswoode*.	47.	III.	225.	8.
	196. Dr. ph. Stader, zu Berlin.				
1.	De orbitis et motibus puncti cujusdam corporei circa centrum attractivum aliis quam Newtoniana, attractionis legibus sollicitati. .	46.	III.	262)	65.
		46.	IV.	283)	
	197. Dr. W. Stammer, aus Luxemburg.				
1.	Über Kreis-Coordinaten.	44.	IV.	295.	22.
	198. Dr. Staudt, Professor der Mathematik an der Universität zu Erlangen.				
1.	Beweis eines Lehrsatzes, die Bernoullischen Zahlen betreffend. . .	21.	IV.	372.	3.
2.	Construction des regulären Siebenzehnecks.	24.	III.	251.	1.
3.	Über die Inhalte der Polyëder und Polygone.	24.	III.	252.	5.
4.	Beweis, dafs jede algebraische rationale ganze Function von einer Veränderlichen in Factoren vom ersten Grade aufgelöset werden kann.	29.	II.	97.	6.
	199. Steichen, professeur à l'école militaire de Bruxelles.				
1.	Essai d'une théorie générale du centre de forces; précédé de quelques considérations sur la resultante.	38.	IV.	277.	54.
2.	Mémoire de mécanique, relatif au mouvement de rotation et au mouvement naissant des corps solides.	43.	II.	161)	84.
		43.	III.	185)	
3.	Exposé de diverses remarques et reflexions sur les moments, et d'autres sujets de statique.	44.	III.	181.	39.
4.	De la propriété fondamentale du mouvement cycloïdal, et de sa liaison avec le principe de la composition des mouvements de rotation autour d'axes parallels et d'axes qui se coupent.	46.	I.	24.	19.
5.	Note sur le §. 6. du mémoire (No. 2. ci-dessus).	46.	I.	43.	4.
6.	Mémoire sur la question réciproque du centre de percussion. . .	48.	I.	1.	68.
7.	Quelques considérations sur l'équilibre du polygone funiculaire, et sur la chaînette.	50.	II.	93.	18.
	200. † A. Stein, weiland Professor der Mathematik zu Trier.				
1.	Über die Vergleichung der verschiedenen Numerationssysteme. . .	1.	IV.	369.	2.
	201. Dr. J. Steiner, Professor an der Universität und Akademiker zu Berlin.				
1.	Einige geometrische Sätze.	1.	I.	39.	15.
2.	Einige geometrische Betrachtungen.	1.	II.	161.	24.
3.	Fortsetzung derselben.	1.	III.	252.	37.
4.	Einige Gesetze der Theilung der Ebene und des Raums.	1.	IV.	349.	14.

A.	B.	C.	D.	E.	F.
5.	Leichter Beweis eines stereometrischen Satzes von *Euler;* nebst einem Zusatz zu (No. 1. hier oben).	1.	IV.	364.	3.
6.	Verwandlung und Theilung sphärischer Figuren durch Construction.	2.	I.	45.	19.
7.	Auflösung einer geometrischen Aufgabe.	2.	I.	64.	2.
8.	Geometrische Aufgaben und Lehrsätze.	2.	I.	96.	3.
9.	Geometrische Lehrsätze.	2.	II.	190.	3.
10.	Zwei polygonometrische Sätze.	2.	III.	263.	5.
11.	Auflösung einer Aufgabe aus den Annalen der Mathem. von *Gergonne.*	2.	III.	268.	8.
12.	Geometrische Lehrsätze.	2.	III.	287.	6.
13.	Bemerkungen zu der zweiten Aufgabe in der Abhandlung Band 3. S. 196.	3.	II.	201.	4.
14.	Anmerkung zu dem Aufsatze Bd. 3. S. 199.	3.	II.	205.	2.
15.	Aufgaben und Lehrsätze.	3.	II.	207.	6.
16.	Démonstration géométrique d'un théorème relatif à l'attraction d'une couche elliptique sur un point extérieur.	12.	II.	141.	3.
17.	Ein neuer Satz über die Primzahlen.	13.	IV.	356.	5.
18.	Aufgaben und Lehrsätze.	13.	IV.	361.	4.
19.	Einfache Construction der Tangenten an die Lemniscate.	14	I.	80.	3.
20.	Aufgaben und Lehrsätze.	14.	I.	88.	5.
21.	Aufgaben und Lehrsätze.	15.	IV.	373.	6.
22.	Aufgaben und Lehrsätze.	16.	I.	86.	9.
23.	Maximum und Minimum des Bogens einer beliebigen Curve, im Verhältnifs zur zugehörigen Abscisse oder Ordinate.	17.	I.	83.	9.
24.	Aufgaben und Lehrsätze.	18.	III.	278.	9.
		18.	IV.	369.	
25.	Einfache Beweise der isoperimetrischen Hauptsätze.	18.	IV.	281.	16.
26.	Von dem Krümmungs-Schwerpuncte ebener Curven.	21.	I.	33.	64.
		21.	II.	101.	
27.	Über einige stereometrische Sätze.	23.	III.	275.	10.
28.	Sur le maximum et le minimum des figures dans le plan, sur la sphère, et dans l'espace en général.	24.	II.	93.	122.
		24.	III.	189.	
29.	Elementare Lösung einer Aufgabe über das ebene und sphärische Dreieck.	28.	IV.	375.	5.
30.	Teoremi relativi alle coniche inscritte e circoscritte.	30.	II.	97.	10.
31.	Über eine Eigenschaft der Krümmungshalbmesser der Kegelschnitte.	30.	III.	271.	2.
32.	Lehrsätze und Aufgaben.	30.	III.	273.	4.
33.	Über eine Eigenschaft der Leitstrahlen der Kegelschnitte.	30.	IV.	337.	4.
34.	Geometrische Aufgaben und Lehrsätze.	31.	I.	90.	3.
35.	Über Lehrsätze, von welchen die bekannten Sätze über parallele Curven besondere Fälle sind.	32.	I.	75.	5.
36.	Geometrische Lehrsätze.	32.	II.	182.	3.
37.	Sätze über Curven zweiter und dritter Ordnung.	32.	IV.	300.	5.
38.	Über das dem Kreise umgeschriebene Viereck.	32.	IV.	305.	6.
39.	Elementare Lösung einer geometrischen Aufgabe; und über einige damit in Beziehung stehende Eigenschaften der Kegelschnitte.	37.	II.	161.	32.
40.	Über das gröfste Product der Theile oder Summanden einer Zahl.	40.	III.	208.	1.
41.	Lehrsätze.	44.	III.	275.	2.
42.	Lehrsätze.	45.	II.	177.	4.
43.	Combinatorische Aufgaben.	45.	II.	181.	5.
44.	Über einige neue Bestimmungs-Arten der Curven zweiter Ordnung, nebst daraus folgenden neuen Eigenschaften derselben Curven.	45.	III.	189.	23.
45.	Allgemeine Betrachtungen über einander doppelt berührende Kegelschnitte.	45.	III.	212.	13.
46.	Aufgaben und Lehrsätze.	45.	IV.	375.	6.

A.	B.	C.	D.	E.	F.
47.	Allgemeine Eigenschaften der algebraischen Curven.	47.	I.	1.	6.
48.	Über solche algebraische Curven, welche einen Mittelpunct haben, und über darauf bezügliche Eigenschaften allgemeiner Curven; so wie über geradlinige Transversalen der letztern. (Theils Auszug, theils Erweiterung eines am 26. Mai 1851 in der Akademie der Wissenschaften (zu Berlin) gehaltenen Vortrages).	47.	I.	7.	99.
49.	Aufgaben und Sätze, bezüglich auf (No. 48.)	47.	I.	106.	3.
50.	Eigenschaften der Curven vierten Grades rücksichtlich ihrer Doppeltangenten.	49.	III.	265.	14.
51.	Über algebraische Curven und Flächen.	49.	IV.	333.	16.
	202. v. Steinheil, zu München.				
1.	Hydrostatische Aufgabe.	8.	III.	320.	1.
	203. Dr. Stern, Professor der Mathematik an der Universität zu Göttingen.				
1.	Bemerkungen über die höhere Arithmetik.	6.	II.	147.	12.
2.	Théorème et problème.	7.	I.	104.	1.
3.	Summirung zweier Kettenbrüche.	8.	I.	42.	9.
4.	Obervationes in fractiones continuas.	8.	II.	192.	2.
5.	Bemerkungen zur höheren Arithmetik.	9.	I.	97.	2.
6.	Remarques sur un théorème énoncé par Mr. *Fourier*.	9.	III.	305.	7.
7.	Theorie der Kettenbrüche, und ihre Anwendung. 10. I. 1; 10. II. 154; 10. III. 241; 10. IV. 364; 11. I. 33; 11. II. 142; 11. III. 277; 11. IV. 311.				214.
8.	Über die Summirung gewisser Reihen.	10.	III.	209.	8.
9.	Algebraischer Lehrsatz.	11.	II.	200.	1.
10.	Démonstration de quelques théorèmes sur les nombres.	12.	IV.	288.	4.
11.	Note sur la conversion des séries en produits composés d'un nombre infini des facteurs.	12.	IV.	353.	2.
12.	Beweis dreier Lehrsätze von *Steiner*, Band 13. S. 361 und 362; nebst zwei andern Aufgaben.	14.	I.	76.	4.
13.	Zur Theorie der Kettenbrüche.	18.	I.	69.	7.
14.	Aufgaben.	18.	I.	100.	1.
15.	Lehrsätze.	18.	IV.	375.	1.
16.	Sur la valeur d'une série infinie.	20.	IV.	321.	2.
17.	Beiträge zur Combinationslehre und der Anwendung auf die Theorie der Zahlen.	21.	I.	91	23.
		21.	II.	177	
18.	Remarques sur les intégrales Eulériennes.	21.	IV.	377.	3.
19.	Über die Auflösung der transcendenten Gleichungen.	22.	I.	1.	62.
20.	Elementarer Beweis eines Fundamentalsatzes aus der Theorie der Gleichungen.	23.	IV.	320.	2.
21.	Bemerkung zu der Abhandlung von *Luchterhand* Nr. 2.	25.	III.	280.	1.
22.	Über die Coëfficienten der Secantenreihe.	26.	I.	88.	4.
23.	Notiz über einige Producten-Ausdrücke.	27.	III.	279.	2.
24.	Eine Bemerkung zur Zahlentheorie.	32.	I.	89.	2.
25.	Über die Summe einer gewissen endlichen Reihe.	33.	IV.	362.	1.
26.	Über die Anwendung der *Sturm*schen Methode auf transcendente Gleichungen.	33.	IV.	363.	3.
27.	Über die Irrationalität des Werths gewisser Reihen.	37.	I.	95.	2.
28.	Über die Kennzeichen der Convergenz eines Kettenbruchs. . . .	37.	III.	255.	18.
	204. Dr. Strehlke, Professor der Mathematik zu Berlin.				
1.	Über den Krümmungshalbmesser der Kegelschnitte.	2.	IV.	380.	6.
2.	Zwei mathematische Bemerkungen.	12.	IV.	358.	4.

A.	B.	C.	D.	E.	F.
	205. J. Sussmann, Assistent am Königlichen Gewerbe-Institut zu Berlin.				
1.	Vereinfachung des Beweises von *Cauchy*, dafs jede Gleichung $n$ten Grades wenigstens eine Wurzel hat.	44.	I.	57.	3.
	206. Dr. A F. Svanberg, zu Stockholm.				
1.	Mémoire sur quelques intégrales définies.	18.	I.	55.	14.
2.	Sur le mouvement des fluides.	24.	II.	153.	11.
	207. Dr. Swellengrebel, zu Utrecht.				
1.	Beitrag zur Lehre von den geometrischen Verwandtschaften. . . .	43.	III.	245.	38.
	208. P. Tardy, Professor der Mathematik zu Rom.				
1.	Sulle equazioni differenziali lineari.	42.	II.	131.	3.
2.	Sulle equazioni lineari alle differenze finite.	42.	II.	134.	4.
3.	Sopra un teorema di Poligonometria.	47.	II.	125.	8.
	209. Dr. P. Tchebicheff, zu Moscau.				
1.	Note sur la convergence de la série de *Taylor*.	28.	III.	279.	5.
2.	Démonstration élémentaire d'une proposition générale de la théorie des probabilités.	33.	III.	259.	9.
	210. Dr. A. Tellkampf, Professor der Mathematik zu Hamm in Westphalen.				
1.	Nova curvas investigandi methodus.	14.	I.	93)	17.
		14.	II.	101)	
	211. Dr. A. Thacker, zu Cambridge.				
1.	Ein Beitrag zur Zahlentheorie.	40.	I.	89.	4.
	212. Theremin, colonel du génie de voies de communications, à Saratow, principauté d'Astrachan.				
1.	Recherches sur la figure et le mouvement d'une bulle d'air, dans un liquide de densité constante etc.	5.	I.	93.	9.
2.	Suite de ces recherches.	5.	IV.	374.	6.
3.	Recherches sur la résolution des équations de tous les degrés. . .	49.	III.	187.	56.
	213. W. Thomson, fellow of St. Peters college at Cambridge.				
1.	Introductory notices to the essay on the application of mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism.	39.	I.	73.	3.
	214. Abbé Bern. Tortolini, Professor der höhern Mathematik an der Universität zu Rom.				
1.	Sur les transformations et les valeurs de plusieurs intégrales définies qui se rapportent aux surfaces et aux solidités des volumes. . . .	26.	IV.	277.	11.
2.	Mémoire sur quelques applications de la méthode inverse des tangentes.	26.	IV.	288.	23.
3.	Nuove applicazioni del Calcolo integrale relative alla quadratura delle superficie curve e cubatura de solidi.	31.	I.	12)	49.
		34.	II.	101)	
4.	Nota sopra l'equazione di una curva del sesto ordine, che s'incontrà in un problema riguardante l'ellissi.	33.	I.	90.	5.
	215. Dr. J. C. Ullherr, Professor an der polytechnischen Schule zu Nürnberg.				
1.	Zwei Beweise für die Existenz der Wurzeln der höheren algebraischen Gleichungen.	31.	III.	231.	4.

A.	B.	C.	D.	E.	F.
	216. Dr. Umpfenbach, Professor der Mathematik an der Universität zu Giefsen.				
1.	Über die Sonderung der Wurzeln einer Gleichung.	20.	I.	60.	2.
2.	Beweis, dafs ein Vieleck mit gegebenen Seiten am gröfsten ist, wenn seine Ecken in einem Kreise liegen.	25.	II.	184.	2.
3.	Über die Verallgemeinerung des Pythagoräischen Lehrsatzes. . . .	26.	I.	92.	1.
4.	Durch vier gegebene Puncte eine Parabel zu ziehen.	26.	II.	183.	2.
5.	Von den vielfachen Puncten einer krummen Fläche.	28.	IV.	380.	1.
6.	Ein Lehrsatz von Kegelschnitten.	30.	I.	95.	2.
	217. Dr. Unger, Professor zu Erfurt.				
1.	Einfacher geometrischer Beweis, dafs, wenn R und r die Halbmesser der in und um ein Dreieck beschriebenen Kreise bedeuten und D die Entfernung der Mittelpuncte dieser Kreise von einander bezeichnet, $D^2 = R^2 - 2Rr$ ist.	4.	IV.	395.	1.
2.	Aufgaben und Lehrsätze.	5.	I.	112.	1.
3.	Geometrische Aufgabe.	5.	III.	318.	1.
	218. P. Volpicelli, Professor an der Universität zu Rom.				
1.	Rectification des formules, qui expriment le nombre des decompositions d'un nombre donné en deux carrés.	49.	II.	119.	4.
	219. Dr. Waltinowsky, damals zu Triest.				
1.	Einiges über die Berechnung der reellen Wurzeln numerischer Gleichungen mittels ohne Ende fortlaufender Reihen.	33.	II.	164.	10.
	220. Dr. C. Weierstrafs, Oberlehrer der Mathematik am Gymnasio zu Braunsberg in Ostpreufsen.				
1.	Zur Theorie der *Abel*schen Functionen.	47.	IV.	289.	18.
	221. Jul. Weingarten, Stud. math. zu Berlin.				
1.	Zur Theorie des Potentials.	49.	IV.	367.	4.
	222. Dr. Weifs, damals zu München.				
1.	Einige Aufgaben aus der Combinationslehre.	34.	III.	255.	57.
		38.	II.	107.	
2.	Einige Aufgaben aus der Lehre von den wiederkehrenden Reihen. .	38.	II.	148.	10.
	223. Dr. W. Winkhaus, zu Halver bei Arnsberg.				
1.	Geometrisches.	44.	IV.	375.	1.
	224. A. Winkler, Professor der Mathematik am polytechnischen Institut zu Brünn.				
1.	Kurze Ableitung des *Legendre*schen Satzes über die Reduction der Berechnung eines sphärischen auf die eines ebenen Dreiecks. . .	44.	III.	273.	1.
2.	Über die Reduction doppelter Integrale auf Quadraturen.	45.	II.	102.	66.
3.	Transformation dreifacher Integrale durch Änderung der Integrationsfolge.	45.	II.	168.	7.
4.	Über einen elementaren Satz der Statik.	45.	II.	175.	2.
5.	Über die Reduction dreifacher Integrale auf Quadraturen.	50.	I.	1.	31.
6.	Bemerkungen über einige Formeln der Geodäsie.	50.	I.	32.	9.
	225. Dr. F. Wöpke, Privatdocent an der Universität zu Bonn.				
1.	Notice sur un manuscrit arabe d'un traité d'algèbre par *Aboul Fath*				

A.	B.	C.	D.	E.	F.
	Omar Ben Ibrahim Alkhayâmi, contenant la construction géométrique des équations cubiques.	40.	II.	160.	13.
2.	Note sur l'expression $\left(((a^a)^a)^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}\right)^a$ et les fonctions inverses correspondantes.	42.	I.	83.	8.
	226. Dr. R. Wolf, Professor der Mathematik an der Universität zu Bern.				
1.	Über die Fufspunctencurven der Linien zweiten Grades.	20.	I.	88.	9.
	227. Dr. Zech, damals zu Tübingen.				
1.	Über das Princip der kleinsten Wirkung.	24.	II.	177.	12.
	228. G. Zeuner, Berg-Ingenieur zu Chemnitz.				
1.	Lösung einiger Aufgaben aus der Axonometrie; mit besonderer Berücksichtigung der Anwendung derselben bei bildlicher Darstellung der Zwillingskrystalle.	46.	II.	97.	22.
	229. Dr. Zornow, Professor der Mathematik zu Königsberg in Preufsen.				
1.	Démonstration de la solution du problème de *Malfatti*, donnée par Mr. *Steiner* tome I. p. 178.	10.	IV.	300.	3.
2.	De compositione numerorum e cubis integris primitivis.	14.	III.	276.	5.
	Ungenannte. *(Anonymes.)*				
	***A.* Abhandlungen. (*Mémoires.*)**				
1.	Theorie der Hebelwage von Quintenz.	1.	II.	157.	2.
2.	Bemerkungen über ein Polyëder.	3.	II.	199.	2.
3.	Beweis eines geometrischen Lehrsatzes.	3.	III.	282.	3.
4.	Auflösung der Aufgabe No. 19. Band 2. S. 99.	3.	IV.	351.	3.
5.	Von der Zerlegung symmetrischer Polyëder.	4.	III.	296.	3.
6.	Théorème sur les nombres.	5.	III.	296.	1.
7.	Beweis des Lehrsatzes vom Fünfeck Bd. 4. S. 396.	5.	III.	316.	2.
8.	Théorème sur les nombres.	5.	IV.	386.	2.
9.	Preis-Aufgabe der Petersburger Akademie f. 1833 (über Ebbe und Fluth).	8.	IV.	412.	2.
10.	Preis-Aufgabe der Berliner Akademie für 1836 (über den Bielaschen Cometen).	9.	IV.	409.	2.
11.	Théorie des parallèles.	11.	II.	198.	1.
12.	Sur la valeur de 0^0.	11.	III.	272.	2.
13.	Bemerkungen zu No. 12.	12.	IV.	292.	3.
14.	Recension der „Untersuchungen über die Eigenschaften der positiven ternären quadratischen Formen vom Dr. *L. A. Seeber*, Professor der Mathematik zu Freiburg."	20.	IV.	312.	9.
15.	Extrait du procès verbal de l'académie impériale des sciences de St. Petersbourg du 22 Septbr. 1841 (concernant l'édition des ouvrages de *L. Euler*).	23. II. 196 23. III. 287 26. IV. 368			6.
16.	Unedirter Brief des berühmten Mathematikers *Joh. Bernoulli* (geb. 1667, gest. 1748) an *L. Euler* in St. Petersburg, datirt aus Basel den 11. August 1731.	23.	II.	199.	2.
	***B.* Aufgaben und Lehrsätze. (*Problèmes et Théorèmes.*)**				
1.	Aus der Analysis, Geometrie und angewandten Mathematik. . . .	2.	I.	99.	2.
2.	Desgleichen.	2.	II.	193.	4.

A.	B.	C.	D.	E.	F.
3.	Aus der Geometrie.	2.	III.	292.	1.
4.	Aus der Analysis, Geometrie und angewandten Mathematik.	2.	IV.	396.	3.
5.	Aus der Theorie der Gleichungen.	3.	I.	97.	4.
6.	Aus der Geometrie.	3.	IV.	408.	2.
7.	Aus der Geometrie.	4.	IV.	396.	4.
8.	Aus der Geometrie.	5.	I.	110.	3.
9.	Aus der Differenzen- und Differential-Rechnung.	5.	II.	222.	1.
10.	Zur Theorie der Gleichungen und zur Aërodynamik.	5.	III.	318.	1.
11.	Bemerkungen zu der Abhandlung von *Minding* No. 1.	6.	I.	81.	3.
12.	Théorèmes et problèmes snr les nombres.	6.	I.	100.	7.
13.	Geometrische Lehrsätze und Aufgaben.	6.	II.	213.	2.
14.	Beweis des Lehrsatzes B. 3. S. 312.	6.	III.	310.	1.
15.	Geometrische und analytische Aufgaben.	9.	I.	103.	1.
16.	Statische Aufgabe.	11.	II.	200.	1.
17.	Mechanische und geometrische Aufgaben.	11.	III.	308.	1.
18.	Sätze von Herrn *Str.* in Berlin.	16.	I.	95.	1.
19.	Algebraische Aufgaben.	25.	IV.	395.	2.
20.	Aufgaben.	28.	II.	191.	2.
21.	Fragen über Fuhrwerksräder.	40.	IV.	366.	1.
22.	Aufgaben.	44.	IV.	376.	1.

C. Nachrichten von Büchern. (*Avis de livres.*)

1.	Über Analysis und synthetische Geometrie.	1.	I.	95.	2.
2.	Über verschiedene Theile der Mathematik.	2.	IV.	399.	2.
3.	Desgleichen.	3.	IV.	410.	3.
4.	Desgleichen.	4.	IV.	400.	2.
5.	Desgleichen.	5.	IV.	424.	5.
6.	Von den Anfangsgründen der höheren Mechanik; nach der antiken, rein geometrischen Methode bearbeitet von Dr. *Lehmann*.	6.	IV.	417.	6.
7.	Über verschiedene Theile der Mathematik.	6.	IV.	422.	1.
8.	Über den Grundrifs der analytischen Sphärik von *Gudermann*.	7.	IV.	416.	1.
9.	Über Zahlenlehre und verschiedenes Andere.	8.	IV.	418.	2.

Manches von Dem, was hier unter „Ungenannte" verzeichnet steht, und von den Aufgaben und Lehrsätzen, so wie von den Nachrichten von Büchern, sogar vielleicht das Meiste, hat der Herausgeber dieses Journals aufgesetzt. Wie im 2. Bande S 395 bemerkt, hat er sich zu dergleichen Aufsätzen deshalb nicht genannt, „weil es möglich „wäre, dafs ihm, ohne sich dessen zu erinnern, „die Idee zu dieser oder jener Aufgabe etc. durch „irgend ein Buch oder ein Gespräch mitgetheilt „wäre, und er die Möglichkeit, etwa unbewufst „fremde Ideen sich zuzuschreiben, entziehen „wollte. Er trat daher die Ideen zu den Aufga„ben etc., für den Fall, dafs sie Jemand Anderes „schon gehabt haben sollte, im Voraus ab." Jetzt, nach so langer Zeit, kann er sich nicht mehr mit Sicherheit erinnern, was von ihm, und was von wirklich ungenannten Andern herrührt. Es mufs daher Alles Obige schon die Überschrift „Ungenannte" behalten. In der That kommt es ja auch nicht darauf an, wie ein ungenannter Verfasser von Diesem oder Jenem heifst, sondern nur auf den Gegenstand selbst.

Une partie des articles anonymes nommés ci-dessus, et des problèmes et théorèmes, ainsi que des critiques de livres, même peut-être la plus grande partie, ont été écrits par l'éditeur du journal. Il ne s'est pas nommé comme auteur de tels articles parceque, comme il l'a déclaré tome 2 page 395 il aurait été possible que l'idée de quelque problème etc. lui eût été suppéditée par quelque livre ou par quelque entretien, et qu'il voulait se soustraire à la possibilité de s'arroger à son insu des idées d'autrui. C'est pourquoi il abandonnait les idées en tous cas à d'Autres. Aujourd'hui, après tant d'années, il ne se souvient plus avec sureté, si tel ou tel petit article a été écrit par lui même, ou s'il est vraiment anonyme. Donc il faut que les articles spécifiés ci-dessus sous A, B et C, passent tous pour anonymes. Enfin il est assez indifférent, de connaître le nom de l'auteur d'un petit article, attendu qu'il ne s'agit que du sujet.

II.

Inhaltsverzeichnifs

der Bände 1—50 nach den Gegenständen der Beiträge.

Wenn man die Zahlen dieses Verzeichnisses in dem Inhaltsverzeichnifs I. unter den je vor den Zahlen stehenden Namen der Verfasser aufsucht, so findet man dort die Titel derjenigen Abhandlungen, welche der Verfasser über die hier in den Überschriften angegebenen Theile der Mathematik im Journal geschrieben hat; nebst den Nummern der Bände, Hefte und Seiten, wo die Abhandlungen im Journale stehen.

Table des matières

des tomes 1—50, selon les différentes parties de la science.

En cherchant les numéros de cette table II dans la table I, sous les noms des auteurs marqués ici devant les dits numéros, on trouve dans la table I les titres des articles que l'auteur a écrits dans le journal sur les différentes parties de la science qu'indique la table II; ainsi que les numéros des tomes, cahiers et pages où se trouvent les articles dans le journal.

I. Reine Mathematik.

I. Mathématiques pures.

1. Analysis.

1. Analyse.

A. Arithmetik und Algebra.

A. Arithmétique et algèbre.

N. H. Abel 5. F. Arndt 3. Burg 1. Cayley 2. 5. 7. 12. 19. Th. Clausen 1. 30. Crelle 4. 6. 7. 15. 22. 24. Eisenlohr 1. Eisenstein 6. 9. 11. 18. 19. 21. 28. Fischer 1. Förstemann 1. 5. O. Hesse 14. C. J. D. Hill 1. 10. Hoppe 3. C. G. J. Jacobi 5. 58. 67. 75. Meissel 1. M. Ohm 1. L. Olivier. 11. Plana 2. Poncelet 7. Richelot 2. Schellbach 1. Scherk 2. 5. Schlömilch 2. Slonimsky 2. Spitzer 1. Staudt 1. 14. Steiner 40. Stern 9. 23. Wöpke 1. 2. Anonymes *A.* 12. 13. *B.* 1. 2. 4. 19. *C.* 1.

B. Combinatorik.

B. Analyse combinatoire.

Beyer 1. Clausen 21. Crelle 21. Förstemann 4. Gudermann 4. C. G. J. Jacobi 59. 60. 61. 62. Öttinger 4. Ramus 2. Scherk 1. 6. Steiner 15. 18. 43. Stern 14. 15. 17. Weiss 1. 2. Anonymes *B.* 20.

C. Zerlegung der Brüche.

C. Décomposition des fractions.

Beyer 1. Brioschi 2. 3. Clausen 31. Crelle 12. E. H. Dirksen 1. Eisenstein 28. C. G. J. Jacobi 20. Öttinger 2. Schellbach 2.

D. Theorie der Zahlen.

D. Théorie des nombres.

N. H. Abel 14. Arndt 2. 5. 6. 7. 8. 9. Brenneke 1. Bretschneider 3. Cayley 16. Catalan 1. Th. Clausen 6. 30. Crelle 8. 11. 17. 20. 23. 36. 38. 40. 44. Dienger 7. Lejeune Dirichlet 1. 2. 3. 4. 8. 9. 13. 14. 15. 16. 17. 18. 21. 22. 24. 25. 26. Eisenstein 1. 2. 4. 5. 9. 10. 12. 13. 14. 17. 20. 22. 23. 24. 26. 28. 29. 30. 31. 32. 33. 34. 35. 36. Mad. S. Germain 2. Göpel 3. Grunert 6. 9. Hermite 3. 4. 5. 6. 7. 8. Hill 9. 11. A. v. Humboldt 1. C. G. J. Jacobi 3. 12. 14. 21. 28. 35. 43. 57. 58. 76. 80. 92. 98. Kronecker 1. Kulik 1. Kummer 6. 11. 13. 14. 17. 18. 20. 21. 22. 24. 25. Libri 5. Märker 1. Minding 56. W. H. Miller 1. Möbius 15. Oltramare 1. 3. 4. 5. Scheffler 1. Scherk 4. Schönemann 1. 2. 3. 4. 5. Siebek 2.

Jo. Smith 1. Stein 1. J. Steiner 15. 17. 18. 40. Stern 1. 2. 5. 10. 12. 14. 15. 17. 24. A. Thacker 1. Volpicelli 1. Zornow. 2. Anonymes *A.* 6. 8. 14. *B.* 2. 12. 22. *C.* 9.

E. Kettenbrüche. *E. Fractions continues.*

F. Arndt 9. Borchardt 2. Th. Clausen 2. Eisenstein 25. Heilermann 1. 2. 3. Heine 4. C. G. J. Jacobi 37. Löwenstern 1. Möbius 7. Öttinger 6. Ramus 4. Siebek 1. Stern 3. 4. 7. 13. 28. Anonymes *B.* 2. 18.

F. Theorie der Gleichungen. *F. Théorie des équations.*

N. H. Abel 2. 19. 23. Bellavitis 1. Bouniakowsky 1. Burg 3. Cayley 16. 19. Th. Clausen 9. Collins 1. Crelle 14. 42. Deahna 1. E. H. Dirksen 4. Eisenlohr 2. Eisenstein 3. 6. 9. 15. 16. 33. Enke 1. Fischer 1. Förstemann 1. 5. Gaufs 1. Gräffe 1. Grunert 1. Heilermann 2. 4. Heine 12. O. Hesse 10. 17. Hill 1. 4. 6. 10. C. G. J. Jacobi 2. 22. 39. 41. 44. 46. 59. 60. 61. 71. Joachimsthal 5. 11. Libri 6. 7. Löwenstern 1. Lottner 2. E. Luther 1. 2. Malmstén 1. Minding 11. 19. L. Olivier 2. 4. 9. Plücker 13. Raabe 14. Richelot 2. Schönemann 3. Schultze 1. N. W. Schulze 1. Stern 6. 19. 20. 26. Strehlke 2. Sufsmann 1. Theremin 3. Ullherr 1. Umpfenbach 1. Waltinowsky 1. Wöpke 1. Anonymes *B.* 1. 2. 4. 5. 10.

G. Analytische Facultäten. *G. Facultés analytiques.*

Clausen 28. Crelle 10. 27. Lejeune-Dirichlet 10. Gudermann 15. Hoppe 4. C. G. J. Jacobi 32. Kummer 15. Löwenstern 1. A. Müller 2. M. Ohm 2. 3. Öttinger 5. Raabe 18. 27. 29. Schläffli 1. Schlömilch 10.

H. Interpolation. *H. Interpolation.*

Clausen 12. E. H. Dirksen 2. L. Olivier. 9.

I. Elimination. *I. Elimination.*

Cayley 6. Clausen 29. Crelle 37. C. G. J. Jacobi. 46. 75. O. Hesse 7. 8. 9. Magnus 6. Minding 22. 24. 25. Richelot 6. Rosenhain 2.

K. Theorie gewisser Functionen. *K. Théorie de certaines fonctions.*

N. H. Abel 1. 11. 23. Aronhold 1. Bretschneider 2. Broch 1. 2. Cayley 1. 2. 5. 7. 9. 17. 18. 19. Th. Clausen 8. 9. 32. Collins 1. Crelle 10. Dienger 8. 13. Eisenlohr 1. Eisenstein 30. Gudermann 2. 5. 6. 28. Heine 9. 10. 11. Heinen 3. Hermite 2. O. Hesse 14. 16. 20. 21. 23. Hill 5. 6. 7. 8. 12. C. G. J. Jacobi 5. 33. 75. Jordann 2. Jürgensen 1. 2. 4. 5. Kummer 12. 23. Libri 1. 2. 4. 8. Lottner 1. Luchterhand 1. Magnus 1. A. Meyer 1. Minding 7. 11. L. Olivier 7. 10. Raabe 13. 31. 35. Radike 1. Ramus 1. Richelot 3. Rosenhain 2. Salmon 1. Schellbach 8. 13. Schläffli 3. Staudt 4. Anonymes *B.* 1. 2. 9. 15.

L. Theorie der Reihen. *L. Théorie des séries.*

N. H. Abel 7. 10. 12. 23. F. Arndt 1. 4. Björling 1. Bretschneider 2. Clausen 3. 4. 8. 10. 14. 26. Crelle 7. 18. Dienger 1. 2. 5. 9. 10. 12. Lejeune-Dirichlet 6. 11. 12. 14. Dirksen 3. Eisenlohr 1. Eisenstein 8. 25. 34. Grunert 2. 11. Gudermann 10. 14. Heilermann 1. 3. Heine 3. 4. 5. 7. Hill 3. C. G. J. Jacobi 36. 49. 58. 83. 90. 91. Jürgensen 3. Kummer 2. 3. 4. 5. 7. 23.

Lamé et Clapeyron 1. Libri 2. Luchterhand 2. Malmstèn 2. 3. A. Meyer 1. Möbius 9. 22. Nernst 1. 2. M. Ohm 1. L. Olivier 8. 12. Oltramare 2. Pauker 1. Poncelet 6. Prehn 3. Raabe 8. 12. 13. 17. 19. 20. 23. Schäffer 2. Schellbach 2. 7. Scherk 5. Schlömilch 2. 9. v. Schmidten 2. Siebek 2. Smaasen 1. Staudt 1. Stern 8. 11. 12. 16. 21. 22. 25. 27. Tardy 1. 2. Tchebicheff 1. Weifs 2. Anonymes *B.* 1. 2.

M. Differenzen-, Differential-, Integral- und Variations-Rechnung.

M. *Calcul différentiel et intégral, des variations et des différences.*

N. H. Abel 6. 10. Aoust 1. Bretschneider 2. Ch. Broke 1. Clausen 9. 17. 29. Crelle 18. Deahna 2. Dedekind 1. Lejeune-Dirichlet 10. Grunert 7. Gudermann 22. 32. Hansen 1. Haedenkamp 1. 3. 4. Heine 1. O. Hesse 5. Hill 2. 5. 12. 13. 14. 15. 16. Hoppe 1. C. G. J. Jacobi 1. 7. 8. 10. 21. 25. 30. 31. 33. 47. 54. 55. 56. 63. 64. 70. 81. 84. 87. 88. 89. 96. 97. Joachimsthal 4. 9. Jürgensen 2. 5. 6. Kartscher 1. Köhlau 1. Kummer 1. 10. Lebesque 1. Libri 7. 9. 10. Liouville 1. 2. 3. 4. 5. 6. Lobatto 1. 2. 3. 4. 6. Luchterhand 1. Malmstèn 4. 5. 6. A. Meyer 1. Minding 3. 8. 9. 23. 26. A. Müller 3. Neumann 1. Ostrograsky 1. Öttinger 1. Pagani 7. Pauker 2. Plana 1. 6. Poisson 5. 7. 9. Raabe 9. 12. 21. 22. 23. 30. 32. 24. Radike 2. Ramus 1. 3. 6. 7. 10. Richelot 8. 9. 16. Sauer 1. Schäffer 1. Schellbach 5. 9. Scherk 3. Schläffli 2. Schlömilch 1. v. Schmidten 1. Stern 18. Tortolini 2. 3. 5. Winkler 2. 3. 5. Anonymes *B.* 4. 9. *C.* 1.

N. Bestimmte Integrale.

N. *Intégrales définies.*

N. H. Abel 8. Bierens de Haan 1. Buoncompagni 1. Dienger 3. 5. 6. 11. 14. Heine 13. Lejeune-Dirichlet 5. 12. Grunert 7. Gudermann 28. 31. Hill 5. Hoppe 2. C. G. J. Jacobi 32. 37. 41. 45. 67. 79. Kummer 1. 7. 8. 9. 15. Libri 10. Liouville 3. Lobatto 6. Malmstèn 3. Plana 1. Raabe 12. 15. 16. 17. 19. 20. 21. 24. 25. 26. 33. Ramus 9. Richelot 16. Schellbach 4. Schlömilch 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. Smaasen 1. Svanberg 1. Tortolini 1.

O. Elliptische und Abelsche Functionen.

O. *Fonctions elliptiques et Abéliennes.*

N. H. Abel 9. 10. 13. 15. 16. 17. 18. 20. 21. 22. 23. 24. Broch 2. Cayley 8. 13. 14. Eisenstein 1. 7. 27. 37. Göpel 1. Gudermann 21. 23. 24. 26. 31. 33. Gützlaff 1. Haedenkamp 4. Heine 6. Hermite 1. H. Hoffmann 1. C. G. J. Jacobi 11. 13. 15. 16. 17. 18. 19. 23. 24. 26. 27. 29. 38. 40. 48. 66. 68. 74. 77. 78. 82. 86. 87. Krusemark 1. Lottner 3. Malmstèn 7. C. O. Meyer 2. Meissel 3. Plana 6. Raabe 11. Richelot 1. 4. 5. 10. 11. 12. 13. 14. 18. 19. 20. 22. Rosenhain 1. 3. Sanio 1. Sohnke 2. 3. Somoff 2. Weierstrafs 1.

P. Wahrscheinlichkeits-Rechnung.

P. *Calcul de probabilités.*

Dedekind 2. Enke 2. Lobatschewsky 2. Öttinger 3. Ramus 8. Reuschle 2. Tchebischeff 2.

2. Geometrie.

2. Géométrie.

A. Elementar-Geometrie.

A. *Géométrie élémentaire.*

Aubertin 1. August 1. 2. Bauer 1. Beyer 1. Brune 1. 3. 4. Clausen 5. 11. 30. 33. 36. Crelle 9. 16. 26. 29. 41. 42. Dahse 1. Eisenstein 9. 23. Fasbender 2. 3. Förstemann 1. 3. Frankenheim 1. Gerling 1. Gerwien und v. Holleben 1. Gerwien 1. 2. 4. Graves 1. Grunert 3. 4. 5. Gruson 1.

Gudermann 1. 3. 7. 9. 15. 35. Heinen 1. Hessel 1. Horn 2. C. G. J. Jacobi 16. Koppe 1. 2. Kulik 2. Kummer 19. Lehmus 3. 8. 9. 11. Luchterhand 3. Magnus 2. Minding 28. Möbius 1. 2. 26. L. Olivier 3. 6. Plana 1. Plücker 17. Raabe 7. Ramus 5. Remy 1. 2. v. Renthe 1. 2. Richelot 2. Schellbach 10. 11. Scherer 1. F. Schultze 1. Schulz v. Strasnicky 1. 2. Specht 1. 2. Steiner 13. 38. Strehlke 2. Umpfenbach 2. 3. Unger 1. 2. 3. Winkhaus 1. Wöpke 1. Zornow 1. Anonymes *A.* 2. 3. 5. 7. 11. *B.* 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 13. 14. 15. 17.

B. Goniometrie und Trigonometrie. *B. Goniométrie et trigonométrie.*

Clausen 32. Crelle 7. 10. Dirksen 3. Eisenstein 21. Feldt 1. Gudermann 5. 38. C. G. J. Jacobi 49. 67. 76. Jordann 1. Kummer 3. Littrow 1. Minding 27. Möbius 16. Nernst 1. M. Ohm 4. L. Olivier 1. 10 11. Raabe 20. Richelot 7. Schellbach 7. 10. 11. Schläffli 3. Schlömilch 2. Scholtz 1. Schönemann 1. 2. Stern 11. 22. Tardy 3. Winkler 1.

C. Sphärische Geometrie. *C. Géométrie sphérique.*

Bauer 1. Bretschneider 1. Clausen 16. Crelle 13. Gaufs 3. Gerwien 2. 3. Gudermann 7. 8. 12. 13. 16. 17. 18. 19. 25. 27. 29. 30. 31. 34. 36. 38. Haedenkamp 2. Hellerung 1. Jullien 1. Löwenstern 1. Minding 27. Raabe 2. Remy 1. Schmeisser 1. Steiner 6. Anonymes *C.* 8.

D. Synthetische Geometrie. *D. Géométrie synthétique.*

Aubert 1. Brioschi 1. Broch 3. Cayley 3. 15. 19. Eberty 1. Göpel 2. Grafsmann 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. Gudermann 11. Heinen 4. 5. O. Hesse 3. 6. 18. A. Jacobi 1. 2. 3. C. G. J. Jacobi 34. Kramer 1. Leithold 1. Luchterhand 2. Minding 2. Möbius 3. 5. 10. 11. 14. 17. 18. 23. Poncelet 3. 4. 5. Schällibaum 1. 2. 3. Staudt 2. Steiner 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 15. 19. 20. 21. 22. 23. 24. 25. 26. 27. 28. 29. 30. 31. 32. 33. 34. 35. 36. 37. 39. 41. 42. 44. 45. 46. 47. 48. 49. 50. 51. Swellengrebel 1. Anonymes *C.* 1.

E. Analytische Geometrie. *E. Géométrie analytique*

N. H. Abel 23. Amsler 1. Arendt 10. Balzer 1. Brix 1. Brunn 1. Cayley 4. 6. 10. 11. 19. Clausen 7. 19. 21. 22. 23. 34. 35. Dippe 1. Druckenmüller 1. Eisenstein 33. Fasbender 1. 4. Garbinsky 1. Sophie Germain 1. Grunert 8. 10. Gudermann 11. 17. Hachette 1. 2. 3. Haedenkamp 2. Heinen 2. O. Hesse 1. 2. 4. 9. 11. 12. 13. 15. 19. 22. 24. Hittorf 1. Horn 1. 2. 3. A. Jacobi 2. C. G. J. Jacobi 4. 5. 42. 50. 51. 52. 53. 56. 71. 94. 95. Joachimsthal 1. 2. 3. 5. 6. 7. 8. 10. Kummer 12. 16. Lehmus 1. 5. 6. 7. Lobatschewsky 1. Magnus. 3. 4. 5. C. O. Meyer 1. Meissel 2. Minding 1. 4. 10. 16. 17. 18. 20 21. G. W. Müller 1. Paucker 2. Plana 3. 4. 5. Plücker 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 15. 16. 18. 19. Poisson 3. 4. Raabe 1. 4. 5. 6. 10. 28. 36. 37. Reuschle 1. Richelot 2. 14. Salmon 1. 2. Schellbach 6. 8. 12. (V. VI. IX.) Scherk 5. 7. Scholz 1. N. W. Schultz 1. Serret 1. Spottiswoode 1. 2. 3. Stammer 1. Staudt 3. Steiner 14. Strehlke 1. Tellkampf 1. Tortolini 1. 2. 3. 4. Umpfenbach 4. 5. 6. Wolf 1. Anonymes *B.* 2. 4. 5. 11.

3. Mechanik. 3. *Mécanique.*

A. Statik und Dynamik. *A. Statique et Dynamique.*

N. H. Abel 3. 4. Amsler 1. 2. Burg 2. Cayley 5. Clausen 15. 18. Cournot 1. 2. Crelle 2. 28. 39. Despeyrous 1. Dumas 1. Lejeune-Dirichlet

19. 20. Gaufs 2. Gudermann 18. 30. 37 v. Heim 1. 2. 3. Heine 2. 8. C. G. J. Jacobi 65. 69. 73. 93. Jullien 1. Kirchhof 1. Kossack 1. Lehmus 2. Liouville 3. Lobatto 5. Lottner 3. C. O. Meyer 1. Minding 12. 13. 14. 15. 29. Möbius 4. 8. 12. 13. 14. 19. 21. 22. 24. A. Müller. 1. Pagani 3. 4. 5. 6. 8. 9. Pauker 2. Plana 4. 5. Richelot 15. 17. 21. Schellbach 12. (I. II. III. IV. VII. VIII. IX.) Schweins 1. 2. 3. 4. 5. Sohnke 1. Somoff 1. Stader 1. Steichen 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. Steiner 16. 26. Weingarten 1. Winkler 4. Zech 1. Anonymes *B.* 1. 2. 16. 17. *C.* 6.

B. Hydrostatik und Hydrodynamik. ***B. Hydrostatique et Hydrodynamique.***

Crelle 25. 32. v. Dawidof 1. Eytelwein 1. Lehmus 2. Pagani 2. Prehn 1. Ramus 8. v. Steinheil 1. Svanberg 2. Anonymes *B.* 2.

C. Aërostatik und Aërodynamik. ***C. Aërostatique et Aërodynamique.***

Brooke 1. Oltmanns 1. Anonymes *B.* 5. 10.

II. Angewandte Mathematik. *II. Mathématiques appliquées.*

A. Astronomie und Geographie. ***A. Astronomie et Géographie.***

Bergius 1. Bernardi 1. Borchardt 1. Clausen 20. 24. 25. 27. Dienger 3. Dumas 1. Gudermann 20. Hansen 1. C. G. J. Jacobi 9. 69. 72. 96. Littrow 1. Möbius 19. 20. Oltmanns 2. Pagani 5. Poisson 1. Raabe 3. Sohnke 1. Winkler 6. Anonymes *A.* 10.

B. Chronologie. ***B. Chronologie.***

Jahn 1. Matzka 1. Nesselmann 1. Piper 1. Slonimsky 1.

C. Optik und Theorie des Lichts. ***C. Optique et théorie de la lumière.***

Clausius 1. 2. v. Forstner 1. Lehmus 10. W. H. Miller 1. Möbius 6. 7. Pagani 1. Plücker 14. 21. Anonymes *B.* 1. 4.

D. Theorie der Wärme. ***D. Théorie de la chaleur.***

Amsler 2. 3. Despeyrous 1. Lejeune-Dirichlet 7. Heine 1. 2. Libri 3. Poisson 8.

E. Theorie der Maschinen. ***E. Théorie des machines.***

Clausen 13. Crelle 3. 25. 28. 33. Dietlein 1. 2. Druckenmüller 2. v. Heim 4. M. H. Jacobi 1. Lehmus 4. G. S. Ohm 1. Poncelet 1. 2. Prehn 2. Segnitz 1. Anonymes *A.* 1. *B.* 2. 21.

F. Krystallometrie. ***F. Cristallométrie.***

Frankenheim 1. Möbius 25. 26. Zeuner 1.

G. Physik. ***G. Physique.***

Dienger 1. Green 1. Haedenkamp 1. Kirchhof 2. Lamé u. Clapeyron 2. Navier 1. Neumann 1. Plücker 20. Poisson 2. Simonoff 1. Thomson 1. Anonymes *A.* 9.

H. Staatswirthschaftliches. ***H. Économie politique.***

Brune 2. Crelle 21. 31. 43.

I. Allgemeines und Verschiedenes. ***I. Sujets différents et généraux.***

Chelini 1. Crelle 5. 19. 30. 34. 35. Lejeune-Dirichlet 23. Friedländer 1. Göpel 3. A. v. Humboldt 2. C. G. J. Jacobi 85. Minding 28. Poisson 6. Preufs 1. Schellbach 3. Anonymes *A.* 15. 16.

K. Druckfehler und Verbesserungen. ***K. Fautes d'impression et rectifications.***

1. IV. 388; 10. II. 200; 11. II. 200; 11. III. 308; 11. IV. 406; 13. II. 184; 13. IV. 364; 14. IV. 380; 15. IV. 378; 16. IV. 376; 17. IV. 392; 19. IV. 388; 20. IV. 360; 21. IV. 380; 22. IV. 380; 23. IV. 379; 24. IV. 381; 27. beim Inhaltsverzeichnifs; 27. II. 192; 27. III. 284; 30. IV. 351; 35. III. 276; 39. II. 137; 40. III. 278; 40. IV. 386; 41. IV. 367; 45. II. 187; 45. IV. 380; 46. I. 96; 46. III. 282; 46. IV. 389; 47. IV. 384; 49. I. 94; 49. IV. 370.

Fac-similes von Handschriften nachbenannter verstorbener berühmter Mathematiker.

(Fac-simile d'autographes des célèbres géomètres décédés, nommés ci-après.)

	Band. (*Tome.*)	Heft. (*Cah.*)		Band. (*Tome.*)	Heft. (*Cah.*)		Band. (*Tome.*)	Heft. (*Cah.*)
1. *N. H. Abel.* . .	23.	I.	26. *Ferroni.*	34.	II.	52. *Lexell.*	27.	II.
2. *D. Alembert.* . .	26.	III.	27. *Fontana.*	34.	III.	53. *Manfredi.* . . .	37.	III.
3. *Ampère.*	25.	IV.	28. *Fourier.*	27.	III.	54. *Maupertuis.* . .	32.	I.
4. *Bailly.*	40.	II.	29. *Frisi.*	37.	I.	55. *Mechain.*	33.	II.
5. *Dan. Bernoulli,* 2 Handschriften.	23.	IV.	30. *Fufs.*	24.	II.	56. *Mollweide.* . . .	39.	II.
6. *Joh. Bernoulli.*	26.	I.	31. *Gaufs.*	50.	IV.	57. *Monge.*	30.	II.
7. *Nic. Bernoulli.*	26.	II.	32. *Gal. Galilaei.* . .	31.	I.	58. *Montanari.* . . .	36.	I.
8. *Bessel.*	35.	IV.	33. *Dem. S. Germain.*	28.	IV.	59. *J. Newton.* . . .	32. / 33.	IV. / IV.
9. *Boscowich.* . . .	36.	IV.	34. *A. Göpel.*	38.	II.	60. *Oriani.*	33.	III.
10. *Buzengeiger.* . .	38.	IV.	35. *Grandi.*	37.	II.	61. *Paoli.*	34.	IV.
11. *Carnot.*	27.	IV.	36. *Gudermann.* . .	43.	IV.	62. *F. F. Pfaff.* . .	35.	II.
12. *Cartesius.* . . .	28.	II.	37. *W. Herschel.* . .	31.	III.	63. *Pfleiderer.* . . .	38.	III.
13. *Castelli.*	37.	IV.	38. *Hevel.*	28.	I.	64. *Poisson.*	25.	I.
14. *J. M. Castillon.*	40.	III.	39. *Huyghens.* . . .	24.	IV.	65. *Réaumur.* . . .	33.	I.
15. *Cavalieri.*	38.	I.	40. *C. G. J. Jacobi.* .	43.	III.	66. *Riccioli.*	36.	II.
16. *La Condamine.*	39.	IV.	41. *Kant.*	29.	IV.	67. *Roberval.*	28.	III.
17. *Condorcet.* . . .	31.	II.	42. *W. J. G. Karsten.*	32.	II.	68. *Schröter.*	32.	III.
18. *Copernicus.* . . .	29.	II.	43. *Kästner.*	30.	III.	69. *Süfsmilch.* . . .	40.	I.
19. *Cramer.*	26.	IV.	44. *Kepler.*	27.	I.	70. *Tycho de Brahe.*	29.	I.
20. *Eisenstein.* . . .	45.	II.	45. *Klügel.*	39.	I.	71. *Tralles.*	35.	III.
21. *J. A. Euler.* . .	39.	III.	46. *Lagrange.* . . .	23.	III.	72. *Torricelli.* . . .	25.	III.
22. *L. Euler.*	23.	I.	47. *Lalande.*	31.	IV.	73. *Vandermonde.* .	36.	III.
23. *J. A. Eytelwein.*	40.	IV.	48. *Lambert.*	23.	II.	74. *Viviani.*	35.	I.
24. *Fermat.*	30.	IV.	49. *Laplace.*	24.	I.	75. *Ch.* Frh. v. *Wolf.*	29.	III.
25. *Ferrari.*	34.	I.	50. *Legendre.* . . .	24.	III.			
			51. *Leibnitz.*	30.	I.			

Druck von G. Reimer in Berlin.

Crelle, Journal d. Math. Bd. 50. Heft 4.

Fac-simile einer Handschrift von C. F. Gauss.

Ew. Hochwohlgeboren

habe ich noch meinen gehorsamsten Dank abzustatten für die gütige Übersendung des letzten Heftes Ihres schätzbaren Journals für Mathematik. Mein Dank dafür ist verspätet, theils durch eine in der letzten Zeit gemachte Geschäftsreise, theils weil ich wünschte, Ihnen, Ihrem mehrermals ausgedrückten Verlangen zufolge einen kleinen Beitrag für Ihre Zeitschrift aufzusetzen. Beigehend folgt nun ein solcher Artikel, der Ihnen wenn Sie ~~Ihr~~ die Aufnahme in Ihr Journal angemessen finden für dasselbe zu Dienst steht. Meines Wissens ist dieses Princip und der Gesichtspunkt, aus welchem solches aufgefaßt ist, neu: sollte Ihnen aber das Gegentheil bekannt sein, so würde ich dann lieber sehen, wenn Sie diesen Aufsatz nicht abdrucken, sondern gelegentlich zurücksenden wollten.

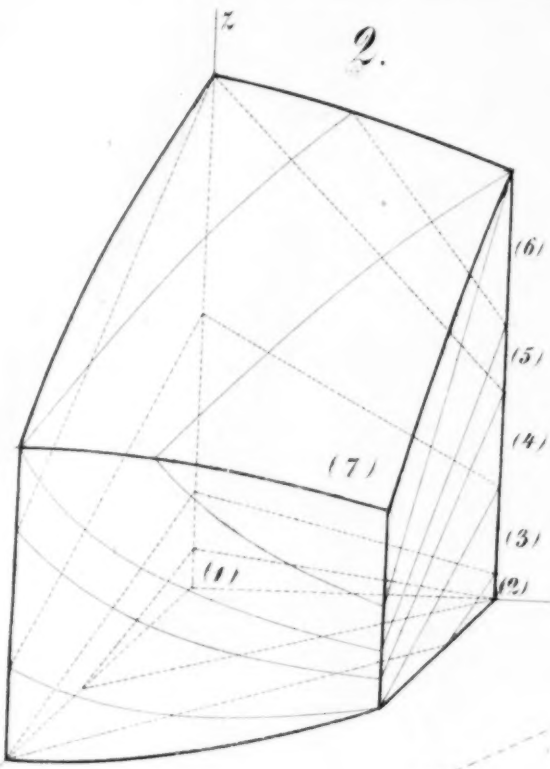
Unter herzlichen Wünschen für Ihr Wohlbefinden, empfehle ich mich

Hochachtungsvoll und gehorsamst.

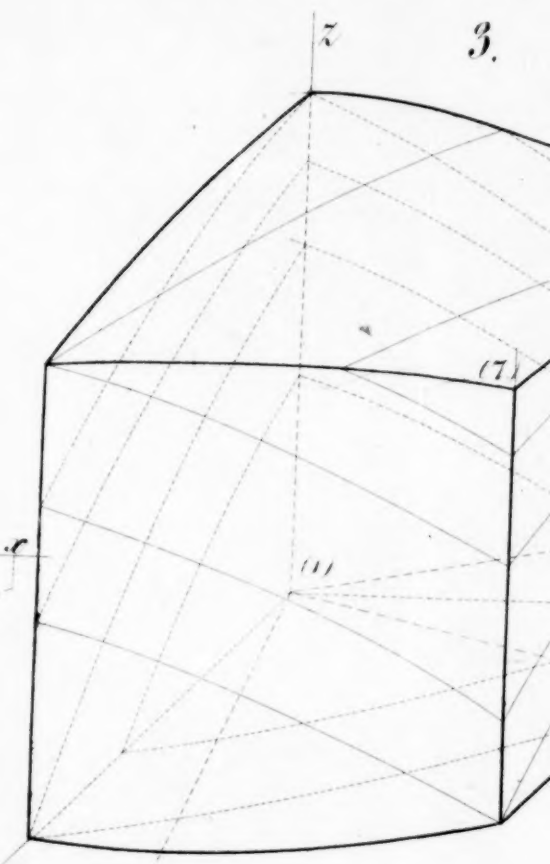
C. F. Gauss

Göttingen den 12 März 1829.

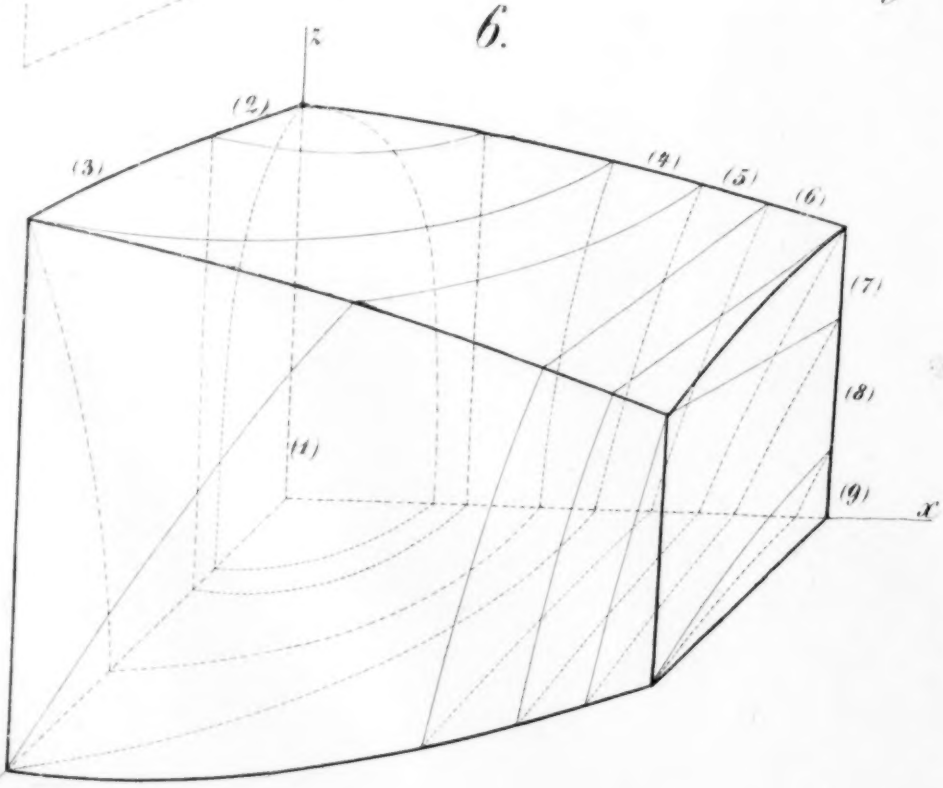
2.

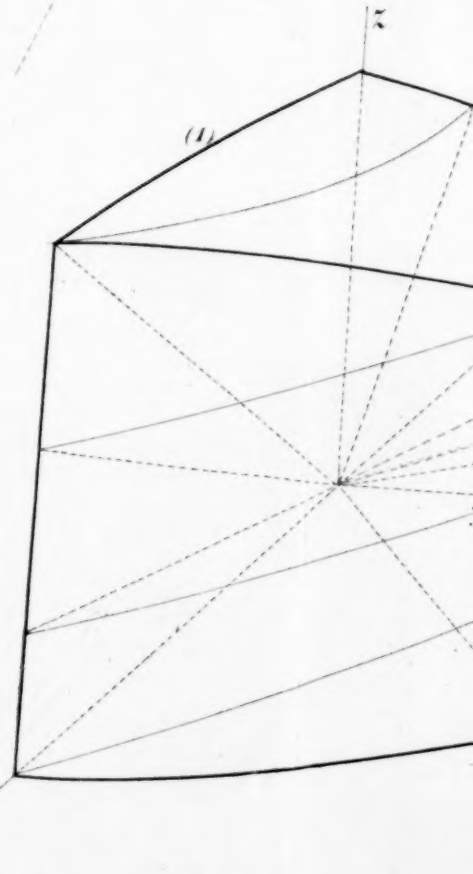


3.

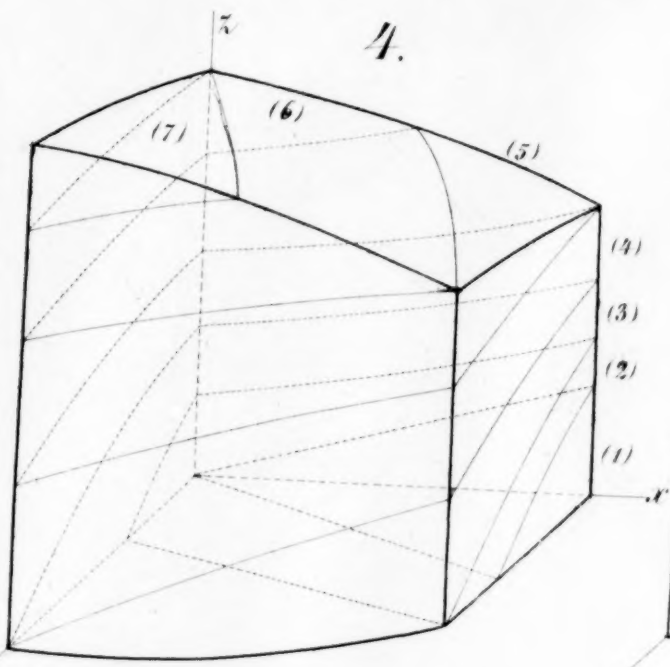


6.

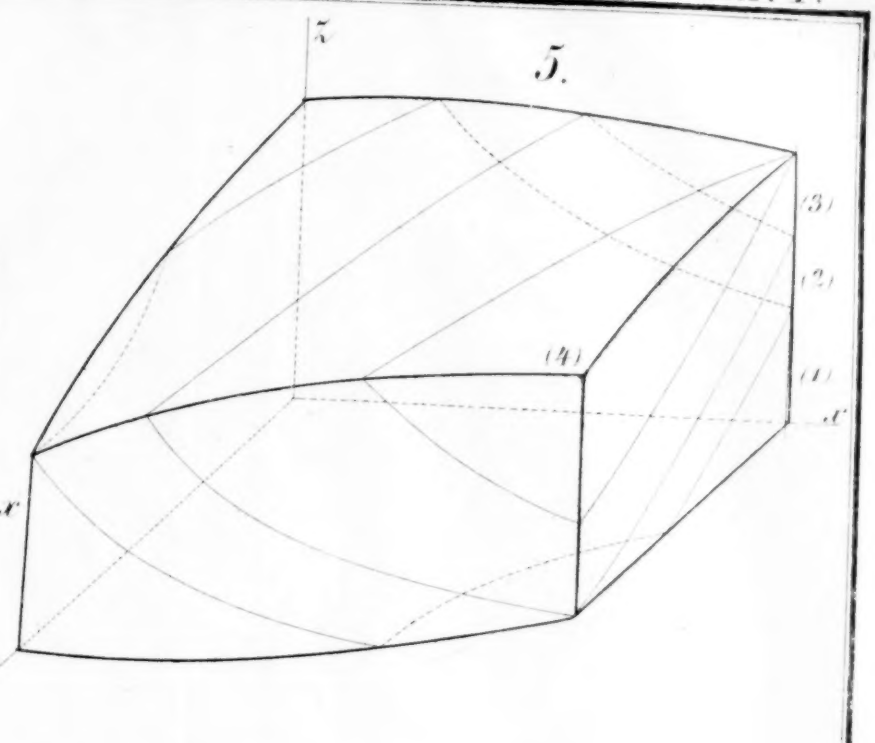




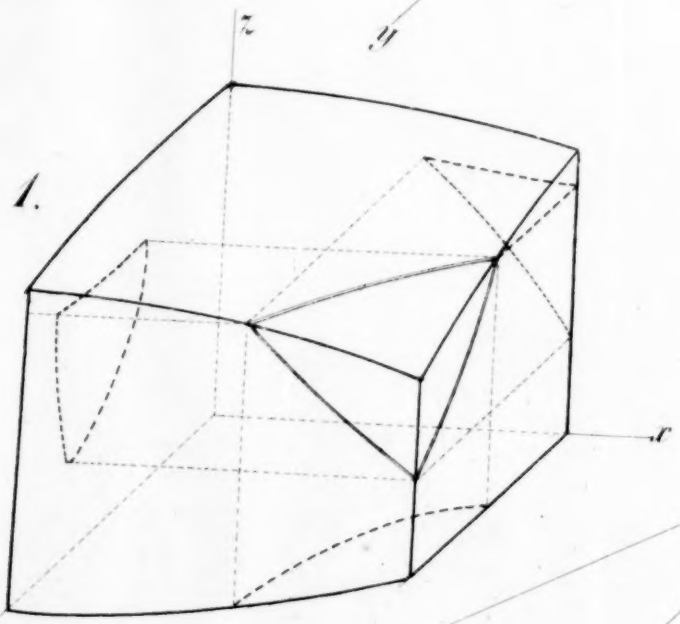
4.



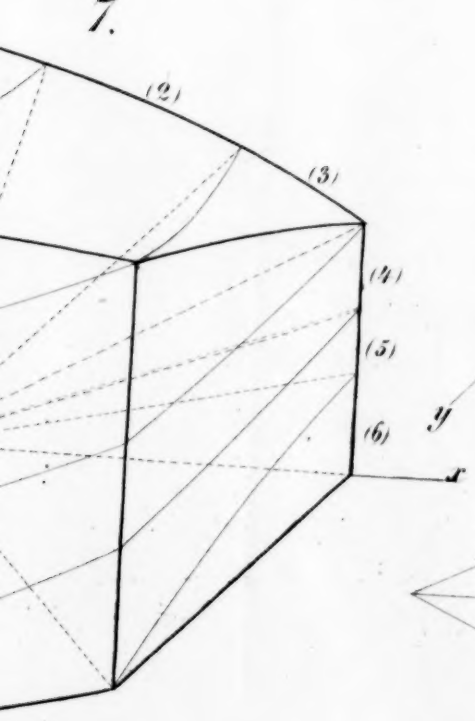
5.



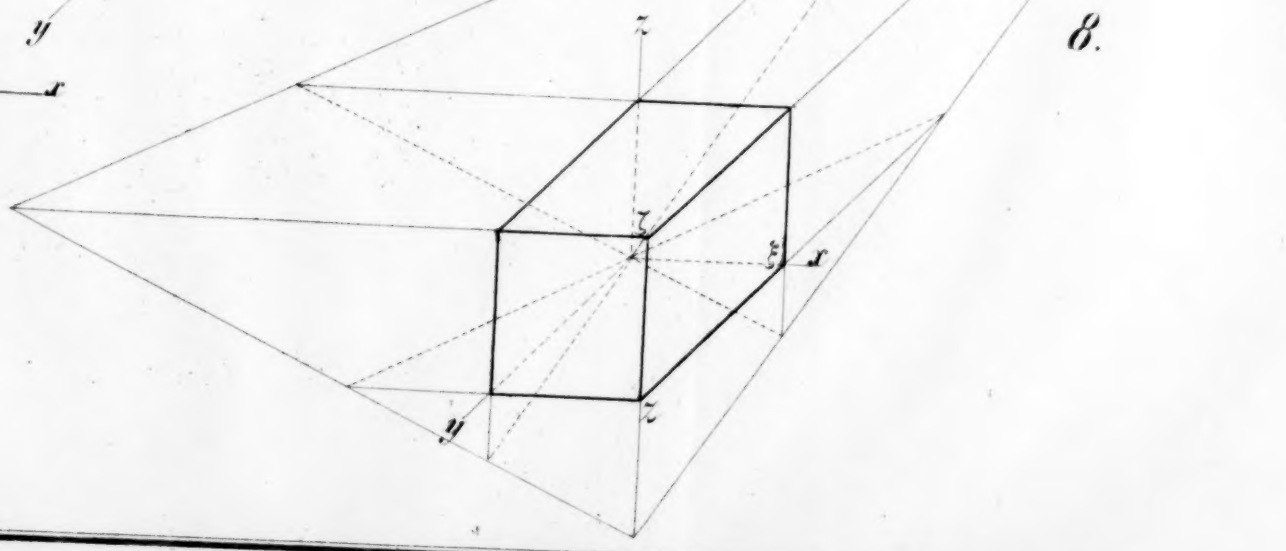
1.

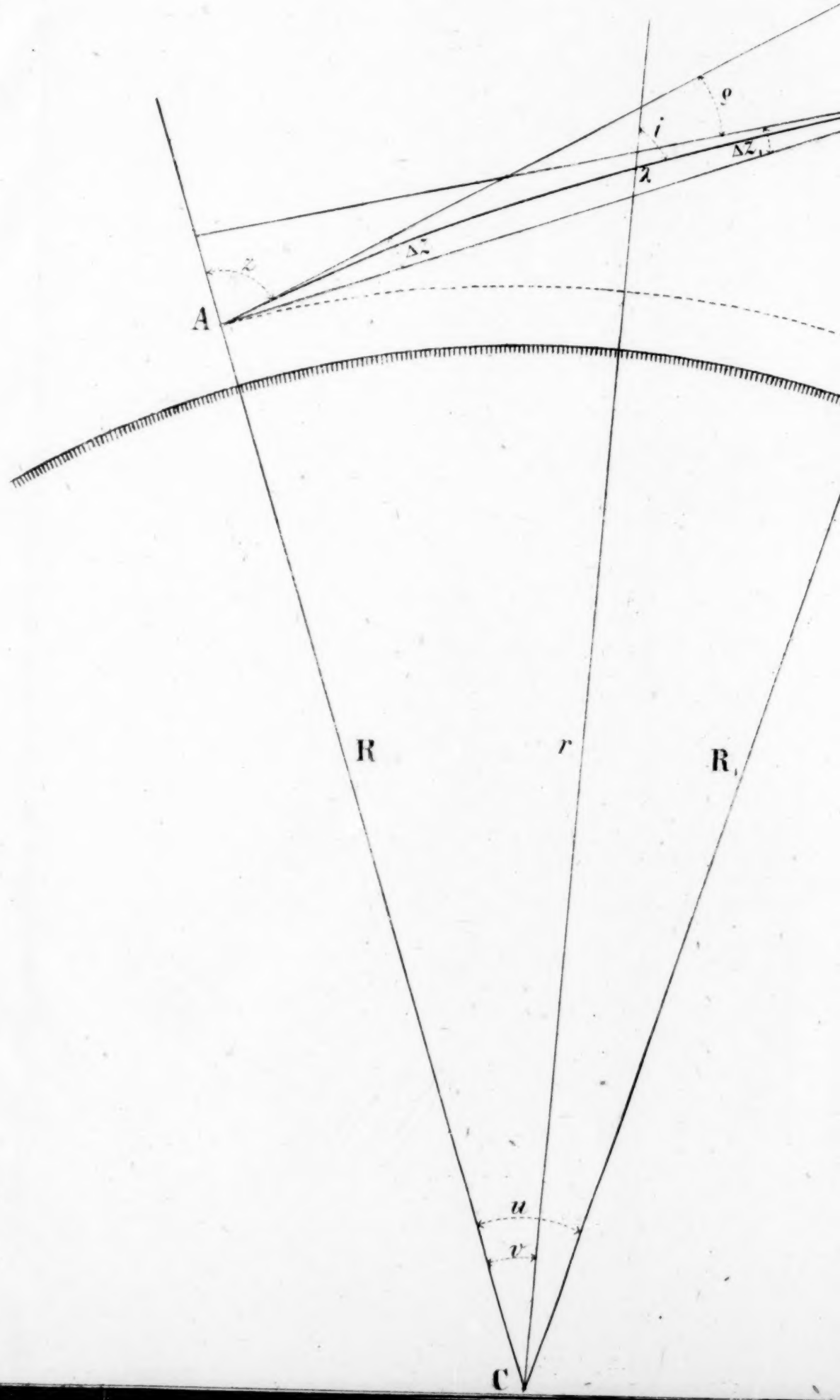


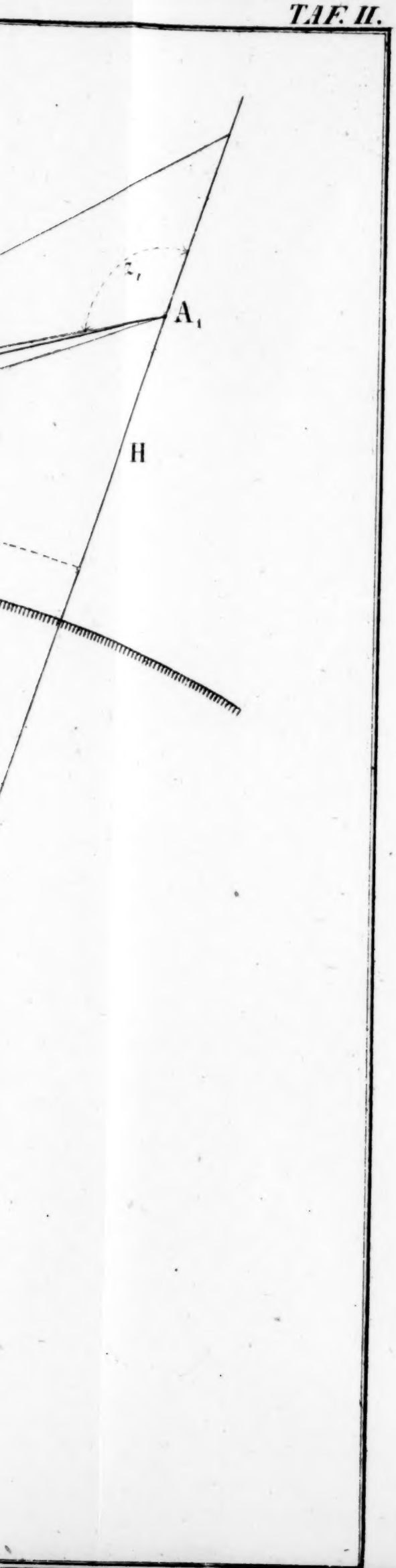
7.



8.

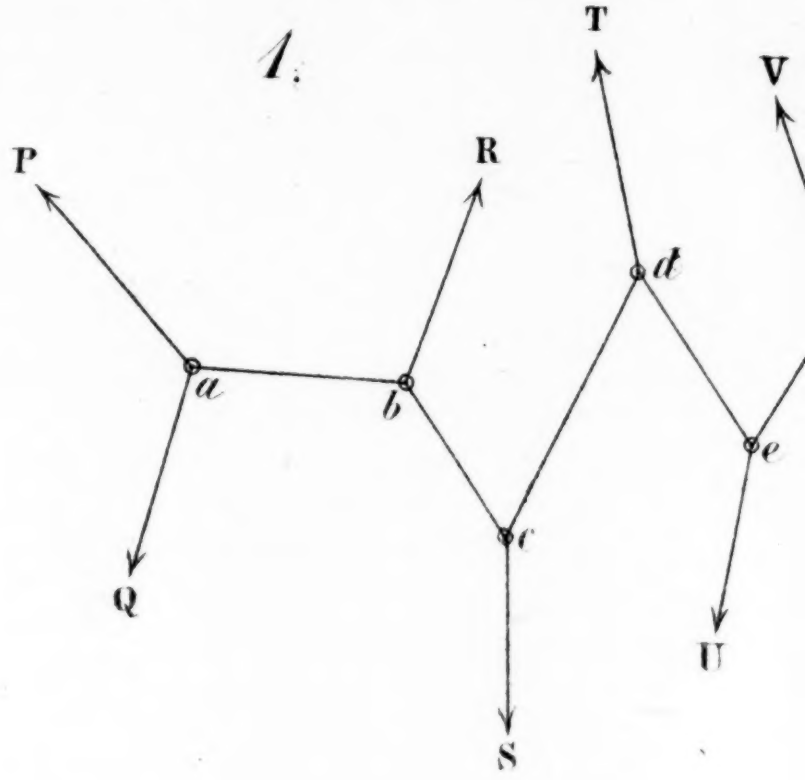


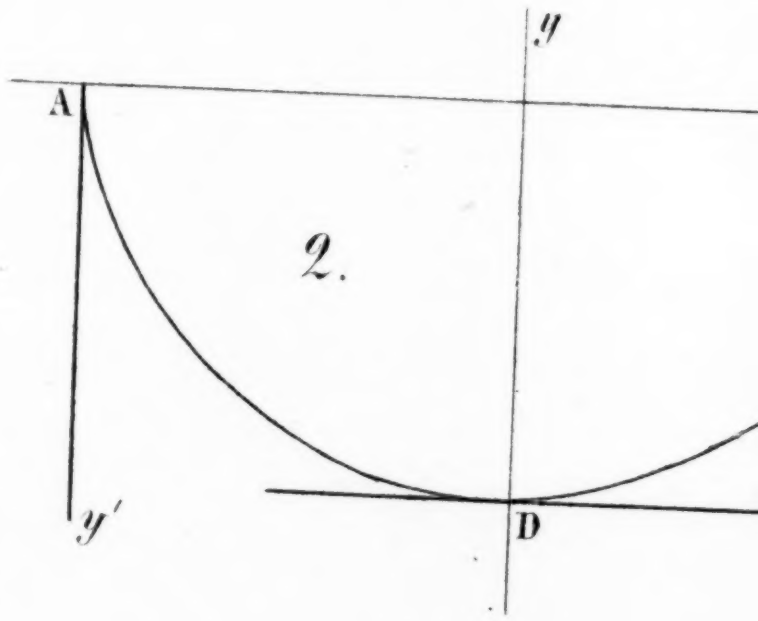

ϱ
i
Δz₁
λ
Δz
z
A
R
r
R₁
u
v
C

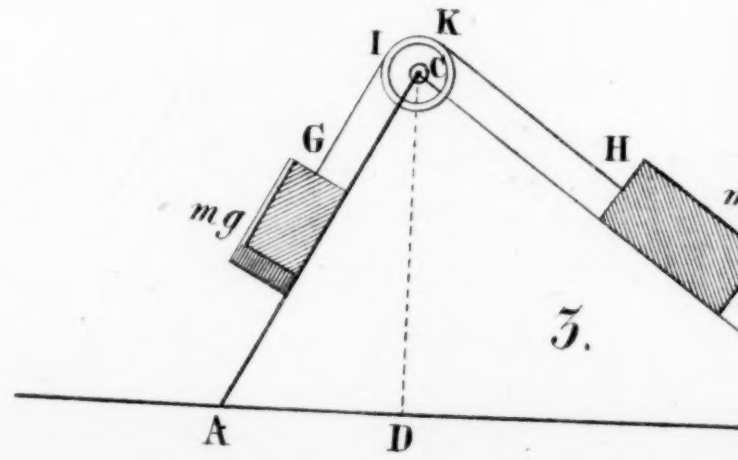

A1
H

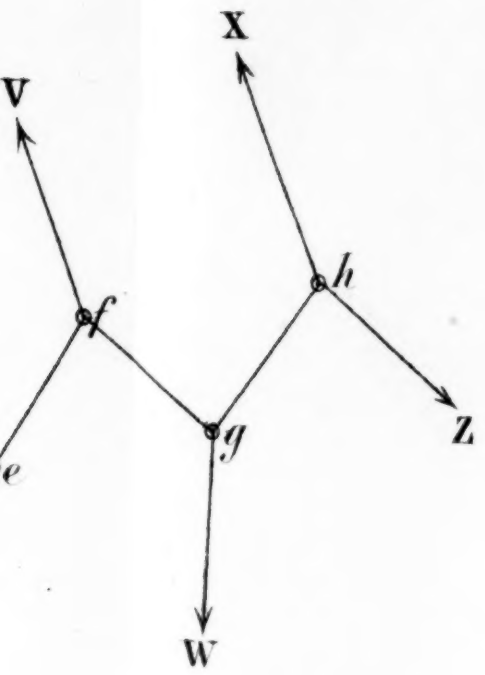
b
A
C

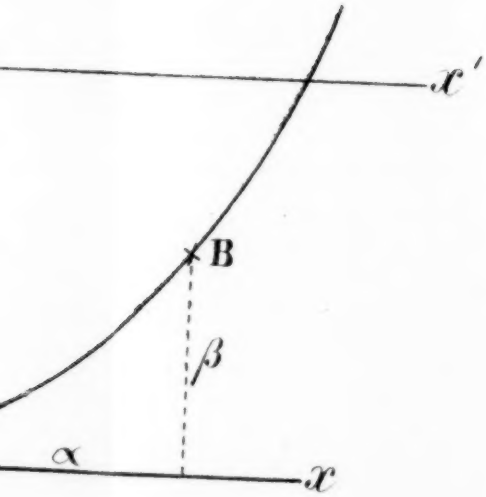
1.

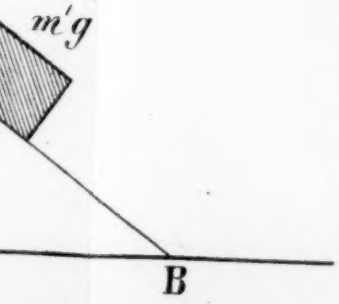


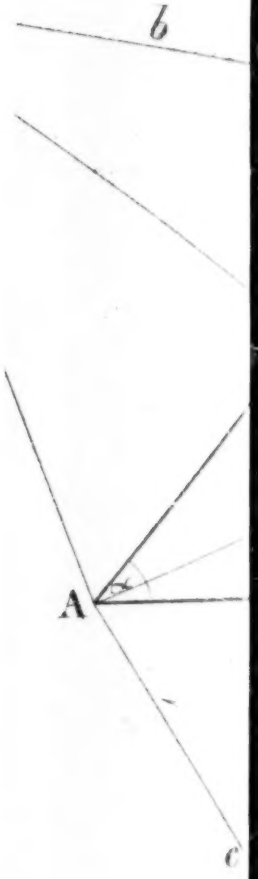


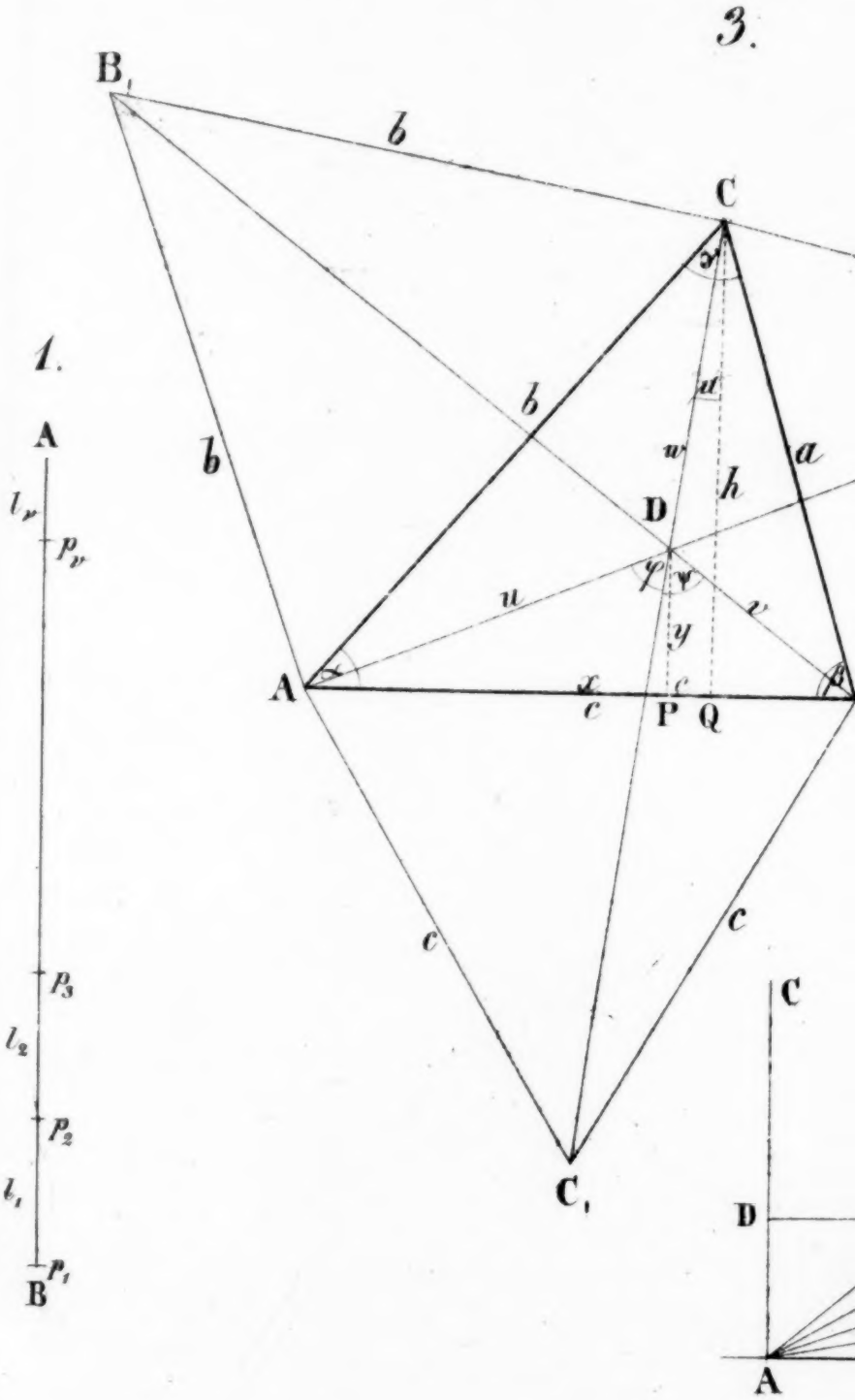



X
V
h
f
g
Z
e
W

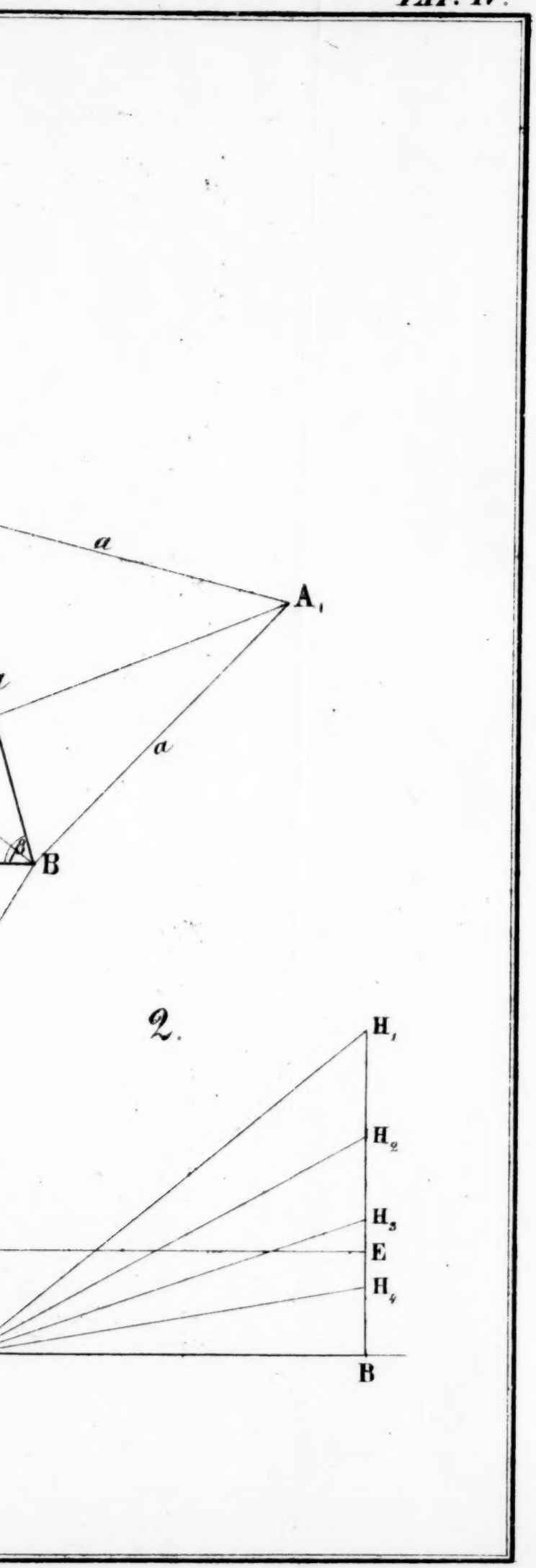

x'
B
β
α
x


m'g
B


b
A
c


3.
B,
b
C
b
b
a
h
D
u
v
y
A
x
c
P
Q
c
c
C,
C
D
A

1.
A
l_v
p_v
p_3
l_2
p_2
l_1
p_1
B



2.